

存在异性夹杂的位错塞积

高 飞 张宏图

(兰州大学材料科学系)

1987年10月20日收到

本文采用位错连续分布方法,导出了在外应力作用下异性夹杂和障碍之间相对障碍的单螺位错塞积和双螺位错塞积的分布函数的解析表达式 $\mathcal{D}_1(\eta)$, $\mathcal{D}_2(\eta)$. 在靠近障碍一端, $\mathcal{D}_1(\eta)$ 和 $\mathcal{D}_2(\eta)$ 具有 $-1/2$ 次幂的奇异性,在靠近夹杂一端, $\mathcal{D}_1(\eta)$ 具有 $-\omega$ 次幂的奇异性. 并用双位错塞积的情况表示了与异性夹杂相接触的反平面剪切裂纹问题,导出了应力强度因子. 这些表达式对于 $0 < G_2/G_1 < \infty$ 完全适用. 对所得的结果进行了讨论.

一、引 言

第二相粒子或夹杂对材料的力学性质有很大的影响,近年对于夹杂理论的研究越来越受到人们的重视^[1,2]. 在考虑异性夹杂存在时所引起的微观开裂之前,人们必须考虑由于异性夹杂形状、大小和刚度 G_2/G_1 对位错塞积的影响. 而用位错塞积的方法可以直接研究由于夹杂所引起的微观开裂^[3].

Chou^[4] 用位错连续分布方法研究了刚性第二相存在时的螺位错塞积. Jagannadham 等人^[5]研究了双相介质的螺位错塞积的情况. Barnett等 人^[6]曾研究了相对于圆形夹杂界面的单螺位错塞积. 本文采用位错连续分布方法,分析了在外应力 σ 的作用下,在夹杂和障碍之间相对于障碍的单螺位错塞积和双螺位错塞积. 导出了异性夹杂存在时的单螺位错塞积和双螺位错塞积分布函数的解析表达式 $\mathcal{D}_1(\eta)$, $\mathcal{D}_2(\eta)$. 在 $\eta = \beta$ 端, $\mathcal{D}_1(\eta)$ 和 $\mathcal{D}_2(\eta)$ 具有 $-1/2$ 次幂的奇异性,在 $\eta = 1$ 端 $\mathcal{D}_2(\eta)$ 具有 $-\omega$ 次幂奇异性. 这些表达式对于 $0 < G_2/G_1 < \infty$ 完全适用. 求出了单位错塞积附近的应力场,并用双位错塞积的情况表示了与异性夹杂相接触的反平面剪切裂纹问题,导出了裂纹的应力强度因子. 当 $G_2 > G_1$ 时, $K_\beta > K_1$, 当 $G_2 < G_1$ 时, $K_\beta < K_1$. 同时讨论了夹杂的弹性常数与母体弹性常数相同 ($K = 0$) 的位错塞积情况,双相介质 ($\beta = 1$) 的位错塞积和与界面相接触的反平面剪切裂纹问题. 这些结果对于陶瓷增韧工作将有一定的意义.

二、螺位错塞积的积分方程

考虑母体中存在一圆柱形夹杂(图1),其半径为 R ,切变模量为 G_2 ,母体的切变模量为 G_1 . 其圆柱形夹杂沿 z 方向是无限长,所以我们的问题与 z 轴无关,只在 $x-y$ 平面内考虑. 由于夹杂存在时,母体中位置在 $(t, 0)$ 处螺位错所产生的应力场为^[7]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz} &= -\frac{G_1 b}{2\pi} \left\{ \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} + K \left[\frac{y}{(x-R^2/t)^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right] \right\} \\
 &\quad (x^2 + y^2 > R^2), \\
 &= -\frac{G_1 b}{2\pi} (1+K) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 < R^2), \\
 \sigma_{yz} &= \frac{G_1 b}{2\pi} \left\{ \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} + K \left[\frac{x^2 - R^2/t}{(x-R^2/t)^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \right\} \\
 &= \frac{G_1 b}{2\pi} (1+K) \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 < R^2),
 \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$K = \frac{G_2 - G_1}{G_2 + G_1}, \quad (2)$$

b 为位错的柏格斯矢量, 它平行于 z 轴。在表达式(1)等号右端第一项表示在各向同性介质里处在 $(t, 0)$ 位置的螺位错所产生的应力场, 第二项和第三项表示在 $(R^2/t, 0)$ 和 $(0, 0)$ 处象位错所产生的应力场, 其强度分别为 Kb 和 $-Kb$ (图 1)。这样保证了在夹杂边界应力和位移场的连续性。

