

标准映象的周期分岔及其向混沌的过渡*

刘 军 贤 陈 光 旨

(广西师范大学)

王 光 瑞 陈 式 刚

(应用物理与计算数学研究所)

1987 年 2 月 23 日收到

提 要

本文研究了标准映象的周期轨道在其余数 $R = 1$ 和 $R = 0$ 附近的行为, 对于前者出现倍周期分岔序列, 其分岔率 δ 及标度因子 α 和 β 与其它二维保面积映象的结果一致; 对于后者发生同周期分岔, 这与标准映象的奇对称性有关. 文中还计算了混沌轨道的李雅普诺夫指数, 发现在倍周期分岔序列的聚点 k_∞ 附近, 存在标度关系:

$$\lambda = \lambda_\infty + A(k - k_\infty) + B(k - k_\infty)^\tau,$$

其中因子 $\tau \approx 0.32$. 这与理论推断的结果 $\tau = \frac{\ln(2)}{\ln(\delta)}$ ($\delta = 8.7210972\dots$) 是一致的

一、引 言

通常标准映象的形式为

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + r_{n+1}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 r, θ 是作用-角度变量, 映象关于 θ 和 r 是周期的.

“标准映象”这个名词是 Chirikov 定的^[1]. 该映象是许多保守哈密顿系统的局部近似. Chirikov 本人正是用局部近似的方法导出标准映象的^[1]. 所以, 标准映象很典型, 有代表性. 它的许多性质对于哈密顿系统具有普适性. 该映象基本的动力学性质已由 Chirikov^[1] 和 Greene^[2] 等人研究过. 一般地, 这映象表现出三种类型的运动轨道: 周期轨道、KAM 环面和混沌轨道. 当 $k = 0$ 时, 这映象是可积的, 所有运动轨道都被限制在许多不变曲线上(实际上是许多直线). 对于小的 k 值 ($k \ll 1$), 前两种运动轨道在 (r, θ) 相平面上占优势^[1], 此时, 遍布整个 θ 范围 ($0 \leq \theta \leq 1$) 的 KAM 环面把 (r, θ) 相平面分成许多互不连通的区域, 使得在某一区域的轨道不能穿过作为其边界的 KAM 环面而进入另一区域. 这样, 运动在 r 方向是受到约束的. 可是, 当 $k > k_c = 0.9716$ 时^[1-3], 贯穿整个 θ 区域的最后一个 KAM 环面破裂, 在 r 方向混沌轨道就不再受限制. 在 $k =$

* 国家自然科学基金资助的课题.

k_c 处,这是最后和最“坚固”的具有转数 $W = (\sqrt{5} - 1)/2$ 的 KAM 环面分裂^[2],表明了整体的随机性开始. 在 $k \neq 1$ 时,相平面是规则轨道和混沌轨道错综复杂的混合^[2].

Schmidt 等人^[4,5]研究了任意小微扰仍存在的周期序列即 Farey 序列,讨论了该序列的椭圆不动点怎样向反演双曲点转变,进而说明周期岛链沉没在混沌海(或河)中. 类似于一维非线性映象及其它二维保面积映象的情况,在标准映象中应存在由周期分岔向混沌的过渡,周期轨道经过无穷多次分岔必然到达一个聚点 k_∞ ,使得当 k 大于 k_∞ 时,转变为混沌轨道,呈现随机性. 与最后的 KAM 曲线的破缺不同,通过周期的倍周期分叉达到混沌时,混沌轨道几乎充满了整个相空间. 本文研究了主要周期通过分叉达到混沌的情况. 我们还试图发现余数 $R = 0$ 处类似于二维非线性映象的切分岔现象,结果观察到同周期分岔.

李雅普诺夫指数是描述混沌轨道整体性质的特征量,因此,我们计算了李雅普诺夫指数随 k 的变化,讨论了倍周期分叉对它的影响.

正像一维单峰映象是耗散系统的局部近似一样,标准映象是哈密顿系统的最简单的局部近似,因此我们期望这些性质在哈密顿系统中有一定程度的普适性.

