

四维 Minkowski 空间中具有立方非线性复标量场方程的平面与球面波解

李 富 斌

(淮北煤炭师范学院物理系)

1987 年 11 月 6 日收到

本文在四维 Minkowski 空间中对具有立方非线性复标量场方程进行了研究,并给出了场方程的两种精确解,这两种解相当于场的平面与球面波解。

一、引 言

长期以来,量子场论的基础是由线性场方程(即自由场方程)的经典解所构成。但对于非线性场方程来说,解的迭加原理却不再成立。近几年来,上述情况已有所改变,人们都把注意力集中在与非线性场方程密切相关的特解上。产生了一种新的想法:即从相应的经典解直接出发,试图将非线性场方程量子化,所以愈来愈多的学者都致力于寻求这种建立在非线性模型场论基础上的非线性场方程的经典解。

下面我们将要研究一种简化模型:其场是场的 Lagrangian 含有四次方自耦合项的一种标量场。这种场模型之所以能被简化的原因是由于其自身的构成所致。此外,相应的非线性场方程也可以在与规范场论的结合上发现其意义,但这并不是本文的观点。本文将采用一种十分简化的方法来取代上述方法:即将场方程作为一个波方程来研究并要求场方程的解具有某些对称性质。这些对称性至少要求场方程的两种解是完全确定的。解的大小可借助已知函数以显式给出,而其相位却只能由特定情形下的积分计算来确定,解的多方面应用表示式可用确定的常数进行参数化而求得,而这些确定常数是与波场的边界值相联系的。

二、非线性复标量场方程及其物理量

在此所要研究的经典场是一个在四维 Minkowski 空间中的复标量场 $A(x)$,

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}), \quad x^2 = x_\mu x^\mu = (x^0)^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}. \quad (1)$$

该场是由如下的非线性场方程来确定的:

$$\square A - \lambda A A^* A = 0. \quad (2)$$

我们将考虑到实耦合常数 λ 有两种符号。其场的 Lagrangian 密度 $L(x)$ 为

$$L(x) = \frac{1}{2} (\partial_\mu A^*) (\partial^\mu A) + \frac{1}{4} \lambda (A^* A)^2, \quad (3)$$

其能量密度 $H(x)$ 为

$$H(x) = \frac{1}{2} \left[|\partial^0 \mathbf{A}|^2 + |\nabla \mathbf{A}|^2 - \frac{1}{2} \lambda (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^2 \right], \quad (4)$$

其动量密度 $\mathbf{P}(x)$ 为

$$\mathbf{P}(x) = -\frac{1}{2} [(\partial^0 \mathbf{A}^*)(\nabla \mathbf{A}) + (\partial^0 \mathbf{A})(\nabla \mathbf{A}^*)], \quad (5)$$

其电流密度 $j^\mu(x)$ 为

$$j^\mu(x) = i^{-1}(\mathbf{A}^* \partial^\mu \mathbf{A} - \mathbf{A} \partial^\mu \mathbf{A}^*), \quad (6)$$

对于 $\lambda < 0$ 的情形, 其能量密度定义为正的. 但是我们也发现, 对于 $\lambda > 0$ 的情形, 方程 (2) 的解存在且其 H 为正值.

作为方程 (2) 的一个结论, 即局域守恒定律

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (7)$$

$$\partial^\mu H + \nabla \cdot \mathbf{P} = 0 \quad (8)$$

事实上是存在的, 但我们在此并不讨论其它密度方程. 所有这些密度方程均与使方程 (2) 保持不变性的变换相联系. 这些变换就是平移变换、Lorentz 变换、膨胀变换、正则变换与相变换 $\mathbf{A} \rightarrow e^{i\phi} \mathbf{A}$ 的情形. 由于在不变量 $\mathbf{A}$ 上仅仅附着了一个恒定的相位因子, 所以若将 $\mathbf{A}$ 写成如下形式:

$$\mathbf{A} = R(x) e^{i\phi(x)}, \quad (9)$$

其中 R 和 ϕ 为实数, 则将其讨论限制在 R 的正值范围内. 将具有恒定 ϕ 的场 $j^\mu = 0$ 叫做实数场. 由于我们希望 $\mathbf{A}$ 成为一个 Lorentz 标量, 故依据 Lorentz 变换, 将只研究具有不变性的解. 其它的不变量则意味着具有任意解 $\mathbf{A}(x)$, $\mathbf{A}(x+b)$,

$$\mathbf{A}'(x) = \eta \mathbf{A}(\eta x), \quad (10)$$

$$\mathbf{A}''(x) = \left(\frac{1}{\sigma(x,b)} \right) \mathbf{A}(y), \quad (11)$$

