

超短光脉冲的衍射*

韩全生 朱振和

(中央民族学院物理系)

1987年11月28日收到

本文分析了超短光脉冲的衍射场的能量分布,通过变换极限脉冲对单缝和双缝的衍射场的计算,显示了对脉冲宽度的依赖关系.通过衍射分析可以获得有关脉冲宽度和波形的信息.

近年来超短光脉冲技术迅速发展,已将脉冲宽度推进到几个飞秒($1\text{ fs} = 10^{-15}\text{ s}$)的范围^[1].这样短的脉宽只相当于很少几个光波周期,一般近似为变换极限脉冲^[1,2].实现只有一个乃至半个光波周期的脉冲也为期不远了.对于如此短的光脉冲,衍射场会发生怎样的变化,其变化与脉冲宽度关系如何?对于这一问题的研究,不仅可以了解变换极限的超短光脉冲的衍射特征,而且可望获得有关脉冲宽度和脉冲波形的信息.

设光脉冲为一平面波,其载波频率为 ω_0 ,在时域中表示为

$$E(t) = A(t)e^{i\omega_0 t}. \quad (1)$$

它可以用频率分量的傅里叶积分表示为

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2)$$

而 $\tilde{E}(\omega)$ 可由傅里叶逆变换定理给出

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt. \quad (3)$$

同样,对于 $A(t)$ 和 $\tilde{A}(\omega)$ 亦有傅里叶变换和逆变换关系

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4)$$

$$\tilde{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{i\omega t} dt. \quad (5)$$

利用(1),(3)和(5)式,由傅里叶变换的频移定律可知

$$\tilde{E}(\omega) = \tilde{A}(\omega - \omega_0). \quad (6)$$

根据 Kirchhoff 公式,单色平面波的 Fraunhofer 衍射场为^[3]

$$\tilde{E}(p, q) = \frac{E_0 e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \cdot \iint \exp[-ik(p\xi + q\eta)] d\xi d\eta, \quad (7)$$

式中 E_0 为单色平面波的场强; k 为波矢: $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$; p 和 q 为观察点的方向余

* 国家自然科学基金资助的课题.

弦: $p = x/z$, $q = y/z$; σ 为衍射孔的面积。

为了便于分析和处理, 我们考察一下边长为 $2a \times 2b$ 的矩形孔。让超短光脉冲垂直照射矩孔, 则光脉冲的每个光谱分量 $\tilde{E}(\omega)$ 的 Fraunhofer 衍射光场为

$$\tilde{E}_r(\omega) = \frac{4\tilde{E}(\omega)e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \cdot \frac{\sin(kpa)}{kp} \cdot \frac{\sin(kqb)}{kq}. \quad (8)$$

一个脉冲经过衍射后到达观察点 (p, q) 的能量为

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} E_r(t)E_r^*(t)dt,$$

而

$$E_r(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_r(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \quad (2a)$$

由 Parseval 定理^[4]可以得出

$$\begin{aligned} \varepsilon(p, q) &= \int_{-\infty}^{\infty} E_r(t)E_r^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_r(\omega)\tilde{E}_r^*(\omega)d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4a'b'\omega'}{\pi^2 c^2 z^2} |\tilde{E}(\omega)|^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega}{c}pa\right)}{\frac{\omega}{c}pa}\right)^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega}{c}qb\right)}{\frac{\omega}{c}qb}\right)^2 d\omega. \end{aligned} \quad (10)$$

假设所研究的光脉冲是变换极限的高斯脉冲

$$I(t) = I_0 \exp(-t^2/\tau^2), \quad (11)$$

τ 为脉冲宽度。相应的脉冲振幅为

$$A(t) = \sqrt{I_0} \exp[-t^2/(2\tau^2)].$$

代入(5)式可得出

$$\tilde{A}(\omega) = \tau \sqrt{I_0} \exp(-\omega^2 \tau^2/2).$$

最后由(6)式可知

$$\tilde{E}(\omega) = \tau \sqrt{I_0} \exp[-(\omega - \omega_0)^2 \tau^2/2]. \quad (12)$$

将(12)式代入(10)式, 即可求出衍射场的能量分布。这里只具体考察一下观察屏上穿过中心点的 x 轴上的光能分布, 即令 $q = 0$ 。这即是狭缝衍射场的分布。

