

具有混合作用的 $U(1)$ 模型的广义 Villain 分析

徐 在 新 朱 本 源

(华东师范大学物理系)

1987 年 10 月 26 日收到

我们引进了广义 Villain 公式,考察了双周期紧致 $U(1)$ 理论的电磁涡旋拓扑结构,得到了该模型在其耦合参数空间中的全部相变结构,其中包括部分禁闭相和二光子相。最后,利用 Migdal-Kadanoff 重整化群方法的数值结果,得到了这个模型在 $(N_1, N_2) = (1, 5), (1, 6), (1, 7)$ 等情况下的相图,从而证实了我们的周期高斯近似下的理论分析。

一、引 言

四维紧致格点 QED 存在许多令人感兴趣的特征,许多作者已经对这个模型作了多方面的考察。在纯 Wilson 作用下存在二相结构已得到肯定。为了深入地研究这个模型的相变特征,一些作者已经利用 Monte-Carlo (MC), Monte-Carlo 重正化群(MCRG),以及 Migdal-Kadanoff 重整化群(MKRG)等方法研究了具有混合作用的这种格点系统^[1-5]。结果表明,具有混合作用的系统将显示出某些令人感兴趣的动力学自由度,而这些特征在纯 Wilson 作用下并不出现。

格点规范理论的性质是由其规范对称性确定的。但是它们的相变结构也依赖于模型所包含具体作用的拓扑性质。本文讨论了包含混合作用的四维紧致 QED 模型,这种混合作用是用 $U(1)$ 规范群的任意两个不同特征标表示的。我们引进了广义 Villain 高斯近似,得到了理论的格林函数生成泛函在这一近似下的形式。分析了这个模型的电磁涡旋拓扑结构,得到了二维参数空间 $(\beta_1 \approx \beta_2)$ 中的全部相变结构的一般特征,其中包括部分禁闭相和二光子相。我们利用修正的 MKRG 方案,通过数值计算得到了这个模型在 $(N_1, N_2) = (1, 5), (1, 6), (1, 7)$ 等情况下的相图,从而证实了我们关于这个模型在周期高斯近似下的结论。

二、双周期紧致 $U(1)$ 理论的广义 Villain 近似

具有混合作用的双周期性紧致 $U(1)$ 理论的作用量一般可表示为

$$S = \beta_1 \sum_{n, \mu\nu} (1 - \cos N_1 \theta_{\mu\nu}(n)) + \beta_2 \sum_{n, \mu\nu} (1 - \cos N_2 \theta_{\mu\nu}(n)), \quad (1)$$

其中 N_1 和 N_2 是互质整数; $\theta_{\mu\nu}(n)$ 是链变量 $\theta_\mu(n)$ 的块旋度,定义为

$$\theta_{\mu\nu}(n) = \nabla_\mu \theta_\nu(n) - \nabla_\nu \theta_\mu(n). \quad (2)$$

这个理论在欧氏空间的生成泛函可表示为

$$Z = \int_0^{2\pi} \prod_{n,\mu} d\theta_\mu(n) e^{-S}. \quad (3)$$

为了得到可以包含 $\beta_i < 0$ 的周期高斯近似公式, 我们考察 Bessel 函数的母函数

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x). \quad (4)$$

于是有

$$e^{-\beta(1-\cos\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} e^{-\beta} I_n(\beta), \quad (5)$$

其中 $I_n(\beta) = J_n(i\beta)/i^n$ 是虚宗量或变形 Bessel 函数, 它在除去负实轴的整个复平面上解析. 为了使讨论可以包含正负 β 轴区域, 可作代换 $\beta \rightarrow |\beta|$. 再利用渐近表式

$$I_n(\beta) \approx \frac{e^{\beta-n^{1/2}/2\beta}}{\sqrt{2\pi\beta}}, \quad (6)$$

便可得到(相差一系数)

$$e^{-\beta(1-\cos\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta - n^2/2|\beta|}. \quad (7)$$

显然对于 $\beta > 0$ 的区域, 上式就是通常的 Villain 近似公式^[6].