其中

$$y^\mu = \left(\frac{x^2}{\sigma(x,b)} \right) \left(\frac{x^\mu}{x^2} + b^\mu \right), \quad \sigma(x,b) = 1 + 2bx + b^2 x^2 \quad (12)$$

也是方程 (2) 的解. 此处的 η 为一个任意实数, b^μ 为一个任意的实四维矢量. 一般来说, 不能期望方程 (2) 的解也是不变式, 即 $\mathbf{A}'(x) = \mathbf{A}(x)$, $\mathbf{A}''(x) = \mathbf{A}(x)$, 但期望存在一些不变解.

三、非线性场方程的平面波解

非线性场方程第一种类型的解是平面波解, 其中 $\mathbf{A}$ 仅通过下式:

$$P_\mu x^\mu = P_0 x_0 - \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} \quad (13)$$

而依赖于 x , 且具有一个固定的矢量 $\mathbf{P}$, 这种类型的场相应于其波前沿 $\mathbf{P}$ 方向其波面垂直于 $\mathbf{P}$ 的平面波场. 当然, 大多数平面波也包含着沿正方向传播的信号, 即 $\mathbf{A}$ 也依赖于 $P_0 x_0 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}$. 不过为了简便, 在此仅研究一个坐标的情形. 因此必有 $P^2 \neq 0$, 换言之,

即必存在平凡解. 若采用如下缩写符号:

$$g = \frac{\lambda}{p^2}, \quad \tau = \sqrt{|g|} P_\mu x^\mu, \quad \varepsilon = \text{sgn} g; \quad (14)$$

则 A 便可写为

$$A = R(\tau) e^{i\phi(\tau)}, \quad (15)$$

由方程 (7) 可求得

$$\frac{d(R^2 \dot{\phi})}{d\tau} = 0, \quad (16)$$

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{D}{2R^2}, \quad (17)$$

D 为一个实的积分常数. 由方程 (2) 可求得其径向部分的微分方程

$$\ddot{R} - \varepsilon R^3 - \frac{D^2}{4R^3} = 0. \quad (18)$$

不难看出, 如下形式的解: $R(\tau)$, $\phi(\tau)$, $R(\tau + M)$, $\phi(\tau, M)$ 都是方程 (18) 的解, 其中 M 为任意常数. 可以利用这种自由度将初始条件固定在 τ 的一个特定值上, 例如 $\tau=0$.

将 R 的微分方程积分一次便可得出

$$\dot{R}^2 - \frac{1}{2} \varepsilon R^4 + \frac{D^2}{4R^2} + C = 0, \quad (19)$$

其中 C 为另一个实的积分常数. 若再引入

$$\rho = R^2, \quad (20)$$

则 (19) 式就变为

$$\dot{\rho}^2 = -D^2 - 4C\rho + 2\varepsilon\rho^3, \quad (21)$$

从而有

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx, \quad \rho_0 = \rho(0); \quad (22)$$

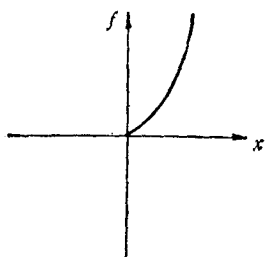
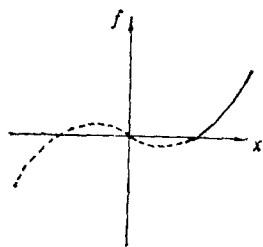
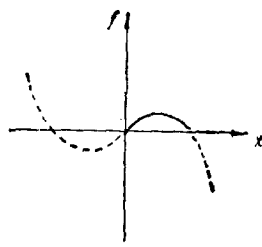
其中

$$f(x) = \varepsilon x^3 - 2Cx - \frac{D^2}{2}. \quad (23)$$

对方程 (22) 的 RHS 的积分是一个椭圆积分, 因此 ρ 为一个椭圆函数. 其显式依赖于 (23) 式 x^3 的根的形式. 这可以用如下的图解方法来表示. 由于 x 相应于 R^2 和 τ 均为实数, 故只有在 $f(x) > 0$ 的范围内正的 x 才是有物理意义的. 对于 $D=0$ (实场情形), 便有三种情形, 分别以图 1—3 示出