当 $p \neq 0$ 时,

$$\varepsilon(p) = \frac{2b'\tau I_0}{\pi^{3/2} p^2 z^2} \left[1 - \cos\left(\frac{2pa\omega_0}{c}\right) \cdot \exp\left(-\frac{p^2 a^2}{c^2 \tau^2}\right) \right]. \quad (13)$$

当 $p = 0$ 时,

$$\varepsilon(0) = \frac{4a^2 b^2 \tau I_0 \omega_0^2}{\pi^{3/2} c^2 z^2} \left(\frac{1}{2\omega_0^2 \tau^2} + 1 \right). \quad (13a)$$

归一化的能量分布为

$$\hat{\varepsilon}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{\varepsilon(0)} = \frac{1}{2X^2} \left(\frac{1}{2\omega_0^2 \tau^2} + 1 \right)^{-1} \left[1 - \cos 2X \cdot \exp\left(-\frac{X^2}{\omega_0^2 \tau^2}\right) \right], \quad (14)$$

式中

$$X = \frac{pa\omega_0}{c}. \quad (15)$$

由(14)式可以看出,不同的脉冲宽度 τ ,衍射场的能量分布将会不同.图1给出了 $\omega_0\tau=2\pi, 5\pi$ 和 10π 时, $a=0.1\text{mm}$ 的狭缝衍射场的能量分布曲线.从图1中清楚显示出,随着脉宽 τ 的减小,出现的衍射花纹减少,花纹的对比度降低.

由 $d\varepsilon/dp=0$ 可以求出能量分布的极值位置所满足的方程

$$\cos 2X + X \sin 2X + \frac{X^2}{\omega_0^2 \tau^2} \cos 2X = \exp\left(\frac{X^2}{\omega_0^2 \tau^2}\right).$$

由此解出

$$\text{tg} X = \frac{X \pm \sqrt{X^2 + \left(1 + \frac{X^2}{\omega_0^2 \tau^2}\right)^2 - \exp\left(\frac{2X^2}{\omega_0^2 \tau^2}\right)}}{1 + \frac{X^2}{\omega_0^2 \tau^2} + \exp\left(\frac{X^2}{\omega_0^2 \tau^2}\right)}. \quad (16)$$

作曲线

$$Y_1 = \text{tg} X \quad (16a)$$

和

$$Y_{2\pm} = \frac{X \pm \sqrt{X^2 + \left(1 + \frac{X^2}{\omega_0^2 \tau^2}\right)^2 - \exp\left(\frac{2X^2}{\omega_0^2 \tau^2}\right)}}{1 + \frac{X^2}{\omega_0^2 \tau^2} + \exp\left(\frac{X^2}{\omega_0^2 \tau^2}\right)}, \quad (16b)$$

