

强碰撞下的漂移波稳定性*

柯孚久

(北京航空学院应用数理系)

蔡诗东

(中国科学院物理研究所)

陈 骝

(美国普林斯顿大学等离子体物理实验室)

张 承 福

(北京大学物理系)

祁 祥 麟

(北京航空学院应用数理系)

1987年8月31日收到

在碰撞存在时,考虑到在扰动电场作用下电子沿磁力线的宏观运动,用迴旋动力技术导出
了强碰撞的积分本征方程。随后用 LCN 方法严格解析地证明了在平板剪切磁场的作用下,漂
移波是绝对稳定的。

一、引 言

由于漂移波被认为与反常输运有紧密的联系,所以 60 年代以来,许多科学家投入了
对它的研究。早在 60 年代, Frieman, Coppi 和 Rutherford 等人认为无本征模,不稳定
性是对流型的。1969 年 Pearlstein 和 Berk^[1] 首次正确指出有本征模,但却得出平板
剪切磁场位形下的漂移波是绝对不稳定的错误结论。直到 1978 年 Ross^[2], 陈骝等^[3], Ts-
ang 等人^[4]才纠正了这一错误。其后 Antonsen^[5] 陈骝^[6]、李一群^[7]等人讨论了在微分方
程近似下,平板漂移波的绝对稳定性问题。随着聚变等离子体温度的不断提高,参数
 $|k_{\perp}\rho_i|$ 从远小于 1 逐渐扩展到了 1 的数量级(这里 $k_{\perp}$ 为漂移波垂直于磁场方向的波矢,
 ρ_i 为离子拉莫尔半径),此时必须要用积分本征方程才能正确描述漂移波的行为。1981
至 1982 年,陈骝等人^[8,9]用迴旋动力技术重新推导出了低频、无碰撞平板漂移波的积分本
征方程,并严格、解析地证明了此种情形下漂移波的绝对稳定性。

本文则进一步将无碰撞情形扩展到有强碰撞的情形,在离子质量与电子质量之比定
标为无穷大时,推出了非 WKB 近似下的普遍积分本征方程。

随后,我们采用 LCN^[8] 中所采用的反证法,即不求出 ω_i (频率的虚部)的具体值,仅

* 国家自然科学基金资助的课题。

从 ω_i 的符号来进行判断。先假设本征模不稳定或者是处于临界稳定状态,经过一系列的推理和运算,结果证明在此假设下得到的本征模只能是非物理解,从而推翻了本征模不稳定或者临界稳定的假设。

二、本征积分方程的推导

在平板剪切磁场位形下,考虑

$$\nu_{ii}, \nu_{ie} \ll \omega \ll \nu_{ei}, \nu_{ee}$$

的频率范围(其中 ω 为漂移波的频率),并只考虑电子与电子,电子与离子之间的碰撞。在漂移波的作用下,电子可有沿磁力线的宏观运动,即 $u_{\parallel e}^{(1)} \neq 0$ 。而假设离子质量与电子质量之比定标为无穷大,即 $u_{\parallel i}^{(1)} = 0$ 。离子可处理为无碰撞,但考虑了离子温度效应 $|k_{\perp} \rho_i| \approx O(1)$ 。本文只讨论低频漂移波 $|\omega| \ll \Omega_i$ (Ω_i 为离子回旋频率)。

由文献[6]方程(2.4)可知,必须定标 $\omega \nu_{ei} / (k_{\parallel} \nu_{ie})^2 \approx O(1)$ 。此条件意味着碰撞效应重要,否则此项被略掉,就回到无碰撞方程。而强碰撞意味着 $k_{\parallel} \nu_{\parallel} / \nu_{ei} \approx O(\varepsilon)$ 。从这两个定标可推出 $\omega / \nu_{ei} \approx O(\varepsilon^2)$ 。

推导无电子温度梯度 ($\nabla T_e = 0$) 时的本征积分方程。

1. 电子部分

电子扰动密度为

$$\delta n^e(x) = \delta n_i^e(x) + \delta n_{\parallel i}^e(x), \quad (1)$$

其中 $\delta n_i^e(x) = -\frac{q_e}{T_e} \delta \phi(x)$ 为绝热部分的贡献, $\delta n_{\parallel i}^e(x)$ 为非绝热部分的贡献。从动力论方程出发,可以推出

$$(k_{\parallel} \nu_{\parallel} - \omega) \delta \hat{H}_e = -ic(\delta \hat{H}_e) - \frac{q_e}{T_e} \langle \delta \hat{\phi} \rangle (\omega - \omega_{*e}) \hat{F}_{0e}, \quad (2)$$

