

# 弹丸消融过程的数值分析 (I)

陶悦群 邱励俭

(中国科学院等离子体物理研究所)

1987 年 11 月 16 日收到

本文给出  $T_e \leq 5\text{keV}$  条件下弹丸消融过程的双区数值解法, 同时给出与数值解结果相拟合的消融速率等物理量的解析表达式。计算结果表明, 弹丸消融的主要屏蔽区域不是消融云, 而是表面蒸发层;  $T_e \leq 5\text{keV}$  下的消融物流动为超音速流动。

## 一、引言

在文献 [1] 中, 我们通过求出弹丸自屏蔽消融过程的自治解析近似解, 修正了 Parks 理论中的一些物理结果。然而, 由于解析法的限制, 文献 [1] 中仍然作了某些简化, 因此其结果的精确性尚难断定。本文作为文献 [1] 的继续, 首先将给出一种可实际应用于弹丸消融过程定量计算的双区数值解法, 继而讨论弹丸的消融图象以及文献 [1] 中解析解的适用性。

## 二、弹丸消融过程的双区数值解法

描述弹丸消融过程的自治方程组为流体方程 ( $r > r_p$ ), 电子输运方程 ( $r \geq r_p$ ), 弹丸表面守恒方程, 理想气体状态方程 ( $r \geq r_p$ ) 等 8 个方程组 (参见文献 [1])。这 8 个方程组的外边界条件为

$$r \rightarrow \infty, P \rightarrow 0, E \rightarrow E_\infty, q \rightarrow q_\infty. \quad (1)$$

各方程组中各量的意义以及所有常数的数值均见文献 [1]。方程组各量紧密关联, 内外边界条件与方程相互偶合, 因此, 完全精确的解析解和数值解都很难求得, 求解的关键在于发展一种足够精确又易于应用的近似数值解法。

影响弹丸消融过程的最主要因素是自屏蔽效应, 根据文献 [1] 及其它有关理论的分析, 均一致认为, 屏蔽效应作用的主要区域在弹丸表面附近 ( $r < 2r_p$ )。在远离弹丸表面的消融物扩散区, 入射等离子体电子的慢化和稀疏效应都非常小 (即  $E \simeq E_\infty, q \simeq q_\infty$ )。据此, 我们提出以下弹丸消融过程的双区数值解方案:

(1) 把弹丸外围的消融物流动区分成两个区域。在远离弹丸表面的区域, 消融物密度小, 入射电子的能量和流量的变化均微, 因此我们总可以找到一个  $r_*$  ( $r_*/r_p \gg 1$ ), 在  $r \geq r_*$  的区域,  $E/E_\infty \approx 1, q/q_\infty \approx 1$ 。从而可在方程组中作近似,

$$\sigma(E) = \sigma(E_\infty); L(E) = L(E_\infty); \frac{dq}{dr}(E) = \frac{dq}{dr}(E_\infty),$$

进而运用与文献[1]同样的试探解法,便可求得诸方程组在 $r \geq r_i$ 区域中的解析解,在这组解析解中,所有物理量都是待定参数 $G = \rho_0 r_p^2 \dot{r}_p$ 的函数。

(2) 在 $r < r_i$ 区域,既无近似成立,也不能作近似,因为弹丸表面附近是影响弹丸消融的主导区,很小的近似都可能使结果产生显著的误差。

在这一区域作数值解。先给定一 $G$ 值,从 $r = r_i$ 界面开始向内求解各变量的空间分布。当到达弹丸表面 $r = r_p$ 时(实际上是蒸发层外表面),将各量代入表面守恒方程,如不满足,则调整给定的 $G$ 值,由 $r = r_i$ 界面重新向内求解,直到结果满足表面守恒方程为止,即求得了方程组唯一规定的 $G$ 值(即 $\dot{r}_p$ )以及 $\rho(r)$ ,  $v(r)$ ,  $T(r)$ ,  $P(r)$ ,  $E(r)$ ,  $q(r)$ ,  $M(r)$ 等物理量。