由(1),(3)式确定的泛函积分在广义 Villain 近似下可表示为

$$Z = \int_0^{2\pi} \left[\prod_{n,\mu} d\theta_\mu(n) \right] \prod_{n,\mu\nu} \left[\sum_{l_{\mu\nu}} e^{iN_1 l_{\mu\nu}(n)\theta_{\mu\nu}(n) - i\mu\nu(n)^2/2|\beta_1|} \right] \cdot \left[\sum_{p_{\mu\nu}} e^{iN_2 p_{\mu\nu}(n)\theta_{\mu\nu}(n) - p_{\mu\nu}(n)^2/2|\beta_2|} \right]. \quad (8)$$

上式对 $d\theta_\mu$ 积分后, 可化为

$$Z = \sum_{l_{\mu\nu}, p_{\mu\nu}} \prod_{n,\nu} \delta[\nabla_\mu(N_1 l_{\mu\nu}(n) + N_2 p_{\mu\nu}(n))] \cdot \exp \left[- \sum_{n,\mu\nu} (l_{\mu\nu}(n)^2/2|\beta_1| + p_{\mu\nu}(n)^2/2|\beta_2|) \right]. \quad (9)$$

三、电磁涡旋结构分析

为了对理论作进一步分析, 将(9)式中的反对称整数场 $l_{\mu\nu}$ 和 $p_{\mu\nu}$ 分解为纵向部分和横向部分

$$\begin{aligned} l_{\mu\nu}(n) &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\alpha \tilde{l}_\beta(n) + W_{\mu\nu}^1(n), \\ p_{\mu\nu}(n) &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\alpha \tilde{p}_\beta(n) + W_{\mu\nu}^2(n), \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\tilde{l}_\beta$ 和 $\tilde{p}_\beta$ 是定义在链上的对偶整数场. 由上式可定义两类整数流场

$$\begin{aligned} \nabla_\mu l_{\mu\nu}(n) &= \nabla_\mu W_{\mu\nu}^1(n) = j_\nu^1(n), \\ \nabla_\mu p_{\mu\nu}(n) &= \nabla_\mu W_{\mu\nu}^2(n) = j_\nu^2(n). \end{aligned} \quad (11)$$

由(9)式中的约束条件可知, 上述守恒流应满足如下方程:

$$N_1 j_v^1(n) + N_2 j_v^2(n) = 0. \quad (12)$$

此式的解可记为

$$j_v^1(n) = N_2 j_v(n), \quad j_v^2(n) = -N_1 j_v(n), \quad (13)$$

其中 j_v 可视为由下式定义的格点张量场 $W_{\mu\nu}(n)$ 的源:

$$W_{\mu\nu}^1(n) = N_2 W_{\mu\nu}(n), \quad W_{\mu\nu}^2(n) = -N_1 W_{\mu\nu}(n). \quad (14)$$

于是系统的生成泛函可化为

$$\begin{aligned} Z = \sum_{i_\alpha} \sum_{p_\alpha} \sum_{W_{\mu\nu}} \exp \left\{ -\frac{1}{2|\beta_1|} \sum_{n,\alpha\beta} \left[\nabla_\alpha \tilde{j}_\beta(n) - \nabla_\beta \tilde{j}_\alpha(n) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} N_2 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} W_{\mu\nu}(n) \right]^2 - \frac{1}{2|\beta_2|} \sum_{n,\alpha\beta} \left[\nabla_\alpha \tilde{p}_\beta(n) - \nabla_\beta \tilde{p}_\alpha(n) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} N_1 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} W_{\mu\nu}(n) \right]^2 \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

应当指出,如果引进外源 K ,则系统的作用量应作如下代换: $S \rightarrow S + iK_\mu(n)\theta_\mu(n)$. 此时(9)式中的约束条件将为 $\nabla_\mu(N_1 l_{\mu\nu}(n) + N_2 p_{\mu\nu}(n)) = K_\nu(n)$. 若将 K 分解为 $K_\mu = N_1 K_\mu^1 + N_2 K_\mu^2$, 则(13)式应修改为 $j_\mu^1 = N_2 j_\mu + K_\mu^1$, $j_\mu^2 = -N_1 j_\mu - K_\mu^2$. 而这些修改对于我们以下的讨论并不引起实质性的影响.