其中 $c(\delta \hat{H}_e)$ 为碰撞项, ω_{*e} 为电子逆磁漂移频率,“ $\wedge$ ”表示在引导中心参考系上观察物理量。将方程(2)按 ε 阶数展开,有

$$\varepsilon^0 \text{ 级: } -ic(\delta \hat{H}_e) = 0,$$

可推出

$$\delta \hat{H}_e^{(0)} = \frac{\delta n_{\parallel i}^{(0)}}{n_0} \hat{F}_{0e}.$$

$$\varepsilon^1 \text{ 级: } k_{\parallel} \nu_{\parallel} \delta \hat{H}_e^{(1)} = -ic(\delta \hat{H}_e^{(1)}), \quad (3)$$

上式两边同乘以 $\nu_{\parallel}$, 然后在速度空间积分,并取 $u_{\parallel i}^{(1)} = 0$, 有

$$\frac{T_e}{m_e} k_{\parallel} \delta n_{\parallel i}^{(0)} = i \nu_{ei} n_0 u_{\parallel e}^{(1)}. \quad (4)$$

$$\varepsilon^2 \text{ 级: } k_{\parallel} \nu_{\parallel} \delta \hat{H}_e^{(2)} - \omega \delta \hat{H}_e^{(0)} = -ic(\delta \hat{H}_e^{(2)}) - \frac{q_e}{T_e} \langle \delta \hat{\phi} \rangle (\omega - \omega_{*e}) \hat{F}_{0e}.$$

在对两边作速度积分后,有

$$k_{\parallel} u_{\parallel}^{(1)} n_0 - \omega \delta \hat{n}_{\parallel}^{(0)} = - \frac{q_e}{T_e} \langle \delta \hat{\phi} \rangle (\omega - \omega_{*e}) n_0. \quad (5)$$

从(3)–(5)式可推出

$$\delta \hat{n}_{\parallel}^e(x) = \delta n_{\parallel}^e(x) = \frac{i \nu n_0 \frac{q_e}{T_e} \delta \phi(x) (\omega - \omega_{*e})}{- \frac{T_e}{m_e} k_{\parallel}^2 + i \nu_{ei} \omega}. \quad (6)$$

2. 离子部分

从文献[9]的(12)式可知

$$\delta \bar{H}_i(k) = - \frac{q_i}{T_i} (\omega + \omega_{*i}) F_{0i} \int dk' (\overline{k_{\parallel} v_{\parallel}} - \omega)^{-1} (k - k') \delta \bar{\phi}(k') J_0 \left(\frac{k'_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_i} \right).$$

又从文献[9]的(10)式与(13)式可推出

$$\frac{\delta \bar{n}_i(k)}{n_0} = - \frac{q_i}{T_i} \delta \phi(k) - \frac{q_i}{T_i} \left(1 + \frac{\omega_{*i}}{\omega} \right) \int dk' \delta \phi(k') \bar{F}_{0i}(k, k') \bar{\xi}_{iz_i}(k, k'). \quad (7)$$

对(7)式作逆傅里叶变换, 有

$$\begin{aligned} \frac{\delta n_i(x)}{n_0} = & - \frac{q_i}{T_i} \delta \phi(x) - \frac{q_i}{T_i} \left(1 + \frac{\omega_{*i}}{\omega} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} [\xi_{iz_i}(x)]^{(n)} \\ & \cdot F_n \left(-i \frac{d}{dx}, x \right) \delta \phi(x). \end{aligned} \quad (8)$$

由方程(1), (6), (8), 用准中性条件, 推出积分本征方程为

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} (1 + i \bar{p} x^2) [\xi_{iz_i}(x)]^{(n)} F_n \left(-i \frac{d}{dx}, x \right) \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{1+\tau}{\tau + \frac{1}{Q}} i \bar{p} x^2 \right) \right\} \delta \phi(x) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\bar{p} = \frac{1}{2} (k'_{\perp} v_{\perp})^2 / (\omega \nu_{ei})$.