### 三、弹丸消融过程的讨论

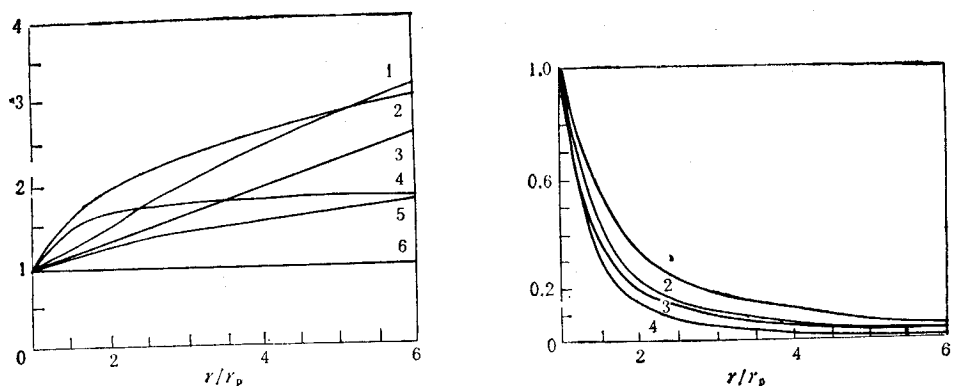
我们用上述双区数值解法对两种典型的托卡马克等离子体条件弹丸的消融过程进行了解,计算结果分别见图1和表1。

表1 弹丸消融速率及各表面量

|                                                                                          |    | $\dot{r}_p(\text{cm/s})$ | $\rho_p(\text{g/cm}^3)$ | $v_p(\text{cm/s})$ | $T_p(\text{eV})$ | $P_p(\text{dyn/cm}^2)$ | $E_p/E_\infty$ | $q_p/q_\infty$ | $M_p$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|--------------------------|-------------------------|--------------------|------------------|------------------------|----------------|----------------|-------|
| $n_e = 10^{13} \text{cm}^{-3}$<br>$T_e = 1 \text{keV}$<br>$r_p = 0.02 \text{cm}$         | 解析 | 10.9                     | $0.17 \times 10^{-4}$   | $0.48 \times 10^6$ | 0.05             | $0.8 \times 10^8$      | 0.752          | 0.426          | 1.89  |
|                                                                                          | 数值 | 11.8                     | $0.18 \times 10^{-4}$   | $0.51 \times 10^6$ | 0.08             | $0.14 \times 10^7$     | 0.86           | 0.64           | 1.55  |
| $n_e = 5 \times 10^{13} \text{cm}^{-3}$<br>$T_e = 5 \text{keV}$<br>$r_p = 0.1 \text{cm}$ | 解析 | 96.4                     | $0.61 \times 10^{-4}$   | $0.12 \times 10^7$ | 0.3              | $0.18 \times 10^8$     | 0.752          | 0.426          | 1.89  |
|                                                                                          | 数值 | 100                      | $0.83 \times 10^{-4}$   | $0.91 \times 10^6$ | 0.62             | $0.5 \times 10^8$      | 0.87           | 0.64           | 1.0   |

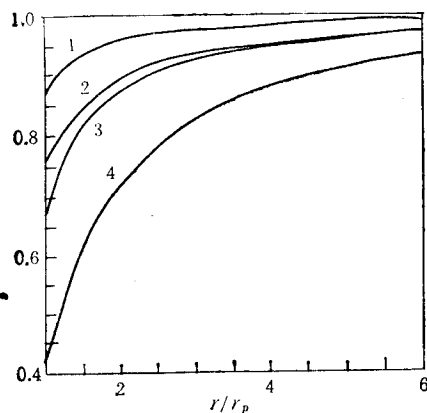
由图1和表1可初步分析出弹丸消融的物理过程。当弹丸进入高温等离子体中后,弹丸表面受到等离子体粒子的加热后消融,并向外喷射,立即形成消融云,对弹丸表面的加热起一定的屏蔽减缓作用。由于 $q_i/q_e \ll 1$ ,所以对消融云和弹丸表面加热的主要是高温等离子体中的电子分量。入射电子进入消融云后与冷消融物发生弹性和非弹性碰撞,从而被慢化和稀疏,而冷消融物由此加速、加热和发生溶解、电离等原子过程(本文以 $Q$ 代表这一部分的耗能份额)。

