

渡越辐射自由电子激光中自发辐射 与受激辐射的关系

刘 盛 纲 孙 雁

(成都电讯工程学院) (中国科学技术大学)

1987 年 10 月 19 日收到

Madey 定理是关于自发辐射与受激辐射之间关系的一个定理,它是自由电子激光中的一个基本定理。本文对渡越辐射自由电子激光器研究了这个问题,结果表明, Madey 定理的第一部分在渡越辐射自由电子激光中也存在对应的形式,但远为复杂;定理的第二部分形式不变。最后用所得结果进行了小信号增益的简化计算。

一、引 言

自发辐射与受激辐射的关系是自由电子激光研究中的一个基本物理问题。Madey 经过对这个问题的研究,于 1979 年发表了现在被称为 Madey 定理的如下公式^[1]:

$$\langle (r_f - r_i)^2 \rangle = 2\pi^2 \frac{E_0^2 T}{m^2 c^3 \omega^4} \frac{dP(\omega)}{d\Omega}, \quad (1)$$

$$\langle r_f - r_i \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{d\gamma_i} \langle (r_f - r_i)^2 \rangle, \quad (2)$$

式中 r_i 和 r_f 分别为电子在互作用区的入端和出端的相对论系数; E_0 为电磁波的电场分量 $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kz + \phi)$ 的幅值; $\langle \rangle$ 表示对初始位相 ϕ 的平均; T 为互作用时间; $\frac{dP(\omega)}{d\Omega}$ 为自发辐射的谱分布。

这个结果发表后受到很大重视,得到了进一步的研究与应用^[2,3,4,11],实验也证实了^[5,6]在所假设的条件下,即低增益、未饱和电子-光子相互作用以及平面波假设下,上面两个公式是成立的。这个定理最初是针对静磁泵自由电子激光导出的,静电泵场型及 Cerenkov 型自由电子激光的自发辐射谱有与静磁型相似的形式,所以(1),(2)两式对静电型及 Cerenkov 型也是成立的。

渡越辐射 (transition radiation) 是电子在穿越两种不同介电常数的介质界面时产生的,其自发辐射谱非常复杂^[7-9],具有自己的特点。

二、自发辐射与受激辐射关系的导出

电子在与电磁波的相互作用过程中满足

$$\frac{d}{dt}(mc^2\gamma) = e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (3)$$

在 \$(0, z)\$ 上积分上式

$$\gamma(z) - \gamma_i = \frac{e}{mc^2} \int_0^z \frac{1}{\beta_{\parallel}} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} dz. \quad (4)$$

在光场不太强的情况下, 可将上式展开成 \$E\$ 的级数^[4]

$$\gamma = \gamma_i + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots, \quad (5)$$

其中

$$\gamma_1 = \frac{e}{mc^2} \int_0^z \frac{1}{\beta_{\parallel}^0} \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \mathbf{E}(z, t^0, \varphi) dz, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 = \frac{e}{mc^2} \int_0^z dz \left\{ \left[\frac{d}{d\gamma_i} \frac{\boldsymbol{\beta}^0 \cdot \mathbf{E}(z, t^0, \varphi)}{\beta_{\parallel}^0} \cdot \frac{e}{mc^2} \cdot \int_0^z dz' \frac{\boldsymbol{\beta}^0}{\beta_{\parallel}^0} \cdot \mathbf{E}(z', t^0, \varphi) \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{\boldsymbol{\beta}^0}{\beta_{\parallel}^0} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}(z, t^0, \varphi)}{\partial t} \cdot \int_0^z dz' \frac{1}{c} \left(\frac{d}{d\gamma_i} \frac{1}{\beta_{\parallel}^0} \right) \cdot \frac{e}{mc^2} \int_0^{z'} dz'' \frac{\boldsymbol{\beta}^0}{\beta_{\parallel}^0} \cdot \mathbf{E}(z'', t^0, \varphi) \right] \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