如果取小拉莫尔半径近似(即 $|k_{\perp} \rho_i| \ll 1$) 和冷离子极限, 方程(9)就可退到文献[6]中的本征微分方程.

三、解析地证明本征方程(9)的解绝对稳定

在文献[9]中已经证明了在电子绝热极限下无碰撞的积分本征方程

$$\left\{ \left(\tau + \frac{1}{Q} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} [\xi_{iz_i}(x)]^{(n)} F_n \left(-i \frac{d}{dx}, x \right) + 1 + \tau \right\} \delta \phi(x) = 0 \quad (10)$$

的解是绝对稳定的. 为了将方程(10)与(9)联系起来, 首先构造一个人为的积分方程

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\frac{\lambda}{\bar{p}} + i x^2 \right) [\xi_{iz_i}(x)]^{(n)} F_n \left(-i \frac{d}{dx}, x \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{\bar{p}} + \frac{1+\tau}{\tau + \frac{1}{Q}} i x^2 \right\} \delta\phi(x) = 0, \quad (11)$$

其中人为参量 λ 可在零到 1 之间连续取值。当 $\lambda = 0$ 时, 方程(11)就回到方程(10); 而当 $\lambda = 1$ 时, 方程(11)就变成本文的待证的本征方程(9)。这样 λ 就将两种极限情形光滑地连结起来了。

1. 证明当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时, 方程(11)并不比方程(10)增加不稳定的增根。

这意味要证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{\bar{p}} = 0$$

或

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda Q(\lambda) = 0.$$

这里 $Q = \omega/\omega_{*c}$ 。

采用反证法来进行证明。假设当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时, $\lambda Q(\lambda)$ 不趋于零, 则重新定标如下:

$$\lambda Q(\lambda) \approx \lambda^{-\delta}, \quad \delta \geq 0.$$

先讨论 $\delta > 0$ 的情形。对 Q 及 x 有如下重新定标的表达式:

$$Q(\lambda) = \tilde{Q} \lambda^{-(1+\delta)} \quad \delta > 0,$$

$$x(\lambda) = \lambda^\beta t \quad -\infty < \beta < \infty.$$

此外

$$\frac{\lambda}{\bar{p}} = \tilde{v} \tilde{Q} / \lambda^\delta, \quad \xi_i = \frac{\tilde{Q} x_i}{t} / \lambda^{1+\delta+\beta},$$

其中 $\tilde{v} = 2\nu_{ci}\omega_{*c}/(k'_\parallel v_{te})^2$ 。

下面根据 β 的不同取值范围分别进行讨论:

(1) $\beta > 0$ 此时 $\xi_i \rightarrow \infty$, 方程(11)变成

$$\left\{ (\tilde{v} \tilde{Q} + i t^2 \lambda^{\delta+2\beta}) \frac{i t}{(\tilde{Q} x_i)^2} \lambda^{2(1+\delta)+\beta} F_1 + (\tilde{v} \tilde{Q} + i t^2 \lambda^{\delta+2\beta}) \frac{1}{(\tilde{Q} x_i)^2} \right. \\ \left. \cdot \lambda^{2(1+\delta)} F_2 + \tilde{v} \tilde{Q} (1 - \tilde{\Gamma}_{0i}) + i t^2 \lambda^{\delta+2\beta} \left[1 + \frac{1}{\tau} - \tilde{\Gamma}_{0i} - \frac{t^2}{2(\tilde{Q} x_i)^2} \lambda^{2(1+\delta+\beta)} \tilde{\Gamma}_{0i} \right] \right\} \\ \cdot \delta\phi(t) = 0. \quad (12)$$

最后化简为

$$\left[1 - \tilde{\Gamma}_{0i} \left(-i \frac{d}{dt} \right) \right] \delta\phi(t) = 0. \quad (13)$$

作傅里叶变换, 有

$$[1 - \tilde{\Gamma}_{0i}(ik)] \delta\phi(k) = 0.$$

因为 $0 \leq 1 - \tilde{\Gamma}_{0i}(ik) \leq 1$, 所以要上式成立, 只能 $\delta\phi(k) \equiv 0$ 。这是一个平庸解, 说明在 $\beta > 0$ 的参数范围内, 当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时 $\lambda Q(\lambda)$ 不趋于零的假设不成立。