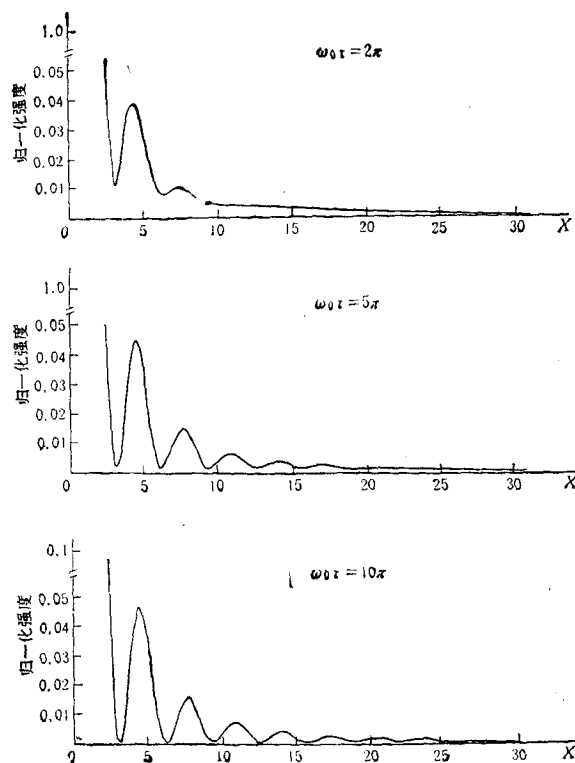


图1 变换极限的高斯脉冲单缝衍射场的能量分布
 $a=0.1\text{mm}$

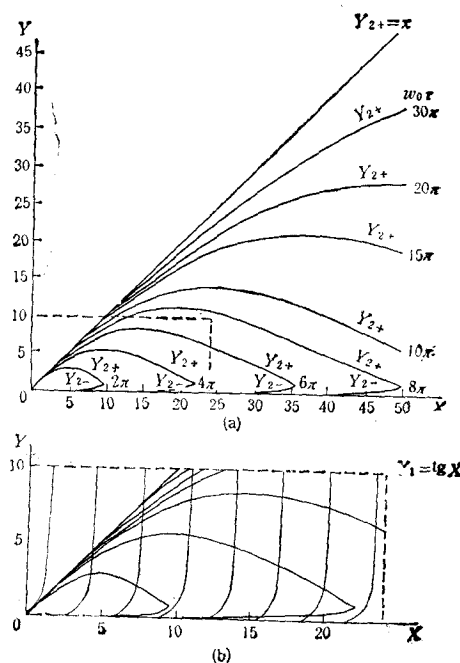


图2 方程(16)的作图解

Y_1 和 Y_2 的交点位置即是光脉冲衍射场能量分布极值的位置. Y_2 有两个值 Y_{2+} 和 Y_{2-} , 分别对应表达式中的正号和负号. Y_1 与 Y_{2+} 的交点的 X 值为衍射场能量极大值的位置; Y_1 与 Y_{2-} 的交点为能量极小值的位置. 从 (16b) 式清楚地看出, 曲线 Y_2 对于不同的脉宽值 τ 将有不同的分布. 当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $Y_{2+} = X$, $Y_{2-} = 0$. 这即回到普通非超短脉冲光的衍射状况^[3].

图 2(a) 给出了不同的 $\omega_0\tau$ 值下的 Y_{2+} 和 Y_{2-} 曲线; 图 2(b) 给出了图 2(a) 在小 X 值的局部放大, 同时画出了 Y_1 曲线. 从图 2 中可以看出, 随着脉宽的减小, 极大值位置逐步向前移, 而极小值位置逐步向后移. 对于一定的脉宽值 τ , 随着衍射级数的增加, 极大值与极小值愈来愈接近. 显然, 当 $Y_{2+} = Y_{2-}$ 时, 其衍射图样中的极大与极小相重合, 这时衍射条纹消失. 图 2 中的曲线 Y_{2+} 和 Y_{2-} 的交点的 X 值就是方程

$$X^2 + \left(1 + \frac{X^2}{\omega_0^2\tau^2}\right)^2 - \exp\left(\frac{2X^2}{\omega_0^2\tau^2}\right) = 0 \quad (17)$$

的解. 我们可由这一方程的数值解作出 $X - \omega_0\tau$ 曲线, 如图 3 所示. 此曲线表示出变换极限的高斯脉冲的衍射场衍射条纹消失的位置与脉冲宽度的关系. 据此, 由衍射实验的结果可以得出有关脉冲宽度的信息.

对于单缝衍射来说, 由于受到缝宽的限制, 不能在脉冲光束波振面的最大线度范围来考察脉冲的衍射. 下面我们再分析一下双缝衍射的情况. 设每个缝的缝宽为 a , 两个缝的中心距为 d , 光脉冲的每个单色平面波分量 $\tilde{E}(\omega)$ 的衍射为^[3]

$$\begin{aligned} \tilde{E}_r(\omega) &= \frac{2a\delta\tilde{E}(\omega)e^{ikz}}{i\lambda z} \cdot \frac{\sin(kpa/2)}{kpa/2} \\ &\cdot \cos(kpd/2) \quad (p \neq 0), \end{aligned} \quad (18)$$

δ 为单位长度. 衍射的能量分布为

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_r(\omega)\tilde{E}_r^*(\omega)d\omega \\ &= \frac{a^2\delta^2}{\pi^2c^2z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\tilde{E}(\omega)|^2 \left[\frac{\sin \frac{pa\omega}{2c}}{\frac{pa\omega}{2c}} \cos \frac{pd\omega}{2c} \right]^2 d\omega. \end{aligned} \quad (19)$$