对于 $\varepsilon = -1$, $C > 0$ 的情形, 由于对于正的 x , $f < 0$, 故必须将这种情形排除掉. 如图 1—3 所示的三种情形也适合于 $D \neq 0$ 的一般情形. 不过对于图 3 的情况, 必须要求 D^2 足够小以保证在 $f > 0$ 的范围内存在. 由于 D 正比于场所带的电荷数, 所以图 3 便相应于其电荷数处于物理极限情形下的解.

我们将用 Jacobian 椭圆函数 $\text{sn}\left(\frac{\omega}{k}\right)$, cn , dn 与椭圆积分 $F(k/\phi)$ 来表示非线性场的平面波解. 用由如下的初始数据所确定的某些常数来给出自变量 $\omega(\tau)$ (ω 对 τ 是

图1 $s=1, C \leq 0$, 一个实根图2 $s=1, C > 0$, 三个实根图3 $s=-1, C < 0$, 三个实根

线性的), 模数 $k(0 \leq k \leq 1)$ 与角 ϕ 。现将具有物理意义的三种情形的解表示如下。

1. 如果在(23)式中, x 的立方形式具有两个复根与一个实根 $a_1 \geq 0$, 且 $s=1$, 则其解为

$$\begin{aligned} \rho &= a_1 + B \operatorname{cn}^2(\omega_1 | k_1) / \operatorname{sn}^2(\omega_1 | k_1) \operatorname{dn}^2(\omega_1 | k_1), \\ \omega_1 &= \left(\frac{B}{2}\right)^{1/2} \tau - \frac{1}{2} F(k_1 | \phi_1), \\ k_1^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3G}{2B}\right), \quad \cos \phi_1 = (\rho_0 - a_1 - B) / (\rho_0 - a_1 + B). \end{aligned} \quad (24)$$

2. x 的立方形式具有三个实根 $a_1 > b_1 > b_2$, 且 $s=1$, 则其解为

$$\begin{aligned} \rho &= a_1 + (a_1 - b_1) \operatorname{cn}^2(\omega_1 | k_1) / \operatorname{sn}^2(\omega_1 | k_1), \\ \omega_1 &= [(a_1 - b_1)/2]^{1/2} \tau - F(k_1 | \phi_1), \\ k_1^2 &= (b_1 - b_2) / (a_1 - b_2), \quad \sin \phi_1 = [(a_1 - b_1) / (\rho_0 - b_2)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (25)$$

3. x 的立方形式具有三个实根, 且 $s=-1$, 则其解为

$$\begin{aligned} \rho &= a_1 - (a_1 - b_1) \operatorname{sn}^2(\omega_1 | k_1), \\ \omega_1 &= [(a_1 - b_1)/2]^{1/2} \tau - F(k_1 | \phi_1), \\ k_1^2 &= 1 - k_1'^2 = (a_1 - b_1) / (a_1 - b_2), \quad \sin \phi_1 = [(a_1 - \rho_0) / (a_1 - b_1)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (26)$$

上述三种形式的解都是周期函数, 但只有第3种情形的解才是有界的, 其余的1和2两种情形的解在每周期内均为无界值。如果三种解中其中有两种解或三种解相重合, 则其解就退化为初等函数, 对此种情况本文将作如下讨论。

一旦 ρ 确定, 可由下式:

$$\phi = \frac{D}{2} \int_0^x \frac{1}{\rho(x)} dx = \frac{D}{2\sqrt{2}} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{x \sqrt{f(x)}} dx \quad (27)$$

算出 ϕ ; 第一种形式给出 $\phi = \phi(\tau)$, 而第二种形式给出 $\phi = \phi(\rho)$ 。由于这些积分均不是全部简化的, 所以将在下面写出某些特殊情形下的相位。