(2) $-(1+\delta) < \beta < 0$ 总的方程同(12)式, 须分三个区间讨论

(1) 当 $-(2+\delta) < \delta + 2\beta < 0$ 时, (12)式化为

$$\left[1 + \frac{1}{\tau} - \tilde{f}_{0i} \left(-i \frac{d}{dt}\right)\right] \delta\phi(t) = 0. \quad (14)$$

因为 $1 + \frac{1}{\tau} - \tilde{f}_{0i}(ik) \geq 0$, 故只有 $\delta\phi(k) \equiv 0$ 的平庸解。

2) 当 $0 < \delta + 2\beta < \delta$ 时, (12) 式化为 (13) 式, 只有平庸解。

3) 当 $\delta + 2\beta = 0$ 时, (12) 式化为

$$\left\{ \tilde{v} \tilde{Q} \left[1 - \tilde{f}_{0i} \left(-i \frac{d}{dt}\right)\right] + i t^2 \left[1 + \frac{1}{\tau} - \tilde{f}_{0i}\right] \right\} \delta\phi(t) = 0. \quad (15)$$

用 $\int_{-\infty}^{\infty} dt \delta\phi^*(t)$ 乘上式, 并作傅里叶变换, 得到

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dk \left\{ \tilde{v} \tilde{Q} [1 - \tilde{f}_{0i}(ik)] |\delta\phi(k)|^2 + i \left[1 + \frac{1}{\tau} - \tilde{f}_{0i}(ik)\right] |\delta\phi'(k)|^2 \right. \\ & \quad + \frac{i}{2} \tilde{f}_{0i}''(ik) |\delta\phi(k)|^2 - \frac{i}{2} [\delta\phi''(k) \tilde{f}_{0i} \delta\phi^*(k) \\ & \quad \left. - (\delta\phi''(k) \tilde{f}_{0i} \delta\phi^*(k))^* \right\} = 0. \end{aligned}$$

取其虚部为

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \left[1 + \frac{1}{\tau} - \tilde{f}_{0i}(ik)\right] |\delta\phi'(k)|^2 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}_{0i}''(ik) |\delta\phi(k)|^2 = 0.$$

因为 $\tilde{f}_{0i}''(ik) = \frac{1}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2} \int_{-1}^1 (1-s^2)^{-\frac{3}{2}} e^{-k(1+s)} (1+s)^2 ds \geq 0$, 故只有 $\delta\phi(k) \equiv 0$ 及

$\delta\phi'(k) \equiv 0$,

又推翻了当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时 $\lambda Q(\lambda)$ 不趋于零的假设。

(3) $\beta < -(1 + \delta)$ 此时 $\xi_i \rightarrow 0$, 方程 (11) 变成

$$\begin{aligned} & \left\{ \tilde{v} \tilde{Q}^2 \sqrt{\pi} x_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{t^{n+1}} \lambda^{-1+\delta+(n+1)\beta} F_n + \sqrt{\pi} \tilde{Q} x_i t^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n+2}}{t^{n+1}} \right. \\ & \quad \cdot \lambda^{-1+(n-1)\beta} F_n + \tilde{v} \tilde{Q} \left[1 + i \sqrt{\pi} \frac{\tilde{Q} x_i}{t} \lambda^{-(1+\delta+\beta)} \tilde{f}_{0i}\right] \\ & \quad \left. - \sqrt{\pi} \tilde{Q} x_i t \lambda^{\beta-1} \tilde{f}_{0i} + i t^2 \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) \lambda^{\delta+2\beta} \right\} \delta\phi(t) = 0. \end{aligned}$$

最终化为

$$i \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) t^2 \lambda^{2\beta+\delta} \delta\phi(t) = 0.$$

因为 $\lambda^{2\beta+\delta} \rightarrow \infty$, 要上式成立, 只有 $\delta\phi(t) \equiv 0$ 。