将 (11) 式代入 (19) 式可以求出

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= \frac{\tau I_0 \delta^2}{\pi^{3/2} p^2 z^2} \left\{ 1 - \cos \frac{pa\omega_0}{c} \cdot \exp\left(-\frac{p^2 a^2}{c^2 \tau^2}\right) \right. \\ &\quad + \cos \frac{pd\omega_0}{c} \cdot \exp\left(-\frac{p^2 d^2}{4c^2 \tau^2}\right) - \frac{1}{2} \cos \frac{p(d+a)\omega_0}{c} \\ &\quad \cdot \exp\left[-\frac{p^2(d+a)^2}{4c^2 \tau^2}\right] - \frac{1}{2} \cos \frac{p(d-a)\omega_0}{c} \cdot \exp\left[-\frac{p^2(d-a)^2}{4c^2 \tau^2}\right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

当 $p = 0$ 时,

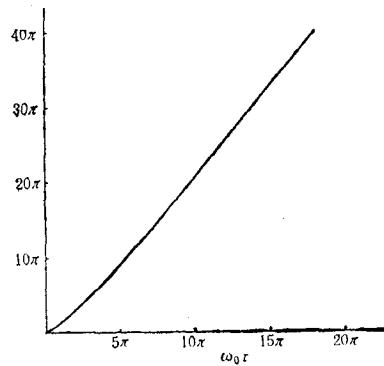


图 3 方程(17)的数值解作的 $X - \omega_0\tau$ 曲线

$$\varepsilon(0) = \frac{a^2 b^2}{\pi^2 c^2 \tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\tilde{E}(\omega)|^2 d\omega = \frac{a^2 b^2 \tau I_0 \omega_0^2}{\pi^{3/2} c^2 \tau^2} \left(\frac{1}{2\tau^2 \omega_0^2} + 1 \right). \quad (20a)$$

归一化的能量分布为

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{\varepsilon(0)} = & \frac{c^2}{p^2 a^2 \omega_0^2} \left(\frac{1}{2\tau^2 \omega_0^2} + 1 \right)^{-1} \\ & \cdot \left\{ 1 - \cos \frac{pa\omega_0}{c} \cdot \exp\left(-\frac{p^2 a^2}{4c^2 \tau^2}\right) + \cos \frac{pd\omega_0}{c} \cdot \exp\left(-\frac{p^2 d^2}{4c^2 \tau^2}\right) \right. \\ & - \frac{1}{2} \cos \frac{p(d+a)\omega_0}{c} \cdot \exp\left(-\frac{p^2 (d+a)^2}{4c^2 \tau^2}\right) \\ & \left. - \frac{1}{2} \cos \frac{p(d-a)\omega_0}{c} \cdot \exp\left(-\frac{p^2 (d-a)^2}{4c^2 \tau^2}\right) \right\}. \quad (21) \end{aligned}$$

上式等号右端花括号中的第一、二两项为单缝的衍射分布,第三至五项为双缝的干涉分布.图4给出了几个不同中心距的双缝对一固定脉宽的变换极限超短光脉冲的衍射能量分布曲线.图5给出了固定间距的双缝对不同脉宽的变换极限超短光脉冲的衍射能量分布曲线.从图4可以看出,随着双缝的中心距 d (相对于缝宽的倍数)的增加,在相同的观