二、周期分岔及普适性

1. 倍周期分岔现象 这方面已经有很多讨论^[2,6-8]. 本文给出了标准映象的更多的数值结果. 我们是以(1)式的 De Vogelaere 形式^[6]来讨论的,并设周期为 $l \cdot 2^n$ 的轨道刚开始失稳并产生周期为 $l \cdot 2^{n+1}$ 的稳定轨道时的参数为 k_n (即分岔点).

数值计算结果列于表 1 中. 表 1 中 W 为转数,进而可给出倍周期序列分岔率 $\delta = 8.721096$,及标度变换因子 $\alpha = -4.018$ 和 $\beta = 16.36$,与别人研究的其它二次保面积映象的倍周期分岔序列所得结果是一致的.

2. 同周期分岔现象 这里讨论上一节中提到的倍周期分岔序列 $Q = 1 \cdot 2^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$): 对低周期轨道进行稳定性分析,可知周期 2 轨道的余数为

$$R = \frac{1}{4} [2k(\cos 2\pi\bar{\theta}_1 + \cos 2\pi\bar{\theta}_2) - k^2 \cos 2\pi\bar{\theta}_1 \cos 2\pi\bar{\theta}_2]. \quad (2)$$

周期 1 失稳后刚产生的周期 2 轨道满足关系式 $\bar{\theta}_2 = -\bar{\theta}_1$, $\bar{r}_1 = 2\bar{\theta}_1$, $\bar{r}_2 = 2\bar{\theta}_1$. 此时(2)式变为

$$R = k \cos 2\pi\bar{\theta}_1 - \frac{k^2}{4} \cos^2 2\pi\bar{\theta}_1. \quad (3)$$

可见, R 的大小取决于参数 k 及不动点坐标的分量 $\bar{\theta}_1$. (实际上 k 值一定则 $\bar{\theta}_1$ 便可确定.)

当 $k = k_0 = 4$ 时,显然由(3)式知: $R = 0$, 即周期 1 不动点 $(\bar{r}, \bar{\theta}) = (0, 0)$ 刚失稳(周期 2 轨道刚产生).

当 $4 < k < k_1$ ($k_1 = 5.0731177$) 时,由(3)式知 R 随 k 的增加而不断增大. 周期 2 轨道一直处于稳定状态.

当 $k = k_1$ 时,由(3)式知 $R = 1$. 周期 2 轨道失稳,开始出现稳定的周期 4 轨道.

表 1

a) 倍周期分岔序列 (b) 由周期 2 开始的两个并列的倍周期分岔序列-同周期分岔

n	$m = 1 \cdot 2^n$	k_n	$m = 2 \cdot 2^n$	k_n
0	1	4.000000000000	2	6.5938166189512
1	2	5.0731177277443	4	6.6301842789357
2	4	5.1788343614925	8	6.6343643593128
3	8	5.1884181371526	16	6.6348438079993
4	16	5.1895947125279	32	6.6348987855601
5	32	5.1897297061893	64	6.6349050895584
6	64	5.1897452018186	128	6.6349058124035
7	128	5.1897469786412	256	6.6349058952882
8	256	5.1897471823830	512	6.6349059047921
9	512	5.1897472057445		

(c) 由周期 2 开始的倍周期分岔的同周期序列 ($W = 1/2$)(d) 伴随周期 4 轨道的经同周期分岔的倍周期序列 ($W = 1/4$)

n	$m = 4 \cdot 2^n$	k_n	k_n
0	4	2.5308381116672	3.2257561572369
1	8	2.5371661974731	3.2364859453509
2	16	2.5378919674169	3.2377213162229
3	32	2.5379751979221	3.2378632314746
4	64	2.5379847415435	3.2378795052538
5	128	2.5379858358587	3.2378813713173
6	256	2.5379859613378	3.2378815852895
7	512	2.5379859757257	3.2378816098246

当 $k > k_c$ 时, 周期 4 轨道随着 k 的增大不断发生倍周期分岔。与此同时, 原周期 2 轨道的全数 R 随 k 的增加而减小, 即 $R < 1$, 这轨道又恢复稳定状态, 如图 1 所示。