当下述诸物理量直接为正值时,

$$\begin{aligned} j^\mu &= \sqrt{|g|} P^\mu D, \\ H &= \frac{1}{2} |g| \left[(P^{02} + P^2) |\dot{R} + iR\dot{\phi}|^2 - \frac{1}{2} g P^2 R^4 \right] \\ &= \frac{1}{2} |g| \left[(P^2/2\rho)(\dot{\rho}^2 + D^2) - C\rho^2 \right], \end{aligned}$$

$$P = |g|P^0P|\dot{R} + iR\dot{\phi}|^2 = -|g|P^0P\left(\frac{1}{2}\varepsilon\rho^2 - C\right),$$

$$L = \frac{1}{2}|g|P^2\left(|\dot{R} + iR\dot{\phi}|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon R^4\right) = \frac{1}{2}|g|P^2[(\rho^2 + D^2)/2\rho + C], \quad (28)$$

则 H 不仅对于 $\lambda > 0$ 为正值, 且对于 $\lambda > 0$, $C\rho^2 \leq 0$ 也为正值. 此时 (28) 式可遍及 τ 积分, 该积分可通过 R 与 ϕ 的微分方程并进行分部积分而完成. 其结果为

$$\begin{aligned} \int^\tau H d\tau &= \frac{1}{6}|g|[2P^2R\dot{R} - C(3P^0 + P^2)\tau], \\ \int^\tau P d\tau &= \frac{1}{3}|g|P^0P(R\dot{R} - 2C\tau), \\ \int^\tau L d\tau &= \frac{1}{6}|g|P^2(2R\dot{R} - C\tau). \end{aligned} \quad (29)$$

如果想算出有限体积内所包含的能量或者动量或者相应于作用积分的能量或动量分布, 则上述表示式是非常有用的, 且实质上都是通过 ρ 而依赖于 τ 的.

下面将设法确定出现在上述三种解中的常数. 首先考虑对于初始值 $\tau = 0$ 有如下的积分常数:

$$D = 2\rho_0\dot{\phi}_0, \quad C = \rho_0\left(\frac{1}{2}\varepsilon\rho_0(\dot{\rho}_0/2\rho_0)^2 - \dot{\phi}_0^2\right), \quad (30)$$

其中带下标 0 的物理量是在 $\tau = 0$ 时的值. 对于 (24) 式所示的第 1 种解的常数为

$$-\infty \leq C \leq \frac{3}{4}D^{2/3}, \quad (31)$$

$$a_1 = \left(\frac{D^2}{4} + \sqrt{\Delta}\right)^{1/3} + \left(\frac{D^2}{4} - \sqrt{\Delta}\right)^{1/3},$$

$$\Delta = \frac{D^4}{16} - \frac{8C^3}{27}\varepsilon, \quad G = a_1, \quad B = (3a_1^2 - 2C)^{1/2}. \quad (32)$$

对于 $C < 0$, H 是正的; 但当 $C > 0$ 且除 $\lambda < 0$ 外, H 并不总是正的. 对于 (25) 式或 (26) 式所示的第 2 或第 3 种解的常数为

$$\varepsilon C \geq \frac{3}{4}D^{2/3}, \quad (33)$$

$$a_i = 2(2\varepsilon C/3)^{1/2}\cos\alpha/3,$$

$$b_{i,\pm} = -2(2\varepsilon C/3)^{1/2}\cos(\alpha \pm \pi)/3,$$

$$\cos\alpha = \frac{3D^2}{8C}\left(\frac{2\varepsilon C}{3}\right)^{-1/2}, \quad (34)$$

如果存在三个实根且 $\lambda > 0$, 则 H 就不是正定的.

