

激光等离子体中平台型密度分布结构的 边界条件和连接条件

朱蔚通 徐至展

(中国高等科学技术中心(世界实验室)理论物理中心;中国科学院上海光学精密机械研究所)

沈文达

(上海科学技术大学物理系)

1987年10月12日收到

本文仔细地分析了以前在自洽密度分布边界条件和连接条件处理中存在的缺点。为了确切地反映真实的边界,用自相似解把真空边界和等离子体静止上流分别与下密度平台和上密度平台连接起来,在声速点实现了完美的匹配。我们的分析结果与计算机模拟完全一致。

一、引言

在研究由有质动力引起的自洽密度分布的过程中,上、下密度平台、等离子体中的场和密度分布等自洽的关系都已由 Lee 等人我们的工作给出^[1-3]。然而,这样的稳态结构不能自洽地扩展到真空边界。因为真空边界的 $N=0$, 静止上流的 $V=0$ 将导致 $\ln N$ 和 $\ln V$ 发散。为此,许多作者设想了各种方案企图解决下平台与真空边界的连接问题。Lee 等人假定低密度区域的密度等于上、下平台密度的平均,用 WKB 方法导出了入射光强度 A_0^2 和声速点有质动力势 $|A_s|^2$ 之间的联系^[1]。显然,这样的处理并不自洽。Estabrook 等人假定了临界点和声速点之间的密度分布是局部线性的,用 Airy 函数解推广到真空边界,把声速点场和入射激光场联系起来。他们的处理对高激光强度将产生较大误差。因为这时临界密度区域的密度梯度明显变陡,低密度区和临界密度区不能用同一标度长度的 Airy 函数处理^[4]。近来,有用非稳态的稀疏波解来连结真空边界和稳态解的^[5],但其连结点及其连结条件还存在不少问题。例如,文献[5]的分析只对实场成立,因为对复场, $|dA/dx| \neq d|A|/dx$ 。而对实场振幅 A_0 , 低密度区的驻波场函数

$$A(\xi) = 2A_0 \sin \left[-kL \left(2\sqrt{\varepsilon} + \ln \frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}} + c \right) \right] / \sqrt{\varepsilon}$$

实际上不能与真空中的平面电磁波匹配。换句话说, A_0 不是真空中真正的实场振幅,因

为 $\sin \left[-kL \left(2\sqrt{\varepsilon} + \ln \frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}} + c \right) \right] \neq \frac{1}{2}$ 。此外,驻波场结构不能保证处处都

有 $d|A|^2/d\xi = 0$ 。而在有质动力不为零的区域,其密度不被有质动力修正是不合理的。非稳态的稀疏波与稳态解的连结点选在 N_1 也是不合适的,因为这连结点的 $dN/d\xi \rightarrow 0$

和 $kL \rightarrow \infty$, 低密度区域将是密度为 N_1 的均匀密度分布, 而 $A_1 = 0$ 将导致 $A_0 = 0$, 因而不合适的选择。本文从实际的边界条件出发, 讨论边界的连接, 所得结果与计算机模拟完全一致。

二、平台型密度分布和场结构

我们在文献[3]中已导出了稳态自洽密度分布的三参量解簇。在此我们只限于平台型结构。它对应的边界条件为 $A_s = 0$, $\partial A / \partial \xi|_s = 0$ 。于是, 得到下面一些重要关系式:

$$|A_s|^2 = |A|^2 + 2(V^2 - 2\ln V - 1), \quad (1)$$

$$|A_s|^2 = 2(V_1^2 - 2\ln V_1 - 1) = 2(V_2^2 - 2\ln V_2 - 1), \quad (1')$$

$$NV = N_1 V_1 = N_2 V_2 = N, \quad (2)$$

$$\left| \frac{\partial A}{\partial \xi} \right|_s = \left| \frac{\partial A}{\partial \xi} \right|_1 = 0, \quad (3)$$

$$|A_1|^2 = |A_2|^2 = 0, \quad (4)$$

$$\left| \frac{\partial A}{\partial \xi} \right|_1 = 2(V_1^2 - 2\ln V_1 - 1) - 4N_1 V_1 \left(V_1 + \frac{1}{V_1} - 2 \right), \quad (5)$$