当 $k = 2\pi$ 时, $R = 0$, 原周期 2 不动点失稳成为普通双曲点。

当 $k > 2\pi$ 时, 需满足关系: $\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_1 - \frac{1}{2}$, $\bar{r}_1 = \frac{1}{2}$, $\bar{r}_2 = -\frac{1}{2}$ 。这时(2)式变为

$$R = \frac{k^2}{4} \cos^2 2\pi\theta_1. \quad (4)$$

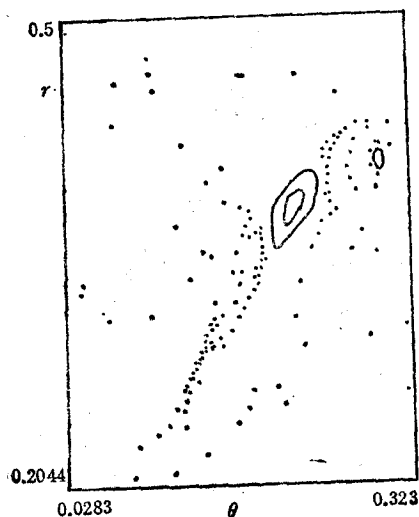


图 1

$k=5.13$ 图中中间的椭圆中心点就是一个周期 2 不动点, 它的右上方和左下方的两个小岛即为周期 4 轨道, 其中心分别为两个稳定不动点

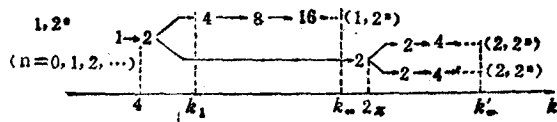
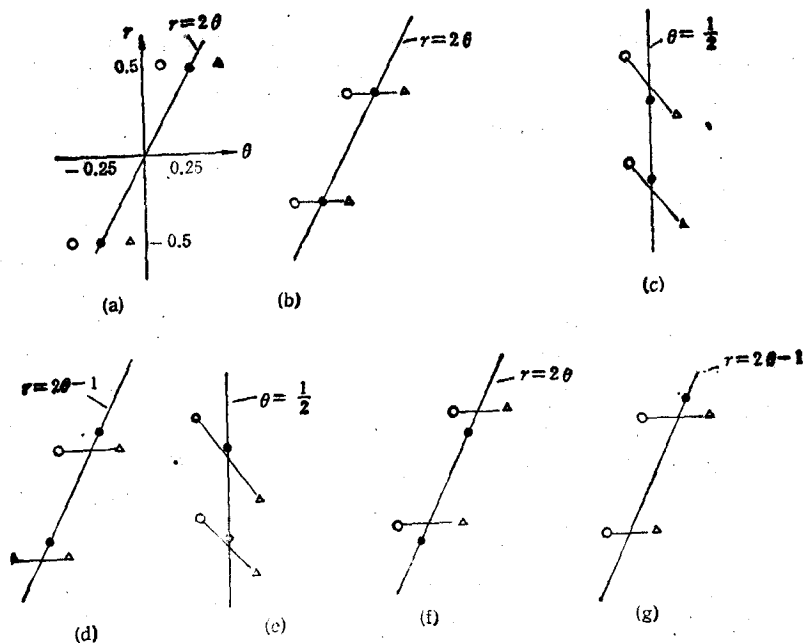


图 2



3

这时,原周期 2 轨道的对称性质 $(\bar{r}_1, \bar{\theta}_1) = (-\bar{r}_2, -\bar{\theta}_2)$ 已被破坏. 原周期 2 在 $k = 2\pi$ 时的不动点 $(0.5, 0.25)$ 在直线 $r = \frac{1}{2}$ 上左右分开出一对关于其对称的点: $(\frac{1}{2}, \bar{\theta}_1^{(1)})$, $(\frac{1}{2}, \bar{\theta}_1^{(2)})$. 同样,原周期 2 轨道的另一相应的不动点 $(-0.5, -0.25)$ 沿直线 $r = -\frac{1}{2}$ 上左右分开出一对关于其对称的点: $(-\frac{1}{2}, \bar{\theta}_2^{(1)})$, $(-\frac{1}{2}, \bar{\theta}_2^{(2)})$. 由原周期 2 轨道的这两个不动点分开出的这四个点,构成了两个新的周期 2 轨道,其一是 $(\frac{1}{2}, \bar{\theta}_1^{(1)})$ 和 $(-\frac{1}{2}, \bar{\theta}_2^{(1)})$, 其二是 $(\frac{1}{2}, \bar{\theta}_1^{(2)})$ 和 $(-\frac{1}{2}, \bar{\theta}_2^{(2)})$. 此即所谓“同周期分岔”现象,如图 2 所示. 并且注意到 $\bar{\theta}_1^{(1)} = -\bar{\theta}_2^{(2)}$, $\bar{\theta}_2^{(1)} = -\bar{\theta}_1^{(2)}$, 则这两个同周期轨道互相间是关于原点 $(0, 0)$ 对称的(见图 3(a)). 由原对称性的破缺及重新建立两个轨道之间的对称性可以说是同周期分岔的一种机制. 显然,这两个同周期轨道是同时产生同时失稳的.