(4) $\beta = 0$ 最终结果同 (13) 式。

(5) $\beta = -(1 + \delta)$ 此时 $\xi_i z_i(t)$ 为有限函数, 方程 (11) 变为

$$\left\{ \tilde{v} \tilde{Q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left[\frac{d^n}{dt^n} \xi_i z_i(t) \right] \lambda^{-n\beta} F_n + i t^2 \lambda^{\delta+2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \right.$$

$$\cdot \left[\frac{d^n}{dt^n} \xi_i z_i(t) \right] \lambda^{-n\beta} F_n + \tilde{v} \tilde{Q} [1 + \xi_i z_i(t) \tilde{f}_{0i}] \\ + i t^2 \lambda^{\delta+2\beta} \left(\xi_i z_i \tilde{f}_{0i} + 1 + \frac{1}{\tau} \right) \delta\phi(t) = 0.$$

上式可以化为

$$\left[\left(\tau + \frac{1}{Q} \right) \xi_i z_i(t) \tilde{f}_{0i} + 1 + \tau \right] \delta\phi(t) = 0.$$

此即方程(10),在文献[9]中已证其解绝对稳定.

随后,对于 $\delta = 0$ 的情形,除了上述情形(2)中仅存 $-1 < \beta < 0$ 的区间,相应方程同(14)式;情形(4)中方程同方程(15)外,其余各种情形与相应的 $\delta > 0$ 的最终方程完全一样.

以上证明推翻了 $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda Q(\lambda) \neq 0$ 的假设,只可能是 $\lambda Q(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} 0$,这就证明了方程(11)并不比方程(10)增加不稳定的增根.

2. 证明无 Q 为无穷大的根

当 λ 从零到 1 连续变化时,即从方程(10)的解向方程(9)的解连续变化时,要证明这些解不可能通过无穷远点从下半 Q 平面进入上半 Q 平面. 仍采用反证法,没有 Q 为无穷大的根,重新定标

$$x = |Q|^\beta t \quad -\infty < \beta < \infty$$

类似于步骤 1 中的作法,最后得到.

(1) $\beta > 1$ 时,

$$i \left(1 + \frac{1}{\tau} \right) Q^{2\beta-1} t^2 \delta\phi(t) = 0.$$

因为 $Q^{2\beta-1} \rightarrow \infty$, 故只有 $\delta\phi(t) \equiv 0$ 的平庸解.

(2) $0 < \beta < 1$ 时,有

$$i t^2 \left(1 + \frac{1}{\tau} - \tilde{f}_{0i} \right) Q^{2(1+\beta)} \delta\phi(t) = 0.$$

因为 $Q^{2(1+\beta)} \rightarrow \infty$, 故只有平庸解.

(3) $\beta \leq 0$ 时,有

$$\lambda \tilde{v} (1 - \tilde{f}_{0i}) Q^2 \delta\phi(t) = 0.$$

因为 $Q^2 \rightarrow \infty$, 亦只有平庸解.

(4) $\beta = 1$ 时,得到方程(10),已证其解绝对稳定.

这样,证明了 $Q = \infty$ 的假设是不成立的.

3. 证明无 $\text{Im } Q = 0$ 的临界解

要证明当 λ 从零到 1 连续变化时,从方程(9)的稳定解出发连续变化的一系列解不可能穿越 Q 平面的实轴到达上半平面,最终 $\lambda = 1$ 时,解仍留在 Q 下半平面内. 仍采用反证法,假设 $Q = \text{Re } Q$ 的根存在. 首先将方程(11)解析延拓到复平面上,考察 $|x| \rightarrow \infty$ 时 $\delta\phi(x)$ 的渐近行为. 此时仅 $\text{Re } b_i(x) < 0$ 有意义,采用类似文献[9]中的办法,可求出渐近的反斯托克斯线方程为

$$\arg(x) = \pm \left[\frac{\pi}{2} + O(\pi/\ln|\alpha x|) \right],$$

其中 $\alpha = (1 + \tau)/[\sqrt{\pi} x_i(1 + Q\tau)]$. 当 $\operatorname{Re} x \geq 0$ 时, sub-dominant 区域的边界线分别为

$$\arg(x) = \frac{\pi}{2} - O(\pi/\ln|\alpha x|)$$

和

$$\arg(x) = -\frac{\pi}{2} + O(\pi/\ln|\alpha x|).$$

可见虚轴并不与渐近反斯托克斯线重合, 即不能采用通量守恒的办法, 而须采用构造平方和的办法来证明 $\delta\phi(x)$ 只能是平庸解.