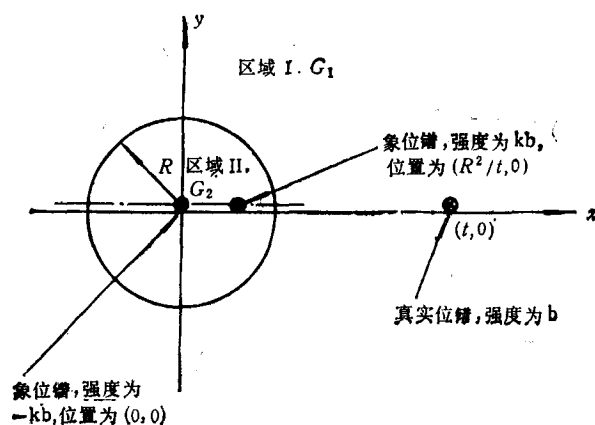


图 1 夹杂存在时保证夹杂表面应力和位移连续的实位错和象位错的位置

若在 x 方向在夹杂和障碍之间相对于障碍有一位错塞积 (图 2), 其位错塞积长度为 L , 所包含的位错数为 N , 外加应力为 $\sigma_{yz} = -\sigma$ 。在静态情况下, 由于其它位错作用在任何一个位错上的力必须与外加应力平衡。如果用连续位错分布代替分离的位错, 其位错塞积的平衡方程为一积分方程

$$\int_R^{R+L} \frac{\mathcal{D}(t)}{x-t} dt + K \int_R^{R+L} \frac{\mathcal{D}(t)}{x-R^2/t} dt - \frac{KN}{x} = \frac{2\pi\sigma}{G_1 b} \quad (R < x < L+R), \quad (3)$$

其中 f 表示柯西积分主值, $\mathcal{D}(t)$ 为未知的位错分布函数。令 $\lambda = x/R$, $\eta = t/R$, 则方程(3)变为

$$\int_1^\beta \frac{\mathcal{D}(\eta)}{\lambda - \eta} d\eta + K \int_1^\beta \frac{\mathcal{D}(\eta)}{\lambda - 1/\eta} d\eta = \frac{KN}{\lambda} + \frac{2\pi R\sigma}{G_1 b} \quad 1 < \eta < \beta, \quad (4)$$

其中 $\beta = \frac{L}{R} + 1$. 若所考虑的问题是相对于障碍的单位错塞积, 位错分布函数记为 $\mathcal{D}_1(\eta)$, 则 $\mathcal{D}_1(\eta)$ 满足积分方程(4), 同时满足下列边界条件:

$$\mathcal{D}_1(\eta) \begin{cases} = 0 & \text{在 } \eta = 1, \\ = -\infty & \text{在 } \eta = \beta. \end{cases} \quad (5)$$

若考虑的问题是在夹杂和障碍之间的双位错塞积, 位错分布函数记为 $\mathcal{D}_2(\eta)$, 则 $\mathcal{D}_2(\eta)$ 满足积分方程(4), 同时满足下面的边界条件:

$$\mathcal{D}_2(\eta) \begin{cases} = \infty & \text{在 } \eta = 1, \\ = -\infty & \text{在 } \eta = \beta. \end{cases} \quad (6)$$

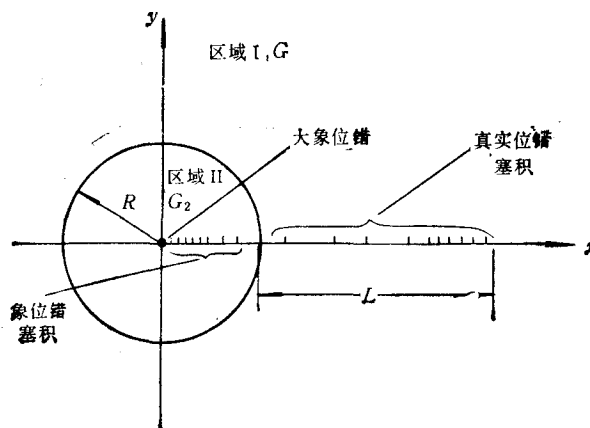


图2 相对于障碍的真实位错塞积和象位错塞积

三、积分方程的解

为了得到上面两种情况下积分方程(4)的解, 我们首先考虑边界条件(5)式下的积分方程的解. Jagannadham 和 Ramachandran^[9] 考虑了双相介质在界面和障碍之间相对于障碍的螺位错塞积的分布函数为

$$f(t) = -\frac{2\sigma}{G_1 b} \left(\frac{2}{1-K} \right)^{1/2} \left(\frac{t^2}{L^2 - t^2} \right)^{1/2} \operatorname{ch} \left(g \operatorname{ch}^{-1} \frac{L}{t} \right), \quad (7a)$$