利用 Poisson 求和公式^[7], 可将两类格点整数场 $\tilde{l}_\mu(n)$, $\tilde{p}_\mu(n)$ 转化为两类光子场 $A_\mu^1(n)$, $A_\mu^2(n)$ 和两类整数(磁)涡旋场 $m_\mu(n)$, $M_\mu(n)$. 不难证明, (15)式现在可化为

$$\begin{aligned} Z = \sum_{m_\mu} \sum_{M_\mu} \sum_{W_{\mu\nu}} \left[\left[\prod_{n,\mu} dA_\mu^1 \right] \left[\prod_{n,\mu} dA_\mu^2 \right] \right. \\ \cdot \exp \left[-\frac{1}{2|\beta_1|} \sum_{n,\mu\nu} (2A_\mu^1(n) D_{\mu\nu} A_\nu^1(n) - 2N_2 \nabla_\nu A_\mu^1(n) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} W_{\alpha\beta}(n) \right. \\ \left. - 4\pi i |\beta_1| m_\mu(n) A_\mu^1(n) \right) - \sum_n \frac{1}{2|\beta_1|} C_1(n) \Big] \\ \cdot \exp \left[-\frac{1}{2|\beta_2|} \sum_{n,\mu\nu} (2A_\mu^2(n) D_{\mu\nu} A_\nu^2(n) + 2N_1 \nabla_\nu A_\mu^2(n) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} W_{\alpha\beta}(n) \right. \\ \left. - 4\pi i |\beta_2| M_\mu(n) A_\mu^2(n) - \sum_n \frac{1}{2|\beta_2|} C_2(n) \right], \quad (16) \end{aligned}$$

其中 $D_{\mu\nu} = (\nabla^2 g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu)$; 而 $C_1(n) = \left(\frac{1}{2} N_2 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} W_{\mu\nu}(n) \right)^2$,

$$C_2(n) = \left(\frac{1}{2} N_1 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} W_{\mu\nu}(n) \right)^2$$

是与积分变量无关的量. 积用高斯积分公式不难将上式最后化为

$$\begin{aligned} Z = \sum_{m_\mu} \sum_{M_\mu} \sum_{j_\mu} \exp \left[-\left(\frac{N_2^2}{2|\beta_1|} + \frac{N_1^2}{2|\beta_2|} \right) j_\mu(n) G(n-n') j_\mu(n') \right. \\ - 2\pi^2 |\beta_1| m_\mu(n) G(n-n') m_\mu(n') \\ - 2\pi^2 |\beta_2| M_\mu(n) G(n-n') M_\mu(n') \\ \left. - i\pi (N_2 m_\mu(n) + N_1 M_\mu(n)) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\nu W_{\alpha\beta}(n) \right], \quad (17) \end{aligned}$$

其中 $G = D^{-1}$ 是光子传播子的格点形式, (17) 式反映了双周期紧致 $U(1)$ 理论的电磁涡旋拓扑结构. 我们可以把 $j_\mu(n)$ 解释为电涡旋 ($\nabla_\mu j_\mu = 0$); 而把 $m_\mu(n)$, $M_\mu(n)$ 解释为磁涡旋 ($\nabla_\mu m_\mu = 0$, $\nabla_\mu M_\mu = 0$), 它们是磁单极子世界线所构成的闭合圈. 上述结果表明, 电磁相互作用是电磁涡旋通过光子场传递的. 电作用强度为 $g_{e_i}^2 \approx 1/2|\beta_i|$; 磁作用强度为 $g_{m_i}^2 \approx 2\pi^2|\beta_i|$, 所以有 $g_{e_i}g_{m_i} \approx \pi$. 这与 Dirac 关系一致.