将复变量 x 用实变量 η 来表示,

$$\begin{aligned} x &= -is_\alpha \int_0^\eta d\eta' e^{is_\alpha\theta(\eta')} \\ &= -is_\alpha\eta + \eta_1. \end{aligned} \quad (16)$$

这里 $s_\alpha = s_{gn}\left(\tau + \frac{1}{Q}\right)$, $\eta_1 = \int_0^\eta \theta(\eta') d\eta'$, $\theta(\eta)$ 为一个非负的光滑函数, 其性质为

$$\begin{cases} \theta(\eta) \xrightarrow{|\eta| \rightarrow 0} 0, \\ \theta(\eta) \xrightarrow{|\eta| \rightarrow \infty} \theta_0, \end{cases}$$

其中 θ_0 为一个很小、但有限的常数. 变换(16)式保证了 η 轴末端在 sub-dominant 区域内.

把(16)式代入(11)式, 注意到 $\theta(\eta) \ll 1$, 其零级方程为

$$\left\{ \left(\frac{\lambda}{\tilde{p}} - i\eta^2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n!} [g_i(\eta)]^{(n)} F_n\left(\frac{d}{d\eta}\right) + \frac{\lambda}{\tilde{p}} - \frac{1+\tau}{\tau + \frac{1}{Q}} i\eta^2 \right\} \delta\phi(\eta) = 0, \quad (17)$$

可化为

$$\left\{ \sigma_0\left(\frac{d}{d\eta}, \eta\right) + Q_0 + iQ_1 \right\} \delta\phi(\eta) = 0, \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma_0\left(\frac{d}{d\eta}, \eta\right) &= -\sum_{n=0}^{\infty} [g_i(\eta)]^{(n)} \frac{1}{n!} F_n\left(\frac{d}{d\eta}\right), \\ g_i(\eta) &= \sqrt{\pi} \xi_i e^{\xi_i^2} \operatorname{erfc}(\xi_i), \quad \xi_i = Qs_\alpha x_i/|\eta|, \\ Q_0 &= 1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{Q}\right) \tilde{p}^2 \eta^4}{\left(\tau + \frac{1}{Q}\right) (\lambda^2 + \tilde{p}^2 \eta^4)}, \quad Q_1 = \frac{\left(\frac{1}{Q} - 1\right) \lambda \tilde{p} \eta^2}{\left(\tau + \frac{1}{Q}\right) (\lambda^2 + \tilde{p}^2 \eta^4)}. \end{aligned}$$

(18)式各项同乘 $\int_{-\infty}^{\infty} d\eta \delta\phi^*(\eta)$ 得到

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \delta\phi^*(\eta) \sigma_0 \left(\frac{d}{d\eta}, \eta \right) \delta\phi(\eta) + \int_{-\infty}^{\infty} d\eta Q_r |\delta\phi(\eta)|^2 + i \int_{-\infty}^{\infty} d\eta Q_i |\delta\phi(\eta)|^2 \right\} = 0. \quad (19)$$

在文献[9]中已证方程(19)等号左边第一项是实数,而 Q_r 和 Q_i 皆为实函数,所以取方程(19)的虚部为

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{\eta^2}{\lambda^2 + \bar{p}^2 \eta^4} |\delta\phi(\eta)|^2 = 0.$$

由于被积函数是非负的,所以要上式成立必须

$$\delta\phi(\eta) \equiv 0.$$

这样就证明了本征方程(11)不可能有临界稳定的本征解存在。

综合以上三部份证明可知,当 λ 稍比零大一点时,人为方程(11)并不比基础方程(10)增加不稳定的增根。而且当 λ 从零到 1 连续变化时,从方程(10)的稳定本征根开始连续变化的根既不能通过无穷远点进入上半 ω 平面,又不能穿越实 ω 轴进入上半平面,最终只能始终留在下半平面,这就证明了本征方程(9)描述的本征模只能是衰减模。