其中 $g = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \sqrt{\frac{1-K}{2}}$,

Barnett 和 Tetelman^[8] 导出刚性夹杂存在时相对界面的螺位错塞积的分布函数,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\xi) = & c_0 \left(1 + \frac{1}{\xi^2} \right) \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{\beta-1}{\beta+1} \frac{\xi+1}{\xi-1} \right) + d_0 \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) \\ & \cdot \operatorname{sh} \left[\operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{\beta-1}{\beta+1} \frac{\xi+1}{\xi-1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7b)$$

根据(7a)和(7b)式, 可以假定在边界条件(5)式下积分方程(4)的解为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0(\eta) = & \left(\frac{\eta-1}{\eta+1} \right) \left[\frac{1}{\left(\frac{\beta-1}{\beta+1} \right)^2 - \left(\frac{\eta-1}{\eta+1} \right)^2} \right]^{\nu/2} \\ & \times \left\{ A \left(1 + \frac{1}{\eta^2} \right) \operatorname{ch} \left[g \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{\beta-1}{\beta+1} \frac{\eta+1}{\eta-1} \right) \right] \right. \\ & \left. + B \left(1 - \frac{1}{\eta^2} \right) \operatorname{ch} \left[\omega \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{\beta-1}{\beta+1} \frac{\eta+1}{\eta-1} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\beta = \frac{L}{R} + 1, \quad \eta = \frac{x}{R}, \quad (9)$$

A, B, g, ω 为未知的常数, 它们由积分方程决定. 令

$$u = \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{\beta-1}{\beta+1} \frac{\eta+1}{\eta-1} \right),$$

把上式代入(8)式则

$$\mathcal{D}_0(u) = \frac{1}{\operatorname{sh} u} \left[2A \frac{m^2 \operatorname{ch}^2 u + 1}{(m \operatorname{ch} u + 1)^2} \operatorname{ch} g u + 4mB \frac{\operatorname{ch} u}{(m \operatorname{ch} u + 1)^2} \operatorname{ch} \omega u \right], \quad (10)$$

其中 $m = \frac{\beta+1}{\beta-1}$, 把(10)式代入积分方程(4)得

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} [I_1(u, \lambda) + I_2(u, \lambda)] du + K \int_{-\infty}^{\infty} [I_3(u, \lambda) + I_4(u, \lambda)] du \\ & = \frac{KN}{\lambda} + \frac{2\pi R\sigma}{G_1 b}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} I_1(u, \lambda) &= 2mA \frac{m^2 \operatorname{ch}^2 u + 1}{(m \operatorname{ch} u + 1)^2 (m \operatorname{ch} u - 1)} \frac{\operatorname{ch} g u}{m \operatorname{ch} u (\lambda - 1) - (\lambda + 1)}, \\ I_2(u, \lambda) &= 4m^2 B \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} \omega u}{(m \operatorname{ch} u + 1)^2 (m \operatorname{ch} u - 1)} \frac{1}{m \operatorname{ch} u (\lambda - 1) - (\lambda + 1)}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} I_3(u, \lambda) &= 2mA \frac{m^2 \operatorname{ch}^2 u + 1}{(m \operatorname{ch} u - 1)^2 (m \operatorname{ch} u + 1)} \frac{\operatorname{ch} g u}{m \operatorname{ch} u (\lambda - 1) + (\lambda + 1)}, \\ I_4(u, \lambda) &= 4m^2 B \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} \omega u}{(m \operatorname{ch} u - 1)^2 (m \operatorname{ch} u + 1)} \frac{1}{m \operatorname{ch} u (\lambda - 1) + (\lambda + 1)}. \end{aligned} \quad (13)$$

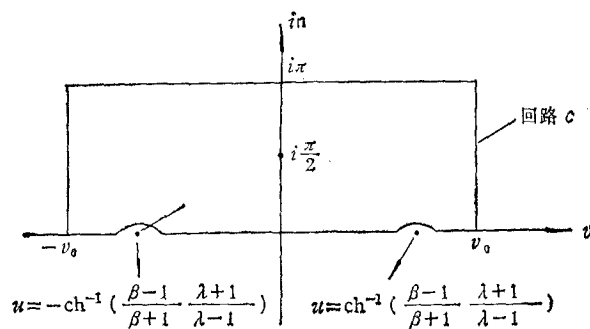
为了解出积分方程(11), 考虑一迴路积分

$$\oint_c [I_1(u, \lambda) + I_2(u, \lambda)] du,$$

其中 $I_1 + I_2$ 由(12)式所决定, c 为 $u = v + in$ 的复平面中的矩形迴路(图3).