$$N_2 = \frac{2(V_2^2 - 2\ln V_2 - 1)}{4(V_2 - 1)^2}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \xi} = & \pm \frac{N}{\left| \frac{N_s^2}{N^2} - 1 \right|} \left\{ \left[\frac{|A_s|^2}{2} - \left(\frac{N_s^2}{N^2} - 2\ln \frac{N_s}{N} - 1 \right) \right] \left(\frac{N_s^2}{N^2} - 2\ln \frac{N_s}{N} - 1 \right) \right. \\ & \left. - 2N_s \left(\frac{N_s}{N} + \frac{N}{N_s} - 2 \right) \left[\frac{|A_s|^2}{2} - \left(\frac{N_s^2}{N^2} - 2\ln \frac{N_s}{N} - 1 \right) \right] \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $V = v/c_s$, $N = n/n_c$, $A = eE/m\omega v_c$, $\xi = kx$, $v_c = (T_e/m)^{1/2}$, 是电子热速度, $c_s = (zT_e/M)^{1/2}$ 是声速, v 是等离子体流速, n 是等离子体密度, n_c 是临界密度, $m(M)$ 是电子(离子)质量, z 是电荷态, e 和 T_e 是电子的电荷和温度, ω 和 k 是入射光的频率和波数, E 是电场强度。下标 $s, 1, 2$ 分别标声速点、下平台、上平台的量。

实际的边界条件为

$$A = A_{0i} e^{i\xi} + A_{0r} e^{-i\xi} \quad N = 0 (\xi \rightarrow \infty) \quad (8)$$

和

$$|A| = \left| \frac{\partial A}{\partial \xi} \right| = 0, \quad N = N_r, \quad V = 0 (\xi \rightarrow -\infty), \quad (9)$$

其中 A_{0i} 和 A_{0r} 是入射和反射光的强度, N_r 是在静止上流的等离子体密度。显然, 稳态的平台型结构不能满足这样的边界条件。这是因为激光等离子体的相互作用发生在有限的时间里, 达到一个稳态将取无限长的时间。合理的处理方案是把上、下密度平台联结到等热的稀疏波。

三、低密度和超高密度区域的密度分布和场结构

我们假定在低密度区域或超高密度区域 $d|A|^2/d\xi = 0$, 则在这些区域中, 等离子体仍将作自相似膨胀, 求解有质动力不存在时的方程(1)和(2), 得到自相似解

$$V_0 = 1 + \xi/kL_t, \quad (10)$$

$$N_0 = N \exp(-1 - \xi/kL_t), \quad (11)$$

其中 $L_t = c_t t$. 因为 N_0 与时间 t 有关, 场振幅将随时间缓慢地变化, 场 E 的波动方程可以写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon E - 2i \frac{\omega}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} E - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial E}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

因为 $\left| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right| \ll \omega$, $\left| \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial t} \right| \ll \omega$, $\left| \frac{\partial^2 \varepsilon}{\varepsilon \partial t^2} \right| \ll \omega^2$, $\left| \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial t} \right| \ll \omega^2$, 作为一个合理的近似, 可以忽略它们, 归一化后的简化方程(12)可以写成

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + (1 - N)A = 0. \quad (13)$$

把 $N = N_0$ 代入方程(13), 求得对应密度 N_0 的 t 时刻的电场为

$$A_0 = c_1 H_\nu^{(1)}(\nu N_0^{1/2}) + c_2 H_\nu^{(2)}(\nu N_0^{1/2}), \quad (14)$$

其中 $H_\nu^{(1)}(\nu N_0^{1/2})$ 和 $H_\nu^{(2)}(\nu N_0^{1/2})$ 是 ν 阶 Hankel 函数, $\nu = i2kL_t$, 利用 $|\nu| \gg 1$ 时 Hankel 函数的均匀渐近展开式, 并只保留主要项, 电场 A_0 的表示式(14)简化成

$$A_0 = \frac{(4\xi/1 - N_0)^{1/2}}{(2kL_t)^{1/2}} \{ [(2b - d) + i(c - 2a)] A_i(-z) + (c + id) B_i(-z) \}, \quad (15)$$

其中

$$\frac{2}{3} \xi^{3/2} = \ln [1 + (1 - N_0)^{1/2}] - \frac{1}{2} \ln N_0 - (1 - N_0)^{1/2} \quad (N_0 < 1);$$

$$\frac{2}{3} (-\xi)^{3/2} = (N_0 - 1)^{1/2} - \arccos(1/N_0^{1/2}) \quad (N_0 > 1).$$

这里 $c_1 = a + ib$, $c_2 = c + id$ 和 $z = (2kL_t)^{1/2} \xi$. a, b, c 和 d 是待求的四个实常数. $A_i(-z)$ 和 $B_i(-z)$ 是 Airy 函数.