电磁涡旋的内能与周长 L 成正比; 熵与 $LG(0)$ 成正比, 所以电磁涡旋的凝结温度仅与 $G(0)$ 及格点的几何性质有关^[7]. 于是凝结条件可表示如下:

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2\pi^2|\beta_1| < C \quad m\text{型磁涡旋凝结 } (A, B, B'), \\ (2) \quad & 2\pi^2|\beta_2| < C \quad M\text{型磁涡旋凝结 } (A, C), \\ (3) \quad & \frac{N_2^2}{2|\beta_1|} + \frac{N_1^2}{2|\beta_2|} < C \quad \text{电涡旋凝结 } (E, E'). \end{aligned} \quad (18)$$

根据上述条件, 可以得到如图 1 所示的相变结构(仅给出 1, 4 象限). 各相具有如下性征: (1) A 为电禁闭相, 其真空为磁涡旋凝结; (2) B, B' 为部分禁闭相, N_1 多重态电荷处于禁闭相, N_2 多重态电荷处于库仑相; (3) C 也是部分禁闭相, N_2 多重态电荷处于禁闭相, 而 N_1 多重态电荷处于库仑相; (4) D, D' 为非禁闭相, 不存在电磁涡旋的凝结; (5) E, E' 为磁禁闭相, 其真空为电涡旋凝结.

由条件(18)式可知, 上述多相结构仅仅在 N_1, N_2 较大 ($\geq 2\pi$) 时才成立. 否则 $E(E')$ 相和 $D(D')$ 相的分界线将会与 $B(B')$ 或 C 相和 $D(D')$ 相的分界线完全交迭, 或部分交迭, 从而某些相(例如 C, D 相)会消失.

两类不同的电禁闭相的存在表明, 在我们所讨论的模型中存在两类光子, 它们分别出现在 B, B' 区和 C 区中, 或者同时出现在 D, D' 区中. 于是 D, D' 区也可称为二光子相.

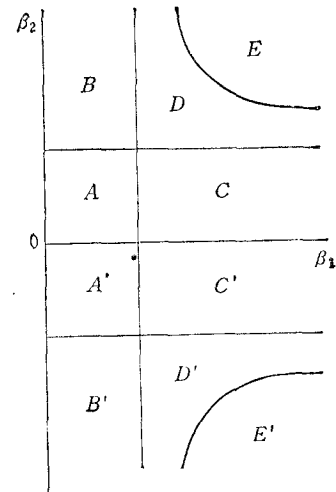


图 1 Villain 近似下双周期紧致 $U(1)$ 理论的相变结构

四、MKRG 方案中的数值结果

为了证实上述分析, 可采用数值计算方法. 已有作者利用 MC 模拟和 MKRG 方法分别考察了这个模型在 $N_1 = 1, N_2 = 6$ ^[2] 和 $N_1 = 2, N_2 = 5$ ^[4] 情况下在第一象限中的相变结构. 为了得到全部耦合参数空间中的相图, 现在采用修正的 MKRG 变换^[8].

MKRG 方法是一种近似的实空间重整化群变换. 利用这种方法, 可以在很少计算机时下方便地得到各种规范模型的相变结构^[8-10]. 重整化群方法表明, 当时空标度扩大 λ 倍时, 人们可以找出一个理论以替代原来的理论, 它描写具有同样物理性质的客观系统. MKRG 变换是通过键移动 (bond moving) 操作和抽取减除 (decimation) 操作实现的, 对于属于群 U 的指数单方块作用量, MKRG 变换可表示为

$$e^{-S_p(U,a)} = F(U,a) = \left[\sum_r F_r(a)^{\lambda^2} d_r \chi_r(U) \right]^{\lambda^{d-1}}, \quad (19)$$

其中 χ_r 是群的特征标, d_r 是表示维数, F_r 是特征标展开系数, d 是时空维数. 因此, 如果相继地作无数次 MKRG 变换, 便可将原来建立在无数个时空方块上的格点理论转化为一个方块上的理论. 利用特征标展开及群积分性质, 可得

$$Z = \lim_{n \rightarrow \infty} \int [dU] e^{-S_p(U, \lambda^n a)} = \lim_{n \rightarrow \infty} F_0(\lambda^n a). \quad (20)$$

在 MK 方案中利用(19)和(20)式计算出 Z , 从而算出广义比热, 并通过它的峰值来辨认理论的相边界.