在某些特殊情形下, 解为椭圆函数的情形实际上就退化为解为初等函数的情形. 这些形式为初等函数的解可由 R 的常微分方程与相应于 (23) 式的重根中求出. 当 $\varepsilon = 1$, $\Delta = 0$, $D \neq 0$, 可由第 1 或第 2 种形式的解求得下式:

$$\rho = a\left[1 + \frac{2}{3}\cot^2\left(\frac{\sqrt{3}a\tau}{2} - \beta\right)\right],$$

$$a = (2D^2)^{1/3}, \quad \sin \beta = \left[\frac{3a}{2\rho_0 + a} \right]^{1/2}. \quad (35)$$

此时, H 仅当其自变量足够大时才是正的. 当 $s_0 = -1, \Delta = 0, D \neq 0$ 时, 可由第 3 种形式的解求得

$$\rho = \rho_0 = \frac{1}{2} (2D^2)^{1/3}, \quad \phi = \sqrt{\rho_0} \tau. \quad (36)$$

上式相当于一种单色平面波. 对于此解, $H \geq 0$.

最后, 我们将给出实场解的一览表. 当 $D = 0$ 时, 仅有一个实质性参数 C ; 若采用 Jacobian 函数之间的关系式, 便可将上述三种形式解加以简化, 而椭圆函数的模数 k 就变为下式:

$$k_1^2 = k'^2 = k''^2 = \frac{1}{2}, \quad (37)$$

$$a = (2C)^{1/2}. \quad (38)$$

自变量可以写为

$$w_i = a^{1/2} \tau - F_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (39)$$

且其解为

$$\begin{aligned} s &= 1, C < 0, \\ R &= (2a)^{1/2} \frac{dn(w_1)}{\operatorname{sn}(w_1)\operatorname{cn}(w_1)} = 2a^{1/2} \left(\frac{1 + \operatorname{dn}(2w_1)}{1 - \operatorname{dn}(2w_1)} \right)^{1/2}; \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mid \phi_1\right), \quad \cos \phi_1 = (R_0^2 - a)/(R + a), \\ R_0^2 &\geq a, s = 1, C = 0, R = \sqrt{2} R_0 / (R_0/\tau + \sqrt{2}); \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} s &= 1, C > 0, R = (2a)^{1/2} \operatorname{dn}(w_1) / \operatorname{sn}(w_1), \\ F_1 &= F\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mid \phi_1\right), \quad \sin^2 \phi_1 = 2a / (R_0^2 + a), \quad R_0^2 \geq a; \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} s &= -1, C < 0, R = a^{1/2} \operatorname{cn}(w_1), \\ F_1 &= F\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mid \phi_1\right), \quad \sin^2 \phi_1 = (a - R_0^2) / 2a, \quad R_0^2 \leq a. \end{aligned} \quad (43)$$

对于解 (40) 与 (41) 式, H 是正定的. 在其它情形下, 当 $\lambda > 0$ 时, H 可能会变为负的.

四、非线性场方程的球面波解

如果要求 A 仅仅通过 $x_\mu x^\mu$ 而依赖于 x , 则非线性场方程便出现球面波解. 此时若采用如下的缩写记号:

$$s = |\lambda| |x_\mu x^\mu|, \quad \tau = \ln \sqrt{s}, \quad s = \operatorname{sgn} \lambda \cdot \operatorname{sgn} x_\mu x^\mu, \quad (44)$$

则 A 便可写为

$$A = \frac{1}{\sqrt{s}} R(\tau) e^{i\phi(\tau)}. \quad (45)$$

如果在场方程 (2) 中代入 (45) 式, 则可求得 R 和 ϕ 对于 τ 的微分方程. 由 (2), (45), (17) 诸式便可导出与 (18) 式相应的径向部分的微分方程为

$$\ddot{R} - R - \varepsilon R^3 - \frac{D^2}{4R^3} = 0, \quad (46)$$

同样也可再次求得 (22) 式. 其中

$$f(x) = \varepsilon x^3 + 2x^2 - 2Cx - \frac{D^2}{2}. \quad (47)$$

上式与 (23) 式相当, 且其解 $\rho = R^2$ 仍是一个椭圆函数, 也可以仿照前述平面波解的三种情形来进行描述. 将 (47) 式与 (23) 式比较, 前者比后者多了一项 $2x^2$, 从而增加了一些可计算的复杂性. 此种情形下的电流密度 j^μ 为

$$j^\mu = \frac{\varepsilon D}{\lambda} \frac{x^\mu}{(x_\rho x^\rho)^2}, \quad (48)$$