让 ξ_{tr} 是稀疏波与下密度平台的连接点. 则在 $\infty > \xi \geq \xi_{tr}$ 的范围内, 有

$$\begin{aligned} |A_0|^2 = & \frac{(c^2 + d^2)}{\pi k L_t (1 - N_0)^{1/2}} \\ & + \frac{1}{\pi k L_t (1 - N_0)^{1/2}} [4(a^2 + b^2) - 4(ac + bd)] \sin^2 \left(\frac{4}{3} k L_t \xi^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ & + \frac{2}{\pi k L_t (1 - N_0)^{1/2}} (bc - ad) \sin \left(\frac{8}{3} k L_t \xi^{3/2} + \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial A_0}{\partial \xi} \right|^2 = & \frac{(1 - N_0)^{1/2}}{\pi k L_i} \left\{ [4(a^2 + b^2) - 4(ac + bd)] \cos^2 \right. \\ & \times \left(\frac{4}{3} k L_i \xi^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + (c^2 + d^2) - 2(bc - ad) \\ & \times \left. \sin \left(\frac{8}{3} k L_i \xi^{3/2} + \frac{\pi}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{d|A_0|^2}{d\xi} = & (-16|c_1|^2 + 8c_1^*c_2 + 8c_1c_2^* - 4|c_2|^2)A_i(-z)A_i'(-z) \\ & - 4|c_2|^2B_i(-z)B_i'(-z) \\ & - i4(c_1^*c_2 - c_1c_2^*)[A_i'(-z)B_i(-z) + A_i(-z)B_i'(-z)], \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $A_i'(-z)$ 和 $B_i'(-z)$ 分别是 Airy 函数 $A_i(-z)$ 和 $B_i(-z)$ 的导数, c_1^* , c_2^* 是 c_1 , c_2 的复共轭. $A_i(-z)$, $A_i'(-z)$, $B_i(-z)$ 和 $B_i'(-z)$ 有下面的关系式:

$$A_i(-z)A_i'(-z) = -B_i(-z)B_i'(-z) = -\frac{1}{2}\pi^{-1}\sin\left(\frac{8}{3}kL_i\xi^{3/2} + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$A_i'(-z)B_i(-z) + A_i(-z)B_i'(-z) = -\pi^{-1}\cos\left(\frac{8}{3}kL_i\xi^{3/2} + \frac{\pi}{2}\right).$$

在超高密度区域, $|A| = \left| \frac{\partial A}{\partial \xi} \right| = 0$, 可得到 $A \equiv 0$ ($\xi_h \geq \xi > -\infty$), 自相似解在这区域仍适用, 密度和速度分别用 $N_i = N_e \exp(-1 - \xi/kL_i)$ 和 $V_i = 1 + \xi/kL_i$ 描写.

在低密度区, 密度分布和场就由(11)和(15)式给出, 只要这区域 $d|A|^2/d\xi = 0$ 被满足, 这结果是自洽的. 下面考虑边界条件和连接条件对(11)和(15)式中的参量和待定系数的限制.

四、边界条件和连接条件

为了保证自相似解在 $\infty > \xi \geq \xi_h$ 范围内适用, 我们要求

$$\frac{d|A_0|^2}{d\xi} = 0. \quad (19)$$

由此得到

$$8c_1^*c_2 + 8c_1c_2^* = 16|c_1|^2, \quad c_1^*c_2 = c_1c_2^*.$$

即

$$ac + bd = a^2 + b^2, \quad (20)$$

$$bc = ad. \quad (21)$$

当 $\xi \rightarrow \infty$, 方程(15)给出

$$\begin{aligned} A_0 = & \frac{1}{(\pi k L_i)^{1/2}(1 - N_0)^{1/2}} \left\{ (c - a) \cos \left[2kL_i(\ln 2 - 1) + \frac{\pi}{4} \right] \right. \\ & \left. + (b - d) \sin \left[2kL_i(\ln 2 - 1) + \frac{\pi}{4} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i(c - a) \sin \left[2kL_i(\ln 2 - 1) + \frac{\pi}{4} \right] \\
& - i(b - d) \cos \left[2kL_i(\ln 2 - 1) + \frac{\pi}{4} \right] \} e^{i\xi} \\
& + \frac{1}{(\pi k L_i)^{1/2} (1 - N_0)^{1/2}} \left\{ a \cos \left[2kL_i(\ln 2 - 1) + \frac{\pi}{4} \right] \right. \\
& + b \sin \left[2kL_i(\ln 2 - 1) + \frac{\pi}{4} \right] + ib \cos \left[2kL_i(\ln 2 - 1) + \frac{\pi}{4} \right] \\
& \left. - ia \sin \left[2kL_i(\ln 2 - 1) + \frac{\pi}{4} \right] \right\} \xi e^{-i\xi}. \quad (22)
\end{aligned}$$

