

无序区域上推广混合自旋模型的严格解

唐 坤 发 胡 嘉 桢

(上海交通大学应用物理系, 凝聚态物理研究所)

1987 年 12 月 21 日收到

本文运用 Baxter 提出的 IRF 模型的无序解条件研究一种推广混合自旋模型, 得到了该模型在无序区域上自由能的精确表达式以及无序区域上相互作用参数应满足的条件, 并讨论了某一特定方向上相关函数的渐近行为。

一、引 言

统计模型的严格解为我们提供了大量信息^[1]。特别值得一提的是历史上第一次被严格求解的伊辛模型^[2]。它证实了统计模型中相变的存在, 直接验证了临界指数的标度律^[1], 具有重大的理论价值。遗憾的是, 能严格求解的模型太少了。最近, 人们对一大类二维和三维的统计模型在无序区域上的严格解表示了极大的兴趣^[3-6]。除了很大一类的模型能在该区域上严格求解外, 另一个重要的理由就是无序区域上的严格解不仅能提供该区域内的信息, 运用新的展开技术还可以得到该区域附近的各种信息^[7]。目前, 已有各种技术用于求无序解。例如: 晶体生长概念^[3], 马尔可夫过程^[4], 转移矩阵^[5]以及 decimation 技术^[6]。最近, Baxter 运用转移矩阵, 得到了一般的 IRF 模型^[8]具有无序解的条件方程^[5]。

为研究 Schofield-Bowers 混合模型^[9]的普适类, 作者曾提出过一种推广的混合自旋模型^[10]。该模型由自旋 $1/2$ 和自旋 1 相间排列组成。每一个自旋 $1/2$ 以四个自旋 1 为最近邻。同样, 每个自旋 1 也以四个自旋 $1/2$ 为最近邻。由于它具有二个互相穿透的子晶格(每个子晶格由不同的自旋占据), 因此其平移对称性有所降低。尽管如此, 研究表明该模型具有伊辛型连续相变, 与伊辛模型属于同一普适类^[10]。如果对平方格子上推广混合自旋模型中所有自旋 1 求和, 则该模型约化为一个特殊的 IRF 模型。因此适用于 Baxter 条件方程。本文运用 Baxter 理论, 研究推广混合自旋模型的无序解。除得到与用 decimation 方法求得自由能表达式和无序解成立条件一致的结果^[11]外, 还进一步讨论了水平方向上相关函数的渐近行为及其对系统对称性的影响。

二、Baxter 方程及其在推广混合自旋模型情况下的解

推广混合自旋模型具有四种不同的相互作用参数, 其分布具有棋盘对称性(见图 1)。约化哈密顿量为

$$H = \sum_i K_r \sigma_i S_i + \sum_i \Delta S_i^2. \quad (1)$$

这里 $K_r = -J_r/kT$, r 根据棋盘对称性要求分别取 1, 2, 3, 4. 对所有自旋 1 求和, 该模型约化为一个均匀的 IRF 模型, 其权重函数为

$$w(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = \sum_s \exp[(K_1 \sigma_1 + K_2 \sigma_2 + K_3 \sigma_3 + K_4 \sigma_4)S + \Delta S^2]. \quad (2)$$

对于一般的 IRF 模型, Baxter 提出, 如果存在 κ , $\varphi(\sigma)$ 和非负函数 $f(\sigma_1, \sigma_2)$ 和 $g(\sigma_1, \sigma_2)$ 对所有 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 满足方程

$$\sum_{\sigma'_1} w(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma'_1) g(\sigma_1, \sigma'_1) f(\sigma'_1, \sigma_3) = \kappa \varphi(\sigma_1) f(\sigma_1, \sigma_2) g(\sigma_2, \sigma_3) / \varphi(\sigma_3), \quad (3)$$

则每个格点的配分函数为 κ . 自由能为 $\ln \kappa$. 在推广模型情况下, 设解的形式为

$$f(\sigma'_1, \sigma_3) = 1, \quad (4)$$

$$g(\sigma_1, \sigma'_1) = e^{G\sigma_1\sigma'_1}, \quad (5)$$

$$\varphi(\sigma) = 1. \quad (6)$$

将(2), (4), (5), (6)式代入(3)式, 有

$$\sum_{\sigma'_1, S} \exp[(K_1 \sigma_1 + K_2 \sigma_2 + K_3 \sigma_3 + K_4 \sigma'_1)S + \Delta S^2] \cdot \exp(G\sigma_1 \sigma'_1) = \kappa \exp(G\sigma_1 \sigma_3). \quad (7)$$

运用下列等式:

$$\sum_{\sigma_1} \exp(K_1 \sigma'_1 S + G\sigma_1 \sigma'_1) = 2 \operatorname{ch}(K_1 S + G\sigma_1) = A \exp[FS\sigma_1 + MS^2], \quad (8)$$