由结果可见,冷消融物所形成的屏蔽层对入射电子的屏蔽效应不是很显著,且各种参数下的屏蔽效果差异不大,基本是个常数,即入射电子通过冷消融云后,电子的能量损耗掉约15%;能量通量损耗掉约35%。这种常屏蔽效应的结论与文献[1]中的结果相同,它表明弹丸在等离子体中消融屏蔽过程是自调的。当等离子体参数较高时,消融层也趋于更稠密,慢化与稀疏能力随着增强,结果导致各种参数下,消融云的屏蔽效果都是相同的。然而,较文献[1]中的解析结果相比,数值解结果更表明了消融云的屏蔽能力不强(解析解的结果为 $E_p/E_\infty \simeq 0.75$ ,  $q_p/q_\infty \simeq 0.42$ ,而数值解的结果为 $E_p/E_\infty \simeq 0.86$ ,  $q_p/q_\infty \simeq 0.64$ )。这说明解析法中的近似确实明显地影响到结果的精度。



(a) 曲线 1 为  $T/T_p$  解析结果; 曲线 2 为  $v/v_p$  数值结果; 曲线 3 为  $T/T_p$  数值结果; 曲线 4 为  $M/M_p$  数值结果; 曲线 5 为  $v/v_p$  解析结果; 曲线 6 为  $M/M_p$  解析结果

(b) 曲线 1 为  $P/P_p$  解析结果; 曲线 2 为  $\rho/\rho_p$  解析结果; 曲线 3 为  $P/P_p$  数值结果; 曲线 4 为  $\rho/\rho_p$  数值结果



(c) 曲线 1 为  $E/E_w$  数值结果; 曲线 2 为  $E/E_w$  解析结果; 曲线 3 为  $q/q_w$  数值结果; 曲线 4 为  $q/q_w$  解析结果

图 1 各物理量的分布情况

计算参数:  $T_e = 5 \text{ keV}$ ;  $n_e = 5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ;  $r_p = 0.1 \text{ cm}$

计算结果表明: 在弹丸的表面蒸发层内, 在发生加热升华相变的同时, 还伴随有急速的吸热、加温、加热和膨胀过程。这一表面蒸发层吸收了约 65% 的入射电子的初始能量通量, 使得升华了的弹丸粒子在这一薄层里发生巨大的变化:  $\rho_0$  变至  $\rho_p$  ( $\rho_p/\rho_0 \approx 10^{-5}$ );  $v_0(=0)$  变至  $v_p(>10^5 \text{ cm/s})$ ;  $T_0(=0)$  变至  $T_p(\approx 0.1 \text{ eV})$ 。这一急变物理过程消耗的能量不仅比升华相变吸热要大得多, 也比整个消融云的吸热大。因此, 表面蒸发层是最重要的物理区域, 既是相变区, 也是主要屏蔽吸热区, 其过程细节和可能产生哪些新的效应, 值得进一步研究。

消融粒子离开蒸发层进入消融流动区后变化减缓。由图 1 可见, 在  $r = 2r_p$  处, 各物理量与  $r = r_p$  的蒸发层外表面相比,  $\rho/\rho_p \approx 0.1$ ,  $v/v_p \approx 2$ ,  $T/T_p \approx 1.3$ ,  $P/P_p \approx 0.16$ , 可见这一变化陡度要比蒸发层内小得多, 且随着远离弹丸表面, 各量的变化梯度也逐渐减缓。这一结果展示了与 Parks 分析不同的物理图象。在 Parks 图象中, 各物理量在