而 H , P 和 L 分别为

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2|\lambda||x_\mu x^\mu|^3} [(x^2 + x^2)(2\rho - C - \rho) + \varepsilon \rho^2 x^2], \\ P &= \frac{x_0 x}{2|\lambda||x_\mu x^\mu|^3} (2\rho - C - \rho + \varepsilon \rho^2), \\ L &= \frac{\text{sgn}(x_\mu x^\mu)}{2|\lambda||x_\mu x^\mu|^2} (2\rho - C - \rho + \varepsilon \rho^2). \end{aligned} \quad (49)$$

由简化的正性质可以读出的上述这些量的其它形式我们无法求出, 且都不能对 $|x|$ 直接积分. 不难发现, 物理量 H , P , L 及 j^μ 均随大距离 x^2 而迅速减小并在光锥处变为奇异的. 这些性质均与 A 中的因子 $S^{-\frac{1}{2}}$ 相关, 该因子是方程 (2) 的膨胀不变性的迹. 除了某些退化的情形 (见下文) 以外, 非线性场的球面波解的第 1, 2, 3 种情形均为相对于不连续膨胀变换的不变式: 如果其标量因子 η 的对数正比于解的周期的整数倍, 则在相应的膨胀变换下 A 仍然不变, 这是由于固定的正比常数依赖于变换的种类. 至于这种膨胀变换与量子场论的联系早在 1964 年已由 Mitter 讨论过^[1].

下面要写出出现在球面波解 1, 2, 3 种情形中的常数, 球面波解只不过较平面波解更复杂一些而已. 球面波解的常数为

$$D = 2\rho_0\phi_0, \quad C = \rho_0 \left[\frac{1}{2} \varepsilon \rho_0 - \left(\frac{\rho_0}{2\rho_0} \right)^2 - \phi_0^2 + 1 \right]. \quad (50)$$

若采用如下的缩写符号:

$$h = 1 + \frac{3}{2} \varepsilon C, \quad (51)$$

便有如下形式的结果:

若将 (51) 式应用于球面波解的第 1 种形式.

如果对于 $D^2 \geq 0$ 的任何 D , $C \leq -\frac{1}{2}$ 或者对于

$$1 + \frac{9}{4} C + h^{3/2} \leq \frac{27}{32} D^2, \quad C \geq -\frac{1}{2}, \quad (52)$$

则其根为

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{2}{3} \left[-1 + \left(\sqrt{\Delta} - 1 - \frac{9}{4} C + \frac{27}{32} D^1 \right)^{1/3} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\sqrt{\Delta} + 1 - \frac{9}{4} C - \frac{27}{32} D^1 \right)^{1/3} \right], \\
 \Delta &= \frac{27}{128} D^1 - \frac{D^1}{2} \left(1 + \frac{9}{4} C \right) - \frac{C^2}{2} - C^3, \\
 G &= a_1 + \frac{2}{3}, \quad B = (3a_1^2 + 4a_1 - 2C)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{53}$$

若将 (51) 式应用于球面波解的第 2 或第 3 种形式

$$\text{如果对于 } 1 + \frac{9}{4} C\varepsilon + h^{2/3} \geq \frac{27}{32} D^1, \quad C\varepsilon \geq -\frac{1}{2}, \tag{54}$$

则其根为

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{2}{3} (-\varepsilon + 2h^{1/3} \cos \alpha / 3), \quad b_{1,2} = \frac{2}{3} [-\varepsilon - 2h^{1/3} \cos(\alpha \pm \pi) / 3], \\
 \cos \alpha &= -\frac{\varepsilon}{h^{1/3}} \left(1 + \frac{9}{4} C\varepsilon - \frac{27}{32} D^1 \right).
 \end{aligned} \tag{55}$$

当上述解出现重根情况时, 和平面波解出现重根情况一样, 其解可用如下的初等函数表示.