若让 $v_0 \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$. 应用留数定理

$$\begin{aligned} \oint_c (I_1 + I_2) du &= \int_{-\infty}^{\infty} (I_1 + I_2) du + (-\cos g\pi) \int_{-\infty}^{\infty} I_3 du \\ &+ \cos \omega\pi \int_{-\infty}^{\infty} I_4 du = 2\pi i \{ (I_1 + I_2) \text{ 在迴路 } c \text{ 中所} \\ &\text{有极点的留数之和} \}. \end{aligned} \quad (14)$$

图3 为了解出积分方程,在复平面 $u = v + in$ 所选取的回路 c

如果选取

$$-\cos \pi g = \cos \omega \pi = K, \quad (15)$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} (I_1 + I_2) du + K \int_{-\infty}^{\infty} (I_3 + I_4) du = 2\pi i \{ (I_1 + I_2) \text{ 在迴路 } c \text{ 中所有极点的留数之和} \}. \quad (16)$$

确定迴路 c 中的极点为 $u_0 = i(\pi - r_0)$, $u_1 = ir_0$, 求出留数后, 代入方程(16), 经过计算后, $\mathcal{D}_0(\eta)$ 所满足的方程为

$$\begin{aligned} \int_1^\beta \frac{\mathcal{D}_0(\eta)}{\lambda - \eta} d\eta + K \int_1^\beta \frac{\mathcal{D}_0(\eta)}{\lambda - 1/\eta} d\eta &= \frac{\pi}{\sin r_0} (-c \cos gr_0 - D \cos \omega r_0) \\ &+ \frac{2\pi}{\lambda \sin r_0} [-A \operatorname{ctg}^2 r_0 \cos g(\pi - r_0) + B \operatorname{ctg}^2 r_0 \cos \omega(\pi - r_0) \\ &+ Ag \operatorname{ctg} r_0 \sin g(\pi - r_0) - \omega B \operatorname{ctg} r_0 \sin \omega(\pi - r_0)] + \frac{\pi}{\sin r_0 \lambda^2} \\ &\cdot [A \cos g(\pi - r_0) - B \cos \omega(\pi - r_0)], \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$0 \leq r_0 = \cos^{-1} \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \leq \frac{\pi}{2}.$$

比较(17)与(11)式, 则

$$\begin{aligned} -A \cos gr_0 - B \cos \omega r_0 &= \frac{2\pi R\sigma}{G_1 b} \frac{\sin r_0}{\pi}, \\ A \cos g(\pi - r_0) - B \cos \omega(\pi - r_0) &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

可求得

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\cos \omega(\pi - r_0)}{\sqrt{1 - K^2}} \frac{2R\sigma}{G_1 b}, \quad B = -\frac{\cos g(\pi - r_0)}{\sqrt{1 - K^2}} \frac{2R\sigma}{G_1 b}, \\ g &= \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \sqrt{\frac{1 - K}{2}}, \quad \omega = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{\frac{1 - K}{2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

$\mathcal{D}_0(\eta)$ 所满足的积分方程为

$$\int_1^\beta \frac{\mathcal{D}_0(\eta)}{\lambda - \eta} d\eta + K \int_1^\beta \frac{\mathcal{D}_0(\eta)}{\lambda - 1/\eta} d\eta = \frac{KN_0}{\lambda} + \frac{2\pi R\sigma}{G_1 b} - \frac{\alpha_0}{\lambda}, \quad (20)$$

其中

$$N_0 = \int_1^\beta \mathcal{D}_0(\eta) d\eta, \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 = KN_0 - \frac{2\pi}{\sin r_0} [-A \operatorname{ctg}^2 r_0 \cos(\pi - r_0) + B \operatorname{ctg}^2 r_0 \cos \omega(\pi - r_0) \\ + Ag \operatorname{ctg} r_0 \sin g(\pi - r_0) - \omega B \operatorname{ctg} r_0 \sin \omega(\pi - r_0)], \end{aligned} \quad (21b)$$