对于标准映象,同周期分岔现象是普遍存在的. 表 2 列出了 7 种情况,第一种情况正是上面已分析过的,其余六种情况都可作类似的解释.

图 3 大体上表示这 7 种同周期分岔的简图. 图中对称线 $\theta = \frac{1}{2}$, $r = 2\theta$ 和 $r = 2\theta - 1$ 上用“·”表示的点是周期轨道在余数 $R = 0$ 刚要发生同周期分岔时的两个不动点,而“○”和“△”则表示发生同周期分岔后由点“·”离开对称线分出的一对点,它们分别属于两个同周期的不同轨道. 如果设点“·”的坐标为 (θ_c, r_c) , 而其附近的“○”与“△”的坐标分

表 2

序号	W	Q	k	R	说 明
1	1	1	4.000000000000	1	倍周期分岔 序 列 $Q = 1 \cdot 2^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\frac{1}{2}$	2	5.0731177277443	1	
	$\frac{1}{2}$	4	5.1788343614925	1	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$\frac{1}{2}$	2	6.2831853071796	0	同周期分岔开始
	$\frac{1}{2}$	2	6.5938166189512	1	倍周期分岔 序 列 $Q = 2 \cdot 2^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\frac{1}{2}$	4	6.6301842789357	1	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
2	1	1	2.000000000000	0.5	周期 4 开始产生
	$\frac{1}{4}$	4	2.779306920000	1	倍周期分岔 序 列 $Q = 4 \cdot 2^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\frac{1}{4}$	8	2.8206643646917	1	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$\frac{1}{4}$	4	3.1415926535898	0	同周期分岔开始
	$\frac{1}{4}$	4	3.2257561572369	1	倍周期分岔 序 列 $Q = 4 \cdot 2^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\frac{1}{4}$	8	3.2364859453509	1	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
3	$\frac{1}{2}$	2	2.000000000000	1	倍周期分岔 序 列 $Q = 2 \cdot 2^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\frac{1}{2}$	4	2.2438711780000	1	
	$\frac{1}{2}$	8	2.2637273324629	1	
	$\frac{1}{2}$	16	2.2656334549204	1	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$\frac{1}{2}$	4	2.4761021509392	0	同周期分岔开始

表 2(续)

序号	W	Q	k	R	说 明
3	$\frac{1}{2}$	4	2.5308381116672	1	倍周期分岔 序 列 $Q = 4 \cdot 2^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\frac{1}{2}$	8	2.5371661974731	1	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
4	$\frac{1}{3}$	3	1.5175481585463	1	倍周期分岔 序 列 $Q = 3 \cdot 2^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\frac{1}{3}$	6	1.6266714973424	1	
	$\frac{1}{3}$	12	1.6492800506462	1	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$\frac{1}{3}$	6	1.7510103179193	0	同周期分岔开始
	$\frac{1}{3}$	6	1.7765033375136	1	倍周期分岔 序 列 $Q = 6 \cdot 2^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\frac{1}{3}$	12	1.7794393051854	1	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
5	$\frac{1}{4}$	4	1.2397307940428	1	倍周期分岔 序 列 $Q = 4 \cdot 2^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\frac{1}{4}$	8	1.3024762318005	1	
	$\frac{1}{4}$	16	1.3232372918461	1	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$\frac{1}{4}$	8	1.3859754937337	0	同周期分岔开始
	$\frac{1}{4}$	8	1.4014066669590	1	倍周期分岔序列 $Q = 8 \cdot 2^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
6	$\frac{2}{5}$	5	1.2855842936824	1	倍周期分岔 序 列 $Q = 5 \cdot 2^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\frac{2}{5}$	10	1.3433065940373	1	
	$\frac{2}{5}$	20	1.3493732917998	1	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