这里

$$A = 2 \operatorname{ch} G, \quad (9)$$

$$F = \frac{1}{2} \ln [\operatorname{ch}(K_1 + G) / \operatorname{ch}(K_1 - G)], \quad (10)$$

$$M = \frac{1}{2} \ln (\operatorname{ch}(K_1 + G) \cdot \operatorname{ch}(K_1 - G) / \operatorname{ch}^2 G). \quad (11)$$

(7)式等号左端可记为

$$A \sum_s \exp[K_2 \sigma_2 S + K_3 \sigma_3 S + (\Delta + M)S^2] \cdot \exp[(K_1 + F)S\sigma_1]. \quad (12)$$

由于(7)式等号右端与 σ_1 无关, 因此上式也应与 σ_1 无关, 这要求

$$K_1 + F = 0, \quad (13)$$

即

$$\frac{\operatorname{ch}(K_1 + G)}{\operatorname{ch}(K_1 - G)} = e^{-2K_1}. \quad (14)$$

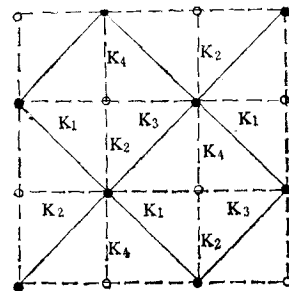


图1 圆点代表自旋 1; 圆圈代表自旋 1/2;

虚线表示棋盘平方格子上推广混合自旋模型的相互作用;

实线为对应的 IRF 模型的平方格子

进一步对 S 求和, (12) 式变为

$$A(1 + 2e^{\Delta+M}\text{ch}(K_2\sigma_2 + K_3\sigma_3)) = Be^{Q\sigma_2\sigma_3} \quad (15)$$

这里

$$B' = A' \cdot (1 + 2e^{\Delta+M}\text{ch}(K_4 + K_3))(1 + 2e^{\Delta+M}\text{ch}(K_2 - K_3)), \quad (16)$$

$$Q' = \ln[(1 + 2e^{\Delta+M}\text{ch}(K_4 + K_3))/(1 + 2e^{\Delta+M}\text{ch}(K_2 - K_3))]. \quad (17)$$

与(7)式等号右端比较有

$$G = Q, \quad (18)$$

$$\kappa = B. \quad (19)$$

由(14), (18)和(19)式, 不难求得

$$\kappa = \frac{2\text{ch}K_1 \cdot \text{sh}K_2 \cdot \text{sh}K_3 \cdot \text{sh}K_4}{\text{ch}K_1 \cdot \text{sh}K_2 \cdot \text{sh}K_3 \cdot \text{sh}K_4 + \text{sh}K_1 \cdot \text{ch}K_2 \cdot \text{ch}K_3 \cdot \text{ch}K_4}, \quad (20)$$

$$e^{\Delta} = \frac{-\text{sh}K_1 \cdot (e^{-K_1} + \text{th}K_1)^{-1}}{4(\text{ch}K_1 \cdot \text{sh}K_2 \cdot \text{sh}K_3 \cdot \text{sh}K_4 + \text{sh}K_1 \cdot \text{ch}K_2 \cdot \text{ch}K_3 \cdot \text{ch}K_4)}. \quad (21)$$

只要 K_1, K_2, K_3 和 K_4 以及 Δ 满足关系式(21), 则每格点自由能 $\frac{1}{2} \ln \kappa$ 由(20)式给出.

由于 Δ 为实数, e^{Δ} 须大于或等于零. 为此, 四个相互作用参数需满足

$$J_1 J_2 J_3 J_4 < 0, \quad (22)$$

$$|J_1| < |J_2|, |J_3| \text{ 和 } |J_4| \quad (23)$$

以及

$$T \leq T_D \quad (24)$$

这里 T_D 是由下式定义的某一温度

$$\frac{\text{ch}(|K_4| + |K_2|)}{\text{ch}(|K_4| - |K_2|)} = \frac{\text{sh}(|K_3| + |K_1|)}{\text{sh}(|K_3| - |K_1|)}. \quad (25)$$

它是相互作用参数满足(22)和(23)式的情况下, 使系统保持在无序区域的最大温度.

对于一组满足条件(22)和(23)式的参数, 温度越高, 由(21)式所确定的 Δ 值越大. 当 $T = T_D$, 即取最大值时, Δ 趋向于无穷; 反之, 温度越低, 由(21)式所确定的 Δ 值越小. T 趋向于零时, Δ 趋向于负无穷. 作者曾在文献[10]中提到, 自旋 1 中的零态可看成一个空穴. 参数 Δ 是自旋 1/2 占据自旋 1 晶格的化学势. 其大小可改变自旋 1 子晶格上自旋 1/2 或空穴的数目. Δ 取值越小, 晶格中空穴越多, 则越有利于无序. 特别地, 当 $\Delta = -\infty$ 时, 晶格中没有相互作用, 失去了形成有序的动力, 即使 $T = 0$ 系统仍处于无序状态. 反之, Δ 取值越大, 空穴越少, 则越有利于有序, 特别地, 当 $\Delta = \infty$ 时, 模型变为伊辛模型, 无序区域条件要求温度取最大值 T_D .