$U(1)$ 群的所有表示都是一维表示, 所以其特征标仅依赖于一个参数, 可表示为

$$\chi_r(\theta) = 2 \cos r\theta - \delta_{r0}.$$

(1)式作用量现在可采用如下参数化表示:

$$S = \sum_p S_p = - \sum_p (\beta_1 \cos N_1 \theta + \beta_2 \cos N_2 \theta). \quad (21)$$

为了计算方便, 可引进归一化展开系数 $C_r(a)$ 及辅助函数 $R(\theta, a)$

$$C_r(a) = F_r(a)/F_0(a), \quad (22)$$

$$R(\theta, a) = \sum_{r=0}^{\infty} C_r(a)^{\lambda^2} (2 \cos r\theta - \delta_{r0}). \quad (23)$$

于是可以证明, 系统单位方块自由能可表示为

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n, \quad (24)$$

其中

$$F_n = \frac{1}{\lambda^{nd}} \ln F_0(\lambda^n a) = \ln F_0(a) + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{m=1}^{n-1} \ln R(0, \lambda^m a) + \frac{1}{\lambda^{nd}} \ln C_0(\lambda^n a). \quad (25)$$

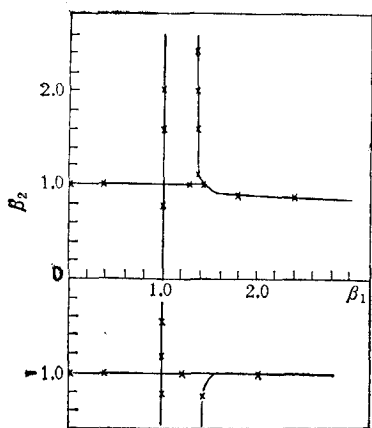


图 2 MK 方案下 $N_1 = 1, N_2 = 5$ 时的相变结构

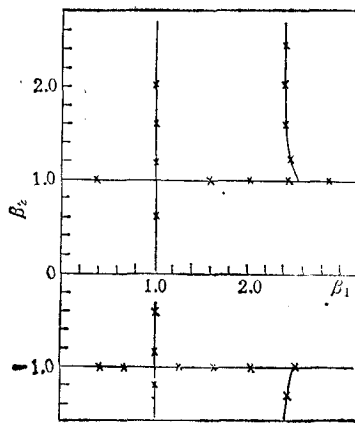


图 3 MK 方案下 $N_1 = 1, N_2 = 6$ 时的相变结构

在我们的计算中,取 $\lambda = 1.05$. 为了得到稳定的结果,通常需作 30—60 次迭代. 在 $\beta_i < 0$ 区域作 MKRG 变换时 F_i 可能为负,这时根据文献[8],从物理上和数值计算上考虑应作如下替换:

$$(F_i)^{\lambda^2} \rightarrow F_i, (F_i^{\lambda^2})^{\frac{\lambda^2-1}{2}} \rightarrow -(F_i^{\lambda^2})^{\lambda^2/2}. \quad (26)$$

利用上述公式于是可方便地得到双周期紧致 $U(1)$ 理论在其参数平面 ($\beta_1 \approx \beta_2$) 上的全部相变结构, 包括 $\beta_i < 0$ 区域. 图 2 至图 4 给出了 1, 4 象限中 (N_1, N_2) = (1, 5), (1, 6), (1, 7) 等情况下的结果. 图 3 在 $\beta_2 > 0$ 区域的相图与 MC 结果^[2]一致. 从图中可以看出, 广义 Villain 近似分析中得到的相变结构关于 β_i 轴的对称性充分显示在我们的数值结果中. 此外由 (18) 式可知, m 型磁涡旋凝结线和 M 型磁涡旋凝结线均与 N_1 或 N_2 的取值无关; 电涡旋凝结线与 m 型磁涡旋凝结线的渐近距离随 N_2^2 的增加而增加, 这些特性也