表 2(续)

序号	w	Q	k	R	说 明
6	$\frac{2}{5}$	10	1.3971343415888	0	同周期分岔开始
	$\frac{2}{5}$	10	1.4089640664169	1	倍周期分岔 序 列 $Q = 10 \cdot 2^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\frac{2}{5}$	20	1.4103214826964	1	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
7	$\frac{1}{5}$	5	1.0479386253912	1	倍周期分岔 序 列 $Q = 5 \cdot 2^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\frac{1}{5}$	10	1.0896180777433	1	
	$\frac{1}{5}$	20	1.1071317375828	1	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$\frac{1}{5}$	10	1.1505461366975	0	同周期分岔开始
	$\frac{1}{5}$	10	1.1611243210623	1	倍周期分岔 序 列 $Q = 10 \cdot 2^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\frac{1}{5}$	20	1.1623402183062	1	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

别为 $(\bar{\theta}_1, \bar{r}_1)$ 和 $(\bar{\theta}_2, \bar{r}_2)$, 并且 (θ_0, r_0) 为“0”和“ Δ ”连线与对称线交点的坐标, 我们定义 $d_1 = \theta_0 - \bar{\theta}_1$, $d_2 = \bar{\theta}_2 - \theta_0$, 那么, 计算结果表明 $d_1 = d_2 = d$, 即 $\bar{\theta}_{1,2} = \theta_0 \mp d$. 这样可把这 7 种情况归为两大类: 第一类是 $\theta_0 = \theta_c$, 亦即 $\bar{\theta}_{1,2} = \theta_c \mp d$, 如图 3 (a) — (c), (e). 第二类是 $\theta_0 \neq \theta_c$, 亦即 $\bar{\theta}_{1,2} = \theta_c^* \mp d$, 或 $\bar{\theta}_{1,2} = \theta_c^- \mp d$, $\theta_c^* \geq \theta_c$, $\theta_c^- \leq \theta_c$. 点 (θ_c, r_c) , (θ_c^*, r_c^*) 和 (θ_c^-, r_c^-) 均在对称线上. 事实上通过坐标变换均可化为 $\bar{\theta}_{1,2} = \theta_c \mp d$ 一种形式. 这样的分类实际上已包括了所有情况.

由图 3 亦可见: (1) 发生同周期分岔的周期轨道在相应的对称线上有且仅有两个不动点, 如 (θ_{1c}, r_{1c}) 和 (θ_{2c}, r_{2c}) . (2) 重新建立起新的两同周期轨道间的对称结构: $d_1 = d_2 = d$.

三、李雅普诺夫指数及其标度律

我们还对标准映象 $k > 0.9716354$ 时的单混沌轨道的李雅普诺夫指数 λ 进行了计算, 并考虑了倍周期分岔序列 $1 \cdot 2^n$ 聚点 k_∞ 附近混沌轨道的性质, 计算时在与 k_∞ 相应的一周期点 $(\bar{\theta}_\infty, \bar{r}_\infty)$ 的邻域取初值, 发现轨道先在周期点附近运动一段时间, 后跑到整个

表 3

倍周期分岔序列	聚 点 k_{∞}	λ_{∞}	A	B	τ
$Q = 1 \cdot 2^n$	5.189747205744466	1.00012	0.1503	0.0143	0.323
$Q = 2 \cdot 2^n$	6.634905904792144	1.2192	0.2023	0.0258	0.319
$Q = 4 \cdot 2^n$	2.53798597572545	0.53833	0.628455	0.01837	0.3204