这里 \$\boldsymbol{\beta}^0\$ 及 \$\beta_{\parallel}^0\$ 分别为电子未受电磁波扰动时的归一化速度矢量及纵向速度, 而

$$t^0 = \frac{1}{c} \int_0^z \frac{1}{\beta_{\parallel}^0} dz_0$$

将(5)式代入下面电子能量的一阶矩及二阶矩定义式, 并注意到 \$\gamma_1\$ 与 \$E\$ 成线性关系, 对 \$\varphi\$ 的平均为零, 于是

$$\langle \gamma_f - \gamma_i \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots) d\varphi \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_2(L) d\varphi = \langle \gamma_2 \rangle, \quad (8)$$

$$\langle (\gamma_f - \gamma_i)^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots)^2 d\varphi \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_1^2(L) d\varphi = \langle \gamma_1^2 \rangle, \quad (9)$$

式中 \$\gamma_1(L)\$, \$\gamma_2(L)\$ 为(6), (7)式取 \$z = L\$ 的值, \$L\$ 为互作用长度.

Madey 定理由(1), (2)式两部分组成, 分别对应渡越辐射讨论如下:

1. 自发辐射与二阶矩的关系

为简化讨论, 我们做如下假设: 1) 介质堆由某种介质箔片在真空中周期迭加而成, 周期共有 \$M\$ 个; 2) 介质片及真空有足够的厚度, 在分析自发辐射谱时可按半无限大处理^[10]; 3) 电子在各个界面上所辐射的能量相同.

假设电场有如下形式:

$$\mathbf{E}(z, t^0, \varphi) = \text{Re} \mathbf{E}_0 \exp[j(k_z z - \omega t^0 + \varphi)]. \quad (10)$$

将上式代入(6)式, 得

$$\begin{aligned} \gamma_1(z) &= \text{Re} \left(\frac{e E_0 \sin \theta}{mc^2} \right) \int_0^z \frac{\beta^0}{\beta_{\parallel}^0} \exp[j(k_z z' - \omega t^0 + \varphi)] dz' \\ &= \frac{e E_0 \sin \theta}{mc^2} \left\{ \left[\int_0^z \frac{\beta^0}{\beta_{\parallel}^0} \cos(k_z z' - \omega t^0) dz' \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_0^z \frac{\beta^0}{\beta_{\parallel}^0} \sin(k_z z' - \omega t^0) dz' \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cos(\varphi + \phi), \quad (11) \end{aligned}$$

式中 \$\theta\$ 为电子运动方向与电场 \$\mathbf{E}_0\$ 方向的夹角, 而 \$\phi\$ 由下式确定:

$$\cos \phi = \frac{\int_0^z dz' \frac{\beta^0}{\beta_{||}^0} \cos(k_z z' - \omega t^0)}{\left\{ \left[\int_0^z dz' \frac{\beta^0}{\beta_{||}^0} \cos(k_z z' - \omega t^0) \right]^2 + \left[\int_0^z dz' \frac{\beta^0}{\beta_{||}^0} \sin(k_z z' - \omega t^0) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (12)$$

将(11),(12)式代入(9)式,可得

$$\begin{aligned} \langle (\gamma_i - \gamma_i)^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{e E_0 \sin \theta}{m c^2} \right)^2 \left\{ \left[\int_0^L dz' \frac{\beta^0}{\beta_{||}^0} \cos(k_z z' - \omega t^0) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_0^L dz' \frac{\beta^0}{\beta_{||}^0} \sin(k_z z' - \omega t^0) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

单个界面上的自发辐射谱为^[10,11]

$$\frac{dP_0(\omega)}{d\Omega} = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{c}{32\pi^3} \cdot \left(\frac{\omega_p}{c} \right)^4 \left| \int_{z>0} [\hat{k} \mathbf{x} \mathbf{E}_i(\mathbf{x}, \omega)] \cdot \hat{k} e^{-i\hat{k} \cdot \mathbf{x}} d^3 x \right|^2, \quad (14)$$

式中 T_0 为穿越时间, ω_p 为介质的等离子体频率.