四、讨 论

本文只讨论了强碰撞 ($\nu_{ei} \gg \omega$) 情形下,平板剪切磁场位形下漂移波的绝对稳定性,而文献[9]中则给出了无碰撞情形下的漂移波稳定性讨论,对于中等碰撞情形尚待讨论。

本文中,强碰撞效应使阻尼效应更强,从而在从 λ 空间变换到 η 空间时,相应的本征方程只要考虑零级方程(19)就可证明无临界稳定本征模。而在文献[9]所考虑无碰撞情形,相应的零级方程为实数,必须要考虑一级方程才贡献阻尼效应,这种阻尼效应显然比本文所考虑的阻尼要弱。

本文定标 $m_i/m_e \rightarrow \infty$, 即 $u_{pi}^0 = 0$, 使证明过程有所简化。倘若更严格地做,应考虑电子加离子总动量守恒,即离子也应考虑为有碰撞,这样在处理离子碰撞项时会使问题大大复杂。

本文仅证明了无电子温度梯度时的漂移本征模绝对稳定。对于有电子温度梯度的情形,文献[6]中,陈骝等人已证明了在 $T_i \rightarrow 0$ 的极限情形下, $\nabla T_e \approx 0$ 并不改变漂移本征模的绝对稳定性。我们设想从 Braginskii 方程^[12]出发,亦可推出 $\nabla T_e \approx 0$ 的本征方程,并进一步证明此时的本征模绝对稳定。

从本文结果再次看出,在平板剪切磁场中,由于剪切存在产生的剪切阻尼使波能外流,而碰撞使阻尼效应进一步加强,从而起稳定作用。

本文及文献[9]只讨论了静电漂移波的稳定性问题,还可以将此扩展去证明电磁漂移波的稳定性。近年来,陈骝和蔡诗东把低频的迴旋动力技术推广到了高频的情形^[10,11]。亦可考虑用 LCN 方法去进行讨论。

本工作得到等离子体研究会的支持,深致谢忱。

- 1 L. D. Pearlstein, H. L. Beak, *Phys. Rev. Lett.*, **23**(1969), 220.
- 2 D. W. Ross and S. M. Mahajan, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978), 325.
- 3 L. Chen, P. N. Guzdar, R. B. White, P. K. Kaw and C. R. Oberman, *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 649.
- 4 Tsang *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978), 327.
- 5 T. M. Antonsen, Jr., *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 33.
- 6 L. Chen, P. N. Guzdar, J. Y. Hsu, P. K. Kaw, C. R. Oberman and R. B. White, *Nucl. Fusion*, **19**(1979), 373.
- 7 Y. C. Lee and L. Chen, *Phys. Rev. Lett.*, **42**(1979), 708.
- 8 Y. C. Lee, L. Chen and W. M. Nevins, *Nucl. Fusion*, **20**(1980), 482.
- 9 L. Chen, F. J. Ke, M. J. Xu, S. T. Tsai, Y. C. Lee and T. M. Antonsen, Jr., *Plasma Phys.*, **24**(1982), 743.
- 10 L. Chen, S. T. Tsai, *Phys. Fluids*, **26**(1983), 141.
- 11 L. Chen, S. T. Tsai, *Plasma Phys.*, **25**(1983), 349.
- 12 S. I. Braginskii, *Reviews of Plasma Physics*, ed. M. A. Leontovich, Consultants Bureau, New York, (1965), Vol. 1, P205.

ON THE STABILITY OF DRIFT WAVES WITH STRONG COLLISION

KE FU-JIU

(Department of Applied Mathematics and Physics, Beijing
University of Aeronautics and Astronautics)

CAI SHI-DONG

(Institute of Physics, Academia Sinica)

CHEN LIU

(Plasma Physics Laboratory, Princeton University, U. S. A.)

ZHANG CHENG-FU

(Department of Physics, Peking University)

QI XIANG-LIN

(Department of Applied Mathematics and Physics, Beijing University
of Aeronautics and Astronautics)

ABSTRACT

An integral eigenequation is derived for the strongly collisional plasma by applying the gyrokinetic technique. An analytical proof of the absolute stability for the drift wave in a slab geometry with finite magnetic shear is presented. The macroscopic motion of electrons parallel to the ambient magnetic field is taken into consideration and Lee-Chen-Nevins^[9] method is adopted in the proof.