如果 $\alpha_0 = 0$, 则 $\mathcal{D}_0(\eta) = \mathcal{D}_1(\eta)$, 但现在并不是这种情况, 必须找一函数 $\mathcal{D}'_0(\eta)$ 满足下面的积分方程:

$$\int_1^\beta \frac{\mathcal{D}'_0(\eta)}{\lambda - \eta} d\eta + K \int_1^\beta \frac{\mathcal{D}'_0(\eta)}{\lambda - 1/\eta} d\eta = \frac{KN'_0}{\lambda} + \frac{\alpha_0}{\lambda}, \quad (22)$$

使得 $\mathcal{D}_1(\eta) = \mathcal{D}_2(\eta) + \mathcal{D}'_0(\eta)$, $N = N_0 - N'_0$ 是满足边界条件(5)式下积分方程(4)的解。其中

$$N'_0 = \int_1^\beta \mathcal{D}'_0(\eta) d\eta. \quad (23)$$

我们假定 $\mathcal{D}'_0(\eta)$ 的形式为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_0(\eta) = \left[\frac{\eta - 1}{\eta + 1} \right] \left[\frac{1}{\left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1} \right)^2 - \left(\frac{\eta - 1}{\eta + 1} \right)^2} \right]^{1/2} \\ \times \frac{c}{\eta} \operatorname{ch} \left[g \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1} \frac{\eta + 1}{\eta - 1} \right) \right], \end{aligned} \quad (24)$$

其中 c 为待定常数, 应用上面的留数定理方法, 根据(21a)和(23)式, 计算出 N_0 和 N'_0 , 代入积分方程(22), 如果

$$c = -\frac{2 \operatorname{ctg}^2 r_0}{\sin g r_0} [A \sin g r_0 - B \sin \omega r_0] + \frac{2 \operatorname{ctg} r_0}{\sin g r_0} [Ag \cos g r_0 - B \omega \cos \omega r_0], \quad (25)$$

$\mathcal{D}'_0(\eta)$ 为积分(22)的解。满足边界条件(5)式下积分方程(4)的解为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(\eta) = -\left(\frac{\eta - 1}{\eta + 1} \right)^2 \left[\frac{1}{\left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1} \right)^2 - \left(\frac{\eta - 1}{\eta + 1} \right)^2} \right]^{1/2} \frac{2\sigma}{G_1 b \sqrt{1 - K^2}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\eta^2} \right) \right. \\ \cdot \cos \omega(\pi - r_0) \operatorname{ch}(g\sigma_0) + \left(1 - \frac{1}{\eta^2} \right) \cos g(\pi - r_0) \operatorname{ch} \omega\sigma_0 + \frac{2 \operatorname{ctg}^2 r_0}{\eta \sin g r_0} \\ \cdot [\cos g(\pi - r_0) \sin \omega r_0 - \cos \omega(\pi - r_0) \sin g r_0] \operatorname{ch} g\sigma_0 - \frac{2 \operatorname{ctg} r_0}{\eta \sin g r_0} \\ \cdot [\omega \cos g(\pi - r_0) \cos \omega r_0 - g \cos \omega(\pi - r_0) \cos g r_0] \operatorname{ch} g\sigma_0 \left. \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

其中

$$\sigma_0 = \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1} \frac{\eta + 1}{\eta - 1} \right). \quad (27)$$

满足边界条件(6)式下积分方程(4)的解为

$$\mathcal{D}_2(\eta) = [\mathcal{D}'_1(\eta) + \mathcal{D}_1(\eta)]/2, \quad (28)$$

其中 $\mathcal{D}'_1(\eta)$ 是存在异性夹杂相对于夹杂界面的单螺位错塞积的分布函数^[6],

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_1(\eta) = & \frac{2\sigma}{G_1 b \sqrt{1-K^2}} \frac{1}{\sin r_0} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\eta^2}\right) \sin g(\pi - r_0) \operatorname{sh} \omega \sigma_0 + \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) \right. \\ & \cdot \sin \omega(\pi - r_0) \operatorname{sh} g \sigma_0 - \frac{2}{\sin r_0} \frac{\cos r_0}{\cos \omega r_0} [\omega \sqrt{1-K^2} \sin r_0 \\ & \left. - \sin \omega(\pi - r_0) \sin g r_0] \frac{1}{\eta} \operatorname{sh} \omega \sigma_0 \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