将(14)式中的横向坐标积出^[10],得到

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(\omega)}{d\Omega} &= \frac{1}{T_0} \cdot \left(\frac{e}{8\pi} \right)^2 \cdot \frac{\theta^2 \omega_p^4 Z^2}{c^5} \left\{ \left[\int_0^\infty dz \cos(k_z z - \omega t^0) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_0^\infty dz \sin(k_z z - \omega t^0) \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $t^0 = \frac{z}{U}$, 而 Z 为介质的形成长度^[8],

$$Z = \frac{4c}{\omega[1/\gamma^2 + (\omega_p/\omega)^2 + \theta^2]}. \quad (16)$$

比较(13)和(15)两式,利用假设条件2)及对相对论电子的辐射 $\theta \approx 1/\gamma \ll 1$, $\sin \theta \approx \theta$, 得到

$$\frac{dP_0(\omega)}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2} \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \frac{m^2 c^3}{E_0^2} \cdot Z^2 \cdot \left(\frac{\omega_p}{c} \right)^4 \langle (\gamma_{t_0} - \gamma_{i_0})^2 \rangle_0. \quad (17)$$

上式中脚标 0 表示电子通过一个界面时所取的值.

当 M 个周期介质迭加时,总的自发辐射谱可写成^[7-9]

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{dP_0(\omega)}{d\Omega} 4 \sin^2 \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \left(\frac{\sin^2 M X}{\sin^2 X} \right), \quad (18)$$

式中 l_1 及 l_2 分别为介质及真空的厚度,

$$X = \frac{l_1}{Z} + \frac{l_2}{4c/[\omega(1/\gamma^2 + \theta^2)]}.$$

将(17)式代入(18)式,注意到假设条件1),3),即得

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{Z^2}{8\pi^2} \cdot \sin^2 \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \cdot \left(\frac{\sin^2 M X}{\sin^2 X} \right) \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{m^2 c^3}{E_0^2} \cdot \left(\frac{\omega_p}{c} \right)^4 \cdot \langle (\gamma_i - \gamma_i)^2 \rangle. \quad (19)$$

这就是我们推出的自发辐射与二阶矩的关系, 式中 $T = 2MT_0$, 为电子穿过整个相互作用区所需时间; $\langle (\gamma_i - \gamma_i)^2 \rangle = 2M \langle (\gamma_{t_0} - \gamma_{i_0})^2 \rangle_0$, 为整个相互作用区上的二阶矩.

2. 一阶矩与二阶矩的关系

用文献[2]类似的方法,可以导出渡越辐射自由电子激光中一阶矩与二阶矩的结果,与(2)式相同.其推导就不赘述了.

结合(2)与(19)式,我们就得到了渡越辐射自由电子激光中自发辐射与受激辐射的关系

$$\langle r_1 - r_i \rangle = \frac{\frac{1}{2} \frac{d}{d\gamma_i} \left(\frac{dP(\omega)}{d\Omega} \right)}{\frac{Z'}{8\pi'} \sin' \left(\frac{l_i}{l_1} \right) \left(\frac{\sin^4 M X}{\sin^4 X} \right) \frac{1}{T} \frac{m^2 c^3}{E_0^2} \left(\frac{\omega_p}{c} \right)^4}. \quad (20)$$

三、小信号增益的简化计算

从(3)式出发,得到由电磁波引起的一阶扰动方程^[4]

$$mc' \frac{dr_1}{dt} = -e\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{v}_0 \cos(kz - \omega t + \varphi) = eE_0 v_0 \sin \theta \cdot \cos \left(kz - \frac{\omega z}{v_0 \cos \theta} + \varphi \right). \quad (21)$$

在互作用区域 $[0, L]$ 上积分上方程得

$$r_1 = \frac{eE_0 \sin \theta}{mc^2} \cdot \frac{\sin(\Delta k L + \varphi) - \sin \varphi}{\Delta k}, \quad (22)$$

式中 $\Delta k = k - \omega/(v_0 \cos \theta)$.