相平面上去,经过足够长的时间后,轨道会重新回到周期点的邻域。计算所得的相平面图及 λ - k 图与文献[11]一致,这里不再赘述。在这基础上我们仔细分析了倍周期分叉对 λ - k 曲线的影响。在 k_{∞} 附近,混沌轨道的 λ 随 k 的变化较大,呈非线性,我们可把混沌轨道对 λ 的贡献分为两部份: 其一是远离由倍周期分叉产生的所有不稳定周期点的那部分运动轨道对 λ 的贡献,记为 λ_A ; 其二是在这些不稳定周期点附近的运动轨道对 λ 的贡献,记为 λ_B , 结果: $\lambda = \lambda_A + \lambda_B$, 进一步分析可得

$$\lambda_A = \lambda_{\infty} + A(k - k_{\infty}), \lambda_B = B(k - k_{\infty})^{\tau},$$

其中 λ_{∞} 为 $k = k_{\infty}$ 时混沌轨道的李雅普诺夫指数; A, B 均为比例常数; τ 为标度因子。 A 由 $k \lesssim k_{\infty}$ 处的斜率确定, B, τ 由 $k \gtrsim k_{\infty}$ 处的数据确定。

我们取 $(k - k_{\infty})$ 变化的步长为 0.0012, 迭代次数是 10^6 , 计算了 30 组 (λ, k) , 得到表 3。由表 3 可见, 三种情况下的 τ 是十分接近的。不同倍周期聚点邻域 τ 的一致性说明它们对 λ 的贡献存在一个普适的机制。借助于一维单峰映象的图像, 可以想像在 k_{∞} 之上倍周期区轨道点的分布是分成 2^n 个密集区的。随 k 的增加, 它们将合并为 2^{n-1} 个, 2^{n-2} 个, …… 因此, 与一维单峰映象相同^[9,10], 可得 $\tau = \ln 2 / \ln \delta$, 其中倍周期分叉率 $\delta = 8.7210972^{[6]}$, 所以 $\tau = 0.320050219$ 。 τ 的计算值与上述理论值的一致, 表明 k_{∞} 附近存在混沌流的普适标度性质。

参 考 文 献

- [1] B. V. Chirikov, *Phys. Rep.*, **52**(1979), 263.
- [2] J. M. Greene, *J. Math. Phys.*, **20**(1979), 1183.
- [3] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, ed. by F. John et al., Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, (1983).
- [4] G. Schmidt, *Phys. Rev.*, **22A**(1980), 2849.
- [5] G. Schmidt, *Physica*, **5D**(1982), 397.
- [6] J. M. Greene, R. S. Mackay, F. Vivaldi and M. J. Feigenbaum, *Physica*, **3D**(1981), 468.
- [7] K.-C. Lee, S.-Y. Kim and D.-I. Choi, *Phys. Lett.*, **103A**(1984), 225.
- [8] Koo-Chul Lee, Private Communication.
- [9] B. A. Huberman and J. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1980), 154.
- [10] J. P. Crutchfield et al., *Phys. Rep.*, **92**(1982), 47.
- [11] P. Grassberger and H. Kantz, *Phys. Lett.*, **113A**(1985), 167.

PERIOD BIFURCATIONS OF THE STANDARD MAPPING AND THE TRANSITIONS FROM THEM TO CHAOS

LIU JUN-XIAN CHEN GUANG-ZHI

(Guangxi Normal University, Guilin)

WANG GUANG-RUI CHEN SHI-GANG

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing)

ABSTRACT

The behavior of periodic orbits of the standard mapping near their residues $R=1$ and $R=0$ is studied. There is a sequence of period doubling bifurcations corresponding to the former, the bifurcation ratio δ and scaling factors α and β agree with those obtained from other two-dimensional area-preserving mappings. There are same period bifurcations corresponding to the latter, which is related to the antisymmetric nature of the standard mapping. Moreover, by calculating Lyapunov exponents of chaotic orbits, we have found near the accumulation point k_∞ of a sequence of period doubling bifurcations a scaling relation $\lambda = \lambda_\infty + A(k - k_\infty) + B(k - k_\infty)^2$ with $\tau \approx 0.32$, it agrees with the result $\tau = \ln(2)/\ln(\delta)$ ($\delta = 8.7210972 \dots$) conjectured theoretically.