四、位错塞积的应力场和应力强度因子

1. 单位错塞积的应力场

位错塞积的应力场可以用单个位错的应力场乘上位错分布函数从 R 到 $L+R$ 积分而得,

$$\sigma_{ij}(x, y) = \int_R^{L+R} \sigma_{ij}(x, y, \eta) \mathcal{D}_1(\eta) d\eta. \quad (30)$$

这个积分非常复杂, 我们主要兴趣是处理在滑移平面的应力场, $y=0$. 在 $\beta < \eta < \infty$, 对于单位错塞积的应力场可以把(30)式化成一复平面积分, 其结果为

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} = & \sigma - \frac{1}{\sqrt{1-K^2}} \left[\frac{\eta+1}{\eta-1} \right] \left[\frac{1}{\left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^2 - \left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^2} \right]^{1/2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\eta^2}\right) \cos \omega(\pi - r_0) \right. \\ & \cdot \cos g \sigma_1 + \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) \cos g(\pi - r_0) \cos \omega \sigma_1 + \frac{2 \operatorname{ctg}^2 r_0}{\eta \sin g r_0} [\cos g(\pi - r_0) \\ & \cdot \sin \omega r_0 - \cos \omega(\pi - r_0) \sin g r_0] \cos g \sigma_1 - \frac{2 \operatorname{ctg} r_0}{\eta \sin g r_0} [\omega \cos g(\pi - r_0) \\ & \left. \cdot \cos \omega r_0 - g \cos \omega(\pi - r_0) \cos g r_0] \cos g \sigma_1 \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$\sigma_1 = \cos^{-1} \left(\frac{\beta-1}{\beta+1} \frac{\eta+1}{\eta-1} \right). \quad (32)$$

2. 与夹杂界面相接触的裂纹的应力强度因子

有异性夹杂存在的裂纹问题对于复合材料、相变增韧都有一定的意义。而用双位错塞积可以表示反平面剪切裂纹, 从双位错塞积的分布函数可以直接求得应力强度因子^[9] 对于 $\eta \rightarrow \beta$,

$$K_\beta = -\sqrt{2\pi} A_1 \lim_{\eta \rightarrow \beta} \sqrt{\beta - \eta} \mathcal{D}_2(\eta) \sqrt{R}, \quad (33)$$

其中 $A_1 = G_1 b / 2\pi$. 把(28)式代入(33)式后得

$$K_\beta = \frac{\sigma}{2\sqrt{1-K^2}} \sqrt{\pi L} F(k, \beta), \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned}
F(k, \beta) = & \left(\frac{\beta + 1}{2} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2} \cos \omega(\pi - r_0) + \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} \cos g(\pi - r_0) \right. \\
& + \frac{2 \operatorname{ctg}^2 r_0}{\beta \sin g r_0} [\cos g(\pi - r_0) \sin \omega r_0 - \cos \omega(\pi - r_0) \sin g r_0] \\
& \left. - \frac{2 \operatorname{ctg} r_0}{\beta \sin g r_0} [\omega \cos g(\pi - r_0) \cos \omega r_0 - g \cos \omega(\pi - r_0) \cos g r_0] \right\}. \quad (35)
\end{aligned}$$

对于 $\eta \rightarrow 1$, 根据文献[10],

$$K_1 = \sqrt{2\pi} A_1 \lim_{\eta \rightarrow 1} (\eta - 1)^\omega R^\omega \mathcal{D}_2(\eta). \quad (36)$$

把(28)式代入上式,

$$K_1 = \frac{\sqrt{\pi} \sigma}{2 \sqrt{1 - K^2}} L^\omega B(k, \beta), \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned}
B(k, \beta) = & \frac{\sqrt{2}}{\sin r_0} \left(\frac{4}{\beta + 1} \right)^\omega \left\{ \sin g(\pi - r_0) + \frac{\cos r_0}{\sin r_0} \frac{1}{\cos \omega r_0} \right. \\
& \cdot [\sin \omega(\pi - r_0) \sin g r_0 - \omega \sqrt{1 - K^2} \sin r_0] \left. \right\}. \quad (38)
\end{aligned}$$