平方 r_1 后对 φ 在一个周期上平均给出

$$\langle r_1^2 \rangle = \frac{L^2}{2} \left(\frac{eE_0 \sin \theta}{mc^2} \right)^2 \frac{\sin^2 U}{U^2}, \quad (23)$$

式中 $U = \frac{L}{2} \left(k - \frac{\omega}{v_0 \cos \theta} \right)$.

由(2),(9),(23)式可得

$$\langle r_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{d\gamma_i} \langle r_1^2 \rangle = \left(\frac{L}{2} \right)^2 \left(\frac{eE_0 \sin \theta}{mc^2} \right)^2 \frac{d}{dU} \left(\frac{\sin^2 U}{U^2} \right) \frac{dU}{d\gamma_i}. \quad (24)$$

再将 v , P 和 U 之间的关系代入(24)式,可以求出

$$\langle r_2 \rangle = - \left(\frac{L}{2} \right)^3 \left(\frac{eE_0 \sin \theta}{mc^2} \right)^2 \frac{c^2 \omega (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)}{\gamma_i v_0^3 \cos^3 \theta} \cdot \frac{d}{dU} \left(\frac{\sin^2 U}{U^2} \right). \quad (25)$$

由能量守恒关系,最后求得增益

$$G = - \frac{\langle r_2 \rangle mc^2 n_0 v_0}{P_0} = \frac{e^2 n_0 \mu_0 \omega}{m_0 \gamma_i \beta_0^2 c} \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^3 \cdot \frac{\tan^2 \theta}{\cos \theta} \cdot (1 - \beta_0^2 \cos^2 \theta) \cdot \frac{d}{dU} \left(\frac{\sin^2 U}{U^2} \right). \quad (26)$$

四、结 论

从以上研究,可以得如下结论:

1. 由静磁泵场自由电子激光中导出的 Madey 定理在渡越辐射自由电子激光中也有

对应的关系。对第一部分, 两者具有一些共同的特点。但后者远为复杂, 这是由于渡越辐射的自发辐射谱很复杂的缘故, 它具有渡越辐射本身的特点, 这是本文讨论的重点; Madey 定理的第二部分形式不变。

2. 用文献[4]相似的方法, 由一阶矩与二阶矩的关系(2)式, 使我们在求出一阶矩后可直接求出二阶矩, 从而得到小信号增益, 不需要求二阶扰动, 这就使小信号增益计算大为简化。

- [1] J. M. J. Madey, *Nuovo Cimento*, **50B**(1979), 64.
- [2] N. M. Kroll, *Physics of Quantum Electronics*, **8**(1982), 315.
- [3] 刘盛纲, 相对论电子学, 科学出版社, (1987).
- [4] L. K. Grover and R. H. Pantell, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-21**(1985), 944.
- [5] D. A. G. Deacon *et al.*, *Opt. Commun.*, **40**(1982), 373.
- [6] D. A. G. Deacon and M. Xie, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-21**(1985), 391.
- [7] M. Ter-Mikaelian, *High Energy Electromagnetic Processes in Condensed Media*, New York, Wiley, (1972).
- [8] M. A. Piestrup and P. F. Finman, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-19**(1983), 357.
- [9] 孙雁, 成都电讯工程学院硕士论文.
- [10] J. D. J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2ed. John Wiley & Son, Inc., New York, (1975), p. 688.
- [11] Sun Yan (孙雁), *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-23**(1987), 1642.

A STUDY ON THE RELATIONSHIP BETWEEN THE SPONTANEOUS RADIATION AND THE STIMULATED RADIATION IN TRANSITION RADIATION FREE ELECTRON LASERS

LIU SHENG-GANG

(Chengdu Institute of Radio Engineering)

SUN YAN

(University of Science and Technology of China, Hefei)

ABSTRACT

As a fundamental theorem in free electron lasers, Madey Theorem reveals the relationship between the spontaneous radiation and the stimulated radiation. In this paper, this problem is studied for transition radiation free electron lasers. The results show that there is a formula corresponding to the first part of Madey Theorem, but the former is more complicated; while the second part remains the same. Then the results obtained are used to simplify the small signal gain calculation.