在重根情形下, 且当 $\varepsilon = 1, \Delta = 0$, 便可求得

$$\begin{aligned}
 \rho &= -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} h^{1/2} [1 + \cot^2(\tau h^{1/2} - \beta)], \\
 \sin^2 \beta &= 2\sqrt{h} / \left[\rho_0 + \frac{2}{3} (1 + \sqrt{h}) \right];
 \end{aligned} \tag{56}$$

若当 $\varepsilon = -1, \Delta = 0$, 又可求得

$$\rho = \rho_0 = \frac{2}{3} (1 + \sqrt{h}), \quad \phi = \frac{D}{2\rho_0} \tau. \tag{57}$$

对于此种重根情形的解, H 是正的, 此时若在任意膨胀变换下, 非线性场仅具有一个恒定相位因子.

对于如下的相位:

$$\phi = \frac{D}{2} \int_0^\tau \frac{1}{\rho(x)} dx, \tag{58}$$

在一般情形下, 无法求出其明显的分析表示式.

综上所述, 我们将总结性地给出非线性场为实场 (即当 $D = 0$) 时的全部解的一览表如下:

$$\text{当 } \gamma = (1 + 2\varepsilon C)^{1/2}, \tag{59}$$

且当 $\varepsilon = 1, C > 0$ 时便有

$$\begin{aligned}
 R &= (2\gamma)^{1/2} \text{dn}(w_1 | k_1) / \text{sn}(w_1 | k_1), \quad k_1^2 = (1 + \gamma) / 2\gamma, \\
 w_1 &= \gamma^{1/2} \tau - F(k_1 | \phi_1), \quad \sin^2 \phi_1 = 2\gamma / (R_0^2 + 1 + \gamma);
 \end{aligned} \tag{60}$$

且当 $\varepsilon = 1, -\frac{1}{2} < C < 0$ 时便有

$$R = (1 + \gamma)^{1/2} \text{cn}(w_2 | k_2) / \text{sn}(w_2 | k_2), \quad k_2^2 = 2\gamma / (1 + \gamma),$$

$$w_2 = [(1 + \gamma)/2]^{1/2} \tau - F(w_2 | k_2), \quad \sin^2 \phi_2 = (1 + \gamma) / (R_0^2 + 1 + \gamma); \quad (61)$$

且当 $\varepsilon = 1, C < -\frac{1}{2}$ 时便有

$$R = (-2C)^{1/4} \text{cn}(w_3 | k_3) / \text{sn}(w_3 | k_3) \text{dn}(w_3 | k_3), \quad k_3^2 = \frac{1}{2} (1 - 1/\sqrt{-2C}),$$

$$w_3 = \left(-\frac{C}{2}\right)^{1/4} \tau - \frac{1}{2} F(k_3 | \phi_3), \quad \cos \phi_3 = (R_0^2 - \sqrt{-2C}) / (R_0^2 + \sqrt{-2C}); \quad (62)$$

且当 $\varepsilon = 1, C < 0$ 时便有

$$R = (1 + \gamma)^{1/2} \text{cn}(w_4 | k_4), \quad w_4 = \gamma^{1/2} \tau - F(k_4 | \phi_4),$$

$$\sin^2 \phi_4 = (1 + \gamma - R_0^2) / (1 + \gamma); \quad (63)$$

且当 $\varepsilon = -1, 0 < C < \frac{1}{2}$ 时便有

$$R = (1 + \gamma)^{1/2} \text{dn}(w_5 | k_5), \quad w_5 = [(1 + \gamma)/2]^{1/2} \tau - F(k_5 | \phi_5),$$

$$\sin^2 \phi_5 = (1 + \gamma - R_0^2) / (1 + \gamma). \quad (64)$$

而在退化的情形下, 且当 $\varepsilon = 1, C = -\frac{1}{2}$ 时便有

$$R = (R_0 + \tan \tau / \sqrt{2}) / (1 - R_0 \tan \tau / \sqrt{2}); \quad (65)$$

且当 $\varepsilon = \pm 1, C = 0$ 时便有

$$R = R_0 / \left[\cosh \tau - \left(1 \pm \frac{R_0^2}{2}\right)^{1/2} \sinh \tau \right]; \quad (66)$$

且当 $\varepsilon = -1, C = \frac{1}{2}$ 时便有

$$R = 1. \quad (67)$$

退化情形下的解在任意膨胀变换下均为不变式, 此时的 H 是正的。

五、非线性场的球面波解的某些应用

即便 R 的简化表示式已由方程 (60)–(67) 给出, 但对于非线性实场来说, 并非总有可能求得场的如下简化公式:

$$A = R(\tau - \ln \sqrt{s}) / \sqrt{s}, \quad s = |\lambda| |x_\mu x^\mu|. \quad (68)$$