3. 单位错塞积数 N

位错塞积数可以通过位错分布函数从 $R \rightarrow R + L$ 积分而得到

$$N = \int_1^R \mathcal{D}_1(\eta) d\eta. \quad (39)$$

把上面积分化成一复平面的积分,应用留数定理,整理后得

$$\begin{aligned}
N = & \frac{L\sigma\pi}{G_1 b} \frac{1}{\sqrt{1 - K^2}} \frac{\beta + 1}{\beta} \frac{1}{\sin g r_0} [g \cos \omega(\pi - r_0) \\
& + (1 - \omega) \cos g(\pi - r_0) \cos r_0]. \quad (40)
\end{aligned}$$

从此式可以看出 N 与刚度 G_2/G_1 有关,与夹杂的大小有关。从此式可以确定位错塞积长度与位错塞积数 N 的关系。

五、讨 论

本文给出了存在异性夹杂时的单位错塞积、双位错塞积的位错分布函数的解析表达式。得到了单位错塞积在滑移平面所产生的应力场。并用双位错塞积模拟了反平面剪切裂纹问题,得到了应力强度因子,下面对这些结果加入讨论。首先讨论分布函数的几种特殊情况。

1) 当 $K \rightarrow 0$ 时, $g = \omega = 1/2$ 。夹杂的弹性常数与母体的弹性常数相等,单位错塞积的分布函数为

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1(\eta) = & -\frac{4\sigma}{G_1 b} \left[\left(\frac{\eta - 1}{\eta + 1} \right) \left(\frac{1}{\left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1} \right)^2 - \left(\frac{\eta - 1}{\eta + 1} \right)^2} \right) \right]^{1/2} \\
& \times \sin \frac{1}{2} r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1} \frac{\eta + 1}{\eta - 1} \right) \right]. \quad (41)
\end{aligned}$$

位错塞积数为

$$\frac{N}{L} = \frac{\sigma\pi}{G_1 b 2} \frac{\beta+1}{\beta} [1 + \cos r_0]. \quad (42)$$

双位错塞积的分布函数为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i(\eta) = \frac{4\sigma}{G_1 b} \left\{ \frac{\cos \frac{1}{2} r_0}{\sin r_0} \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{\beta-1}{\beta+1} \frac{\eta+1}{\eta-1} \right) \right] - \sin \frac{1}{2} r_0 \left(\frac{\eta-1}{\eta+1} \right) \right. \\ \left. \cdot \left[\frac{1}{\left(\frac{\beta-1}{\beta+1} \right)^2 - \left(\frac{\eta-1}{\eta+1} \right)^2} \right]^{1/2} \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{\beta-1}{\beta+1} \frac{\eta+1}{\eta-1} \right) \right] \right\}. \quad (43) \end{aligned}$$

这时的位错分布函数表达式非常简单, 从上面的表达式看出位错分布函数和位错数仍与夹杂的大小有关.

当 $\beta \rightarrow 1$ 时, 夹杂的半径 $R \rightarrow \infty$, 这正是双相介质的位错塞情况, $r_0 \rightarrow \pi/2$. 单位错塞积的分布函数为

$$\mathcal{D}_i(t) = -\frac{2\sigma}{G_1 b} \left(\frac{2}{1-K} \right)^{1/2} \left(\frac{t^2}{L^2 - t^2} \right)^{1/2} \operatorname{ch} \left(g \operatorname{ch}^{-1} \frac{L}{t} \right). \quad (44)$$

位错塞积数为

$$N = \frac{4\sigma L}{G_1 b} \cos^{-1} \left(\frac{1-K}{2} \right)^{1/2}. \quad (45)$$

双位错塞积的分布函数为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i(t) = \frac{\sigma}{G_1 b} \left(\frac{2}{1-K} \right)^{1/2} \left\{ \operatorname{sh} \left(\omega \operatorname{ch}^{-1} \frac{L}{t} \right) - \left(\frac{t^2}{L^2 - t^2} \right)^{1/2} \right. \\ \left. \cdot \operatorname{ch} \left(g \operatorname{ch}^{-1} \frac{L}{t} \right) \right\}, \quad (46) \end{aligned}$$

其中

$$t = x - R.$$

(44)和(46)式与文献[5]中双相介质螺位错塞积的分布函数是完全一样的.

3) 对于与夹杂相接触的裂纹问题, 令 $\eta_0 = \rho_0/R$, ρ_0 为裂纹端点附近的距离. 在靠近 $\eta = \beta$ 的裂纹顶端, 当

$$\eta \rightarrow \beta - \rho_0/R = \beta - \eta_0, \quad (47)$$

位错分布函数

$$\mathcal{D}_i(\rho_0) \propto \left[\frac{R(\beta-1)}{2\rho_0} \right]^{1/2}. \quad (48)$$

可见在 $\eta = \beta$ 的裂纹顶端, 位错分布函数具有 $-1/2$ 的奇异性, 这与应力奇点是完全一样的.