由真空边界条件(8)和(22)式,可得到

$$\begin{aligned}
|A_{0i}|^2 &= \frac{1}{\pi k L_i} [(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - 2(ac + bd)] \\
&= \frac{1}{\pi k L_i} [(c^2 + d^2) - (a^2 + b^2)], \quad (23)
\end{aligned}$$

$$|A_{0r}|^2 = \frac{(a^2 + b^2)}{\pi k L_i}. \quad (24)$$

因此(16)式可改写成

$$|A_0|^2 = \frac{(1 + \beta) |A_{0i}|^2}{(1 - N_0)^{1/2}}, \quad (25)$$

其中 $\beta \equiv |A_{0r}/A_{0i}|$ 是反射系数.

现在考虑在 $\xi = \xi_{1i}$ 处的连接条件.

在 $\infty > \xi \geq \xi_{1i}$ 区域内,有

$$\left| \frac{1}{N_0} \frac{\partial N_0}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{-\frac{\partial V_0}{\partial \xi}}{V_0 - \frac{\xi}{kL_i}} \right| = \left| -\frac{1}{kL_i} \right|, \quad (26)$$

$$\frac{d|A_{(0)}|^2}{d\xi} = 0. \quad (27)$$

在 $\xi_{1i} \geq \xi > -\infty$ 区域内,有

$$\left| \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial \xi} \right| = \left| -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{|A|}{2|V^2 - 1|} \frac{\partial A}{\partial \xi} \right| \quad (V \neq 1), \quad (28)$$

$$\left| \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial \xi} \right| = \left| -\frac{\partial V}{\partial \xi} \right| = \frac{1}{2} (1 - N_s)^{1/2} |A_s| \quad (V = 1). \quad (29)$$

而在 $\xi = \xi_{1i}$ 处的连结条件为

$$N_{0i} = N_{1i}, \quad (30)$$

$$V_{0i} = V_{1i}, \quad (31)$$

$$|A_0|_i^2 = |A|_i^2, \quad (32)$$

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial \xi}\right)_i = \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_i, \quad \left(\frac{\partial N_0}{\partial \xi}\right)_i = \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_i, \quad (33)$$

$$\frac{d|A_0|_i^2}{d\xi} = \frac{d|A|_i^2}{d\xi} = 0. \quad (34)$$

它们只有当

$$\xi_{it} = 0 \quad (35)$$

和

$$\frac{1}{kL_i} = \frac{1}{2} (1 - N_s)^{1/2} |A_s| \quad (36)$$

条件满足时才成立。因此, 连结条件(30)–(34)式可以写成

$$N_{0i} = N_s, \quad (37)$$

$$V_{0i} = V_s = 1, \quad (38)$$

$$|A_0|_i^2 = |A_s|^2, \quad (39)$$

$$\frac{1}{kL_i} = \frac{1}{2} (1 - N_s)^{1/2} |A_s|, \quad (40)$$

$$\frac{d|A_0|_i^2}{d\xi} = \frac{d|A|_i^2}{d\xi} = 0, \quad (41)$$

其中

$$|A_0|_i^2 = \frac{(1 + \beta)|A_{0i}|^2}{(1 - N_{0i})^{1/2}}, \quad (42)$$

$$|A_s|^2 = 2(V_2^2 - 2 \ln V_2 - 1), \quad (43)$$

$$N_s = N_2 V_2, \quad (44)$$

$$N_2 = |A_s|^2 / 4(V_2 - 1)^2, \quad (45)$$

$$N_{0i} = N_{0i} \exp\left(-1 - \frac{\xi_{it}}{kL_i}\right) = N_{0i} \exp(-1). \quad (46)$$