体现在图示结果中. 由于电涡旋凝结线与 M 型磁涡旋凝结线的渐近距离随 N_2^2 的增加而增加, 现在 N_1 很小, 所以在我们的数值结果中出现了这两条相变线的交迭, 使 D 和 D' 相 (非禁闭相) 部分地消失.

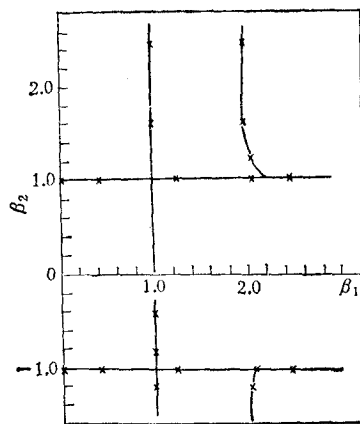


图 4 MK 方案下 $N_1 = 1, N_2 = 7$ 时的相变结构

五、结 论

我们引进了广义 Villain 高斯近似, 并且在这种近似下研究了双周期紧致 $U(1)$ 理论的电磁涡旋拓扑结构, 得到了这个模型在其耦合参数空间中的全部相变图形, 其中包括部分禁闭相和二光子相. 由于两类光子和两类磁单极圈的存在, 使这类模型具有特别丰富的相变结构. 我们的分析表明, 在 $N_1, N_2 \gtrsim 2\pi$ 的条件下, 这个模型的相图具有关于 β_1 和 β_2 轴的近似对称性. 我们的所有分析在修正的 MKRG 方案的数值结果中得到证实.

- 1 G. Bhanot, *Nucl. Phys.*, **B205**[FS5] (1982), 168.
- 2 D. Horn, M. Karliner and E. Katznelson, *Phys. Lett.*, **113B**(1982), 258.
- 3 A. N. Burkitt, *Nucl. Phys.*, **B270**[FS16] (1986), 575.
- 4 K. M. Bitar, S. Gottlieb and C. K. Zachos, *Phys. Lett.*, **121B**(1983), 163.
- 5 徐在新, 科学通报, **30**(1985), 1866.
- 6 J. Villain, *J. Phys. (Paris)*, **36**(1975), 581.
- 7 J. B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, **55**(1983), 775.
- 8 C. I. Tan and Z. X. Xu, *Phys. Rev.*, **D30**(1984), 445; Xu Z. X., *Commun. in Theor. Phys.*, **7**(1987), 369.
- 9 K. M. Bitar *et al.*, *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 2583; *Phys. Rev.*, **D31**(1985), 1470; M. Imashi *et al.*, *Prog. Theor. Phys.*, **69**(1983), 1005; KYUSHU-86-1.
- 10 M. Creutz and L. E. Roberts, *Nucl. Phys.*, **B215**[FS7] (1983), 447.

GENERALIZED VILLAIN ANALYSIS FOR $U(1)$ MODEL WITH AN EXTENDED LATTICE ACTION

XU ZAI-XIN ZHU BEN-YUAN

(Department of Physics, East China Normal University, Shanghai)

ABSTRACT

A generalized Villain formula is introduced. In this general Gaussian approximation, the topological properties of the electromagnetic loop for compact QED in four dimensions with an action which is the admixture of two terms with any different periodicities are investigated. The common properties of the phase structure, including two kinds of different partial confinement phases and a two-photon phase, of this model in the whole parameter space are discussed. By using the modified Migdal-Kadanoff group transformation, the phase diagrams for the cases of $(N_1, N_2) = (1, 5), (1, 6), (1, 7)$ are obtained. The numerical results are consistent with the theoretical analysis.