三、水平方向相关函数的渐近行为

Baxter 还证明, 如果除满足条件方程(3)外, 还满足如下方程:

$$\sum_{\sigma'_2} \omega(\sigma_1, \sigma'_2, \sigma_3, \sigma_2) \tilde{f}(\sigma_1, \sigma'_2) \tilde{g}(\sigma'_2, \sigma_3) = \kappa \tilde{\varphi}(\sigma_1) \tilde{g}(\sigma_1, \sigma_2) \tilde{f}(\sigma_2, \sigma_3) / \tilde{\varphi}(\sigma_3) \quad (26)$$

这里 $\bar{\varphi}$, $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 是非负函数, 则转移矩阵的左本征矢与右本征矢具有同样的乘积形式^[5]. 同时, 水平方向上的相关函数与一维的最近邻相互作用模型一样, 随距离指数衰减. 系统没有长程序(至少在水平方向上是这样).

显而易见, 如果令

$$\bar{f}(\sigma_1, \sigma'_1) = e^{G\sigma_1\sigma'_1}, \quad (27)$$

$$\bar{g}(\sigma'_1, \sigma_3) = 1, \quad (28)$$

$$\varphi(\sigma) = 1, \quad (29)$$

则(26)式满足, 且对应的 κ 和无序区域条件(20)–(26)式保持不变. 因此, (26)和(3)式能同时满足. 由 Baxter 理论, 推广混合自旋模型在水平方向上相关函数指数衰减, 没有长程序.

四、讨 论

从模型(1)式看, 四个相互作用参数应该是等价的. 而从无序区域条件(23)式看, 似乎不是如此. 我们指出, 这与确定的转移矩阵方向^[5]有关, 由于我们选取的转移矩阵方向与 K_2 , K_4 方向一致, 这时只是 K_1 和 K_3 等价, K_2 和 K_4 等价. K_2 和 K_4 的对称性可由我们的结果直接看出, K_1 和 K_3 的对称性可由方程(3)另一组解来证实. 这组解是

$$g(\sigma_1, \sigma'_1) = 1, \quad (30)$$

$$f(\sigma'_1, \sigma_3) = e^{G\sigma'_1\sigma_3} \quad (31)$$

$$\varphi(\sigma) = 1. \quad (32)$$

所得到的结果正好 K_1 和 K_3 交换. 与 decimation 方法^[11]比较, 这两组解对应于两个不同的边界条件.

由 Baxter 理论, 我们证明了水平方向上相关函数的指数衰减性质, 而无法肯定垂直方向相关函数的渐近行为如何. 转移矩阵方向的选取破坏水平和垂直两个方向上的对称性可能与这一事实有关.

- [1] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, New York: Academic, (1982).
- [2] E. Ising, *Z. Phys.*, **31**(1925), 251.
- [3] I. G. Enting, *J. Phys. A*, **11**(1978), 555; 2001.
- [4] A. W. Verhagen, *J. Stat. Phys.*, **15**(1976), 219; P. Rujan, *J. Stat. Phys.*, **29**(1982), 231, 247; P. Rujan, *J. Stat. Phys.*, **34**(1984), 615.
- [5] R. J. Baxter, *J. Phys. A* **17**(1984), L911.
- [6] M. T. Jackel and J. M. Maillard, *J. Phys. A* **18**(1985), 641, 1229; 2271; F. Y. Wu, *J. stat. phys.*, **40**(1985), 613.
- [7] A. Georges, D. Hansel, P. Le. Doussal and J. M. Maillard, *J. Phys. A*, **19**(1986), 1001.
- [8] R. J. Baxter, *J. Stat. Phys.*, **28**(1982), 1.
- [9] S. L. Schofield and R. G. Bowers, *J. Phys. A*, **13**(1980), 3697.
- [10] 唐坤发、胡嘉楨, *物理学报*, **35**(1986), 1048.
- [11] K-F Tang (唐坤发) and J-Z Hu (胡嘉楨), *J. Phys. A*, **21**(1988), L1207.

EXACT SOLUTION OF A GENERALISED MIXED SPIN MODEL ON DISORDER DOMAIN

TANG KUN-FA HU JIA-ZHEN

(Department of Applied Physics, Institute of Condensed Matter Physics, Shanghai Jiaotong University)

ABSTRACT

A condition given by Baxter for the general IRF model to exhibit a disorder solution is applied to a generalised mixed spin model. The exact expression for the free energy and the condition ensuring the validity of it are obtained. The asymptotic behaviour of the intra-row correlations is discussed.