方程(37)–(46)总共为十个独立的方程((38)式包含两个方程, 方程(41)等价于(39)和(40)式), 它们包含 12 个变量: N_{0i} , N_s , V_{0i} , V_s , $|A_{(0)i}|$, $|A_s|$, kL_i , β , $A_{(0)i}$, V_2 , N_2 和 N_{0i} . 因此, 有一个两参量解族。通常, 把 $|A_0|_i^2$ 和 β 看作已知的可测量, 实际上, 以前的结果只是 $\beta = 0^{[1]}$ 或 $\beta = 1^{[2]}$ 的特殊情况。

为了使这个稳态结构与等离子体静止上流相匹配, 应当考虑上密度平台的连接条件。

设 ξ_{it} 是稀疏波与上密度平台的连接点, 于是连接条件应为

$$|A|^2 = \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|^2 = \frac{d|A|^2}{d\xi} = 0, \quad (47)$$

$$V_2 = V_{it} = 1 + \frac{\xi_{it}}{kL_i}, \quad (48)$$

$$N_2 = N_{it} = N_i \exp\left(-1 - \frac{\xi_{it}}{kL_i}\right). \quad (49)$$

方程(48)给出

$$\xi_{ht} = kL_i(V_i - 1).$$

方程(49)给出

$$N_i = N_0 \exp(V_i).$$

$\partial V / \partial \xi$ 和 $\partial N / \partial \xi$ 在 $\xi = \xi_{ht}$ 处不连续, 而 V 和 N 是连续的, 因而 $\xi = \xi_{ht}$ 为弱间断点。

五、讨 论

利用上面的结果和导出的自洽关系可以完全决定 N 和 $|A|^2$ 的空间分布。图 1 示出了等离子体中的有质动力势和密度分布。点虚线指出了在 $A_{0i} = 0.62$ 和 $\beta = 1$ 时 $|A|^2$ 的空间分布。虚线指出了在有质动力作用下 N 的自洽密度分布。该结果接近文献[6]给出的稀疏波-平台型密度分布: 在有质动力作用下发展的密度分布由一个调制的低密度平台、临界密度区域的线性区域和上密度平台组成。上、下密度平台分别在 $\xi = \xi_{ht}$ 和 $\xi = \xi_{lt}$ 处与稀疏波连结起来。在 $\xi_{lt} \geq \xi \geq \xi_{ht}$ 区域内 N 的空间分布由积分方程(7)得到。可以看到, 它完全符合计算机模拟的结果。

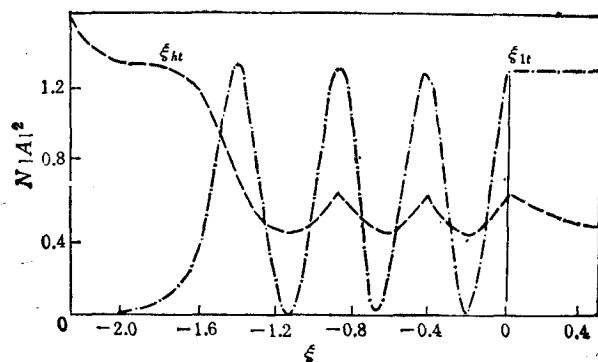


图 1 有质动力势 $|A|^2$ 和自洽密度 N 的空间分布
- · - 为有质动力势 $|A|^2$; --- 为自洽密度 N

- 1 K. Lee *et al.*, *Phys. Fluids*, 20(1977), 51.
- 2 沈文达、朱蔚通, 光学学报, 4(1984), 979.
- 3 沈文达、朱蔚通, 物理学报, 37(1988), 863.
- 4 K. Estabrook and W. L. Kruer, *Phys. Fluids*, 26(1983), 1888.
- 5 Zhi-Zhan Xu, Wei Yu and Wen-Qi Chang, *Phys. Rev.*, A32(1985), 659.
- 6 R. D. Jones, C. H. Aldrich and K. Lee, *Phys. Fluids*, 24(1981), 310.

BOUNDARY AND JUNCTION CONDITIONS FOR PLATEAU STRUCTURE OF DENSITY PROFILE IN A LASER PLASMA

ZHU SHI-TONG XU ZHI-ZHAN

(Center of Theoretical Physics, CCAST (World Laboratory), Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

SHEN WEN-DA

(Department of Physics, Shanghai University of Science and Technology)

ABSTRACT

The shortcomings in previous treatments of boundary and junction conditions for the self-consistent density profile are analysed carefully. In order to reflect precisely the factual boundaries, the vacuum boundary and the plasma rest upstream are connected to the upper and lower density profile shelves by the self-similar solutions respectively, and the perfect matching at the sonic point is realized. Our analytic results agree well with computer simulation.