一般来说, 场的结构是由具有振荡周期为 τ 的若干个振荡的迭加的奇点 $S^{-\frac{1}{2}}$ 来支配的。当 $\varepsilon = 1$ 时, 这些振荡本身都是无界的; 而当 $\varepsilon = -1$ 时, 并不引入附加的奇点; 对于 $s \neq 0$ 的特性需通过 Jacobian 函数的 Fourier 级数或者幂级数的展开来加以研究。当接近于 $s = 0$ 时, 这些展开式就不再有用了, 这是因为此时的振荡会随着 s 的减小而日益加快。

此处的某些解是采用前述的描述方式。如果 R 取自方程 (66), 则可得到

$$A = a / (1 - a^2 \lambda^2 x^2 / 8). \quad (69)$$

对于 $\lambda x^2 > 0$ 的情形, (69) 式便表示一个简化的极点; 但对于其它的情形, 如 $\lambda x^2 \leq 0$,

则(69)式并不表示奇点。这种奇点可解释为一个在 $\lambda \geq 0$ 时且以 $v \geq c$ 的速度而运动的冲激波,此波在无限长的时间 x_0 以后,波速才达到光速 $c^{[2]}$ 。由(69)式所表示的解也切合于 Euclidean 规范场论中的瞬态解^[3]。

正如本文第二部分所说的那样,我们可由上述业已给出的任何一个解并采用方程(2)的不变式而求得若干新的解。为了有助于人们准确地理解这一点,不妨举例说明。如果由场(68)式出发(该场具有由(60)–(67)式所表示的解中的任何一种解)并应用 $x^\mu \rightarrow x^\mu - c^\mu$ 的平移,再借助于由方程(11)和(12)所示的保角变换

$$b^\mu = -c^\mu/2c^2, \quad (70)$$

便可求得如下形式的解:

$$A = \frac{K}{[|(x-c)^2(x+c)^2|]^{1/2}} R(\ln \sqrt{\xi}), \quad \xi = |4c^2\lambda| \left| \frac{(x-c)^2}{(x+c)^2} \right|, \quad (71)$$

其中 K 是恒定的。

这种类型的解与由方程(64)所表示的 R 结合在一起,便可用于 Minkowski 空间的规范理论中^[4],并对于 Euclidean 瞬子解与 Minkowskian 半子解的关系的理解提供了契机。对于(69)式所示的场也可应用同样的方法,若选择 $\lambda a^2 c^2 = -2$,则其瞬子解为

$$A = 2ac^2/(x^2 + c^2), \quad (72)$$

若将方程(71)与(67)结合,则可导出^[5,6]

$$A = K/[|(x-c)^2(x+c)^2|]^{1/2}. \quad (73)$$

显然,类似的研究可以导出较(70)式更普遍的变换,且也可应用于本文第三部分的复场与平面波解。

- [1] H. Mitter, *Nuovo Cim.*, **32**(1964), 1789, 1904.
- [2] P. B. Burt, G. Pocsik, *Lett. Nuovo Cim.*, **17**(1976), 329.
- [3] E. Corrigan, D. B. Fairlie, *Phys. Lett.*, **B67**(1977), 69.
- [4] J. Cervero, L. Jacobs, C. R. Nohl, *Phys. Lett.*, **B59**(1977), 351.
- [5] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan, *Phys. Lett.*, **B65**(1976), 163.
- [6] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan, *Phys. Lett.*, **B72**(1977), 203.

PLANE AND SPHERICAL WAVES SOLUTIONS OF THE FIELD EQUATION FOR A COMPLEX SCALAR FIELD WITH A CUBIC NONLINEAR TERM IN FOUR DIMENSIONAL MINKOWSKI SPACE

LI FU-BIN

(Department of Physics, Huaibei Coal Teacher's College, Anhui)

ABSTRACT

The field equation for a complex scalar field with a cubic nonlinear term in four-dimensional Minkowski space is studied. Two classes of exact solutions, corresponding to solutions of plane and spherical waves, are presented.