在靠近 $\eta = 1$ 的裂纹顶端. 当

$$\eta \rightarrow 1 + \frac{\rho_0}{R} = 1 + \eta_0, \quad (49)$$

位错分布函数为

$$\mathcal{D}_i(\rho_0) \propto \left[\frac{4L}{(\beta+1)\rho_0} \right]^\omega. \quad (50)$$

可见在裂纹 $\eta = 1$ 的顶端有 $-\omega$ 次幂的奇异性, 同样应力奇点也应是一 ω 次幂的奇异性. 这一结果与文献[11, 12]中从数值方法所计算的在双相介质中与界面相接触的裂纹问题的结果是一样的. 从(19)式知 ω 的范围应为 $0 < \omega \leq 1/2$.

4) 对于与夹杂相接触的微观裂纹问题, 从(34)和(37)式的计算知道, 如果 $G_2 > G_1$, 则

$$K_\beta > K_1. \quad (51)$$

这说明裂纹在 $\eta = \beta$ 一端的应力集中比接触夹杂一端的应力集中更大. 如果 $G_2 > G_1$, 则

$$K_\beta < K_1. \quad (52)$$

说明裂纹接触夹杂一端的应力集中比 $\eta = \beta$ 一端的应力集中更大. 为明确起见, 这里再讨论 $\beta \rightarrow 1$ 的特殊情况(双相介质), 以(34)和(37)式知, 当 $\beta \rightarrow 1$,

$$K_\beta - K_1 = \frac{\sqrt{\pi} \sigma}{\sqrt{1-K}} [2L^{1/2} - 2^{\omega+1/2} L^\omega]. \quad (53)$$

当 $G_2 \gg G_1$, $\omega \ll \frac{1}{2}$, 则

$$K_\beta \gg K_1. \quad (54)$$

从这个角度, 可以看出在陶瓷增韧工作中, 为了减少裂纹的应力集中(靠近夹杂一端), 最好加入一些弹性常数较大的材料, 这对陶瓷增韧工作将有一定的意义.

- 1 H. T. Zang (张宏图) and Y. T. Chou, *J. Appl. Mech.*, **52**(1985), 87.
- 2 张宏图, 王 锐, 中国科学 (A 辑) (10)(1985), 921.
- 3 张宏图, 曹宝宏, 物理学报, **35**(1986), 750.
- 4 Y. T. Chou, *Acta Met.*, **13**(1965), 779.
- 5 K. Jagannadham and E. G. Ramachandran, *Int. J. of Fracture*, **9**(1973), 397.
- 6 D. M. Barnett and A. S. Tetelman, *Canadian J. of Physics*, **45**(1967), 841.
- 7 J. Dandurs and T. Mura, *J. Mech. Phys. Solids*, **12**(1964), 177.
- 8 D. M. Barnett and A. S. Tetelman, *J. Mech. Phys. Solids*, **12**(1966), 329.
- 9 龙期威, 金属学报, **14**(1978), 118.
- 10 F. Erdogan, *Mech. of Fracture*, **19**(1976), 155.
- 11 T. S. Cook and F. Erdogan, *Int. J. Engin. Sci.*, **10**(1972), 667.
- 12 F. Erdogan and T. S. Cook, *Int. J. of Fracture*, **10**(1974), 227.

PILE-UP OF DISLOCATION WHILE EXISTING INHOMOGENEITY

GAO FEI ZHANG HONG-TU

(Department of Material Science, Lanzhou University)

ABSTRACT

In this paper, the method of continuously distributed dislocations is used to obtain the exact solutions of distribution functions $D_1(\eta)$ and $D_2(\eta)$ for single pileup of screw dislocations formed against an obstacle and double pileups of screw dislocations between an inclusion and an obstacle under action of an applied stress while existing inhomogeneity. At the pileup tip near the obstacle, $D_1(\eta)$ and $D_2(\eta)$ have inverse square root singularity and $D_2(\eta)$ has ω power singularity at pileup tip near the inclusion. The double pileups is used to represent the antiplane shear crack terminating at the interface of inclusion and the stress intensity factors are obtained. The solutions presented are valid for $0 < G_2/G_1 < \infty$ and the results are discussed.