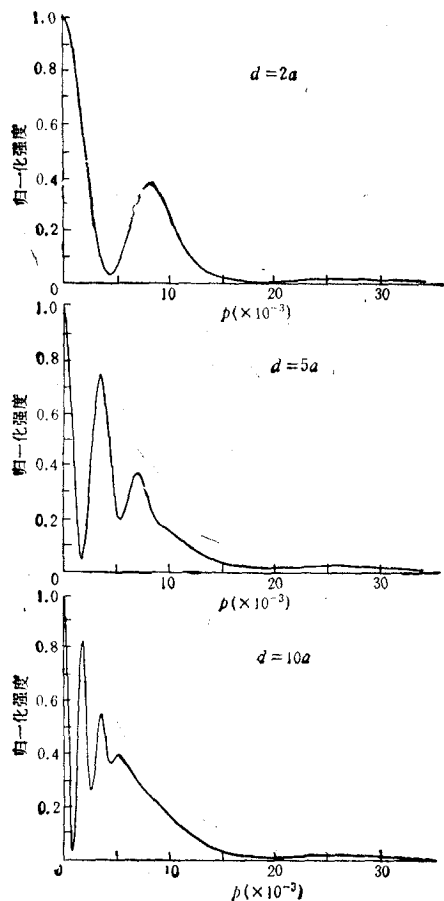


图4 不同缝间距的双缝的脉冲衍射能量分布曲线
 $a = 0.2 \text{ mm}$; $\omega_0 = 5 \times 10^{14} \text{ /s}$; $\tau = 10 \text{ fs}$

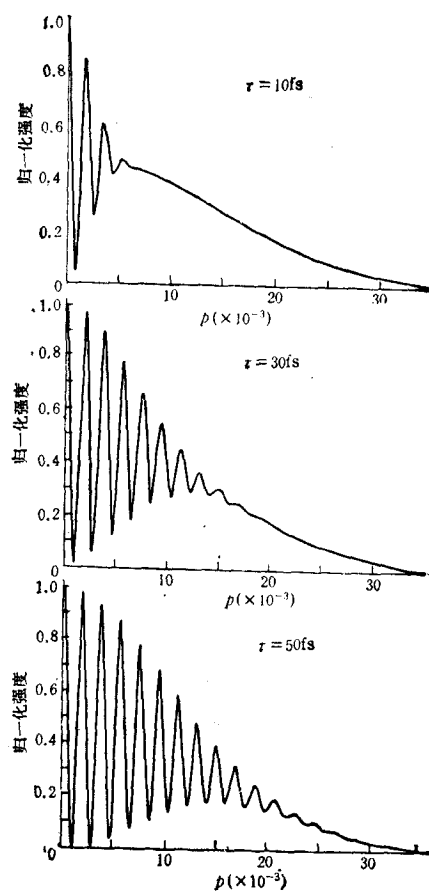


图5 不同脉宽的脉冲的双缝衍射能量分布曲线
 $a = 0.1 \text{ mm}$; $d = 20a$; $\omega_0 = 5 \times 10^{14} \text{ /s}$

察范围内光能分布的振荡频次增加,这与单色光衍射结果一致,但由于脉宽效应,强度的振荡衰减加快并提前消失。从图 5 可以看出,随着脉冲宽度的减小,衍射能量的振荡次数减少,极大值与极小值提前趋于一致。

显然,和单缝衍射一样,通过双缝衍射场能量分布的考察也可以得到变换极限超短光脉冲的脉宽信息。而且由于缝间干涉形成的光强振荡,使得考察更加方便。更重要的是,通过增大缝间距 d (当然 d 的增大要受到脉冲束径的限制),可以扩大被考察脉冲的脉宽范围。

以上的处理是假设了脉冲波形为高斯型。实际上,我们也可以对其他类波形的脉冲作计算,例如双曲正割型、洛仑兹型。对于不同波形的脉冲的衍射能量分布具有一定的差别。如果将不同波形的脉冲的衍射能量分布对实验结果作拟合,就可以得到有关脉冲波形的信息。

- [1] R. L. Fork, C. H. Brito Cruz, P. C. Becker and C. V. Shank, *Opt. Lett.*, **12**(1987), 483.
- [2] W. H. Knox, R. L. Fork, M. C. Downer, R. H. Stolen, J. A. Valdmanis and C. V. Shank, *Appl. Phys. Lett.*, **46**(1985), 1120.
- [3] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, (5th ed.) Pergamon Press, (1975).
- [4] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, (1968).

DIFFRACTION OF ULTRASHORT LASER PULSES

HAN QUAN-SHENG ZHU ZHEN-HE

(Department of Physics, Central Nationalities Institute, Beijing)

ABSTRACT

The energy distribution of the diffraction fields of the transform-limited ultrashort laser pulses is inspected. By calculating the single- and doubleslit diffraction of the transform-limited pulses, the dependence of diffraction patterns on the pulse duration is revealed. It is indicated that the information about the pulse durations and shapes can be obtained through the diffraction inspection.