$r_p < r < 2r_p$  内发生主要变化, 而我们图象中的主要变化区为弹丸表面。值得一提的是, 由文献 [1] 中解析法得到的各量径向分布与数值精确结果有明显的偏差。

对于消融物的流动, 计算结果表明, 其性质随不同的参数情形而异。文献 [1] 中常超音速流动的结论需要修正。流动的性质主要由  $T_e$  决定, 与其它参数关联不大。当  $T_e < 5 \text{ keV}$  时, 流动为超音速; 当  $T_e \approx 5 \text{ keV}$  时, 弹丸表面的马赫数  $M_p \approx 1$ ; 而当  $T_e > 5 \text{ keV}$  时,  $M_p < 1$ , 呈跨音速流动。 $T_e$  越大, 音速半径偏离弹丸表面越远。对于跨音速流动, 在音速半径处流体方程呈奇异性, 本文的双区数值解法不能处理, 一种新的数值解法正在研究之中。消融物的流动性质不仅因  $T_e$  而变, 在一种参数情形中, 马赫数  $M$  沿径向也是递增变化的, 而不是常数。

#### 四、各物理量的显式表达

尽管本文的双区数值解法可以求解弹丸的消融过程, 但对物理分析和实验工作者来说, 能有一个精确的显式解则要方便得多。我们通过将数值解的结果与文献 [1] 中解析

表 2 解析解与数值解结果的比较

|                                                                    |     | $r_{pA}/r_{pN}^*$ | $\rho_{pA}/\rho_{pN}$ | $v_{pA}/v_{pN}$ | $T_{pA}/T_{pN}$ | $P_{pA}/P_{pN}$ | $E_{pA}/E_{pN}$ | $q_{pA}/q_{pN}$ | $M_{pA}/M_{pN}$ |
|--------------------------------------------------------------------|-----|-------------------|-----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $r_p = 0.1 \text{ cm}$<br>$n_e = 4 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ | 1** | 0.93              | 0.88                  | 1.06            | 0.53            | 0.47            | 0.87            | 0.63            | 1.46            |
|                                                                    | 2   | 0.95              | 0.82                  | 1.15            | 0.50            | 0.41            | 0.86            | 0.63            | 1.63            |
|                                                                    | 3   | 0.96              | 0.73                  | 1.31            | 0.48            | 0.35            | 0.86            | 0.64            | 1.90            |
| $r_p = 0.1$<br>$n_e = 5 \times 10^{13}$                            | 1   | 0.93              | 0.88                  | 1.06            | 0.53            | 0.46            | 0.87            | 0.63            | 1.46            |
|                                                                    | 2   | 0.95              | 0.82                  | 1.15            | 0.50            | 0.41            | 0.87            | 0.63            | 1.63            |
|                                                                    | 3   | 0.96              | 0.73                  | 1.31            | 0.48            | 0.35            | 0.86            | 0.64            | 1.90            |
| $r_p = 0.1$<br>$n_e = 6 \times 10^{13}$                            | 1   | 0.93              | 0.88                  | 1.06            | 0.53            | 0.46            | 0.87            | 0.63            | 1.46            |
|                                                                    | 2   | 0.95              | 0.82                  | 1.15            | 0.50            | 0.41            | 0.87            | 0.63            | 1.63            |
|                                                                    | 3   | 0.96              | 0.73                  | 1.31            | 0.48            | 0.35            | 0.86            | 0.64            | 1.90            |
| $r_p = 0.15$<br>$n_e = 4 \times 10^{13}$                           | 1   | 0.93              | 0.88                  | 1.06            | 0.53            | 0.46            | 0.87            | 0.63            | 1.46            |
|                                                                    | 2   | 0.95              | 0.82                  | 1.15            | 0.50            | 0.41            | 0.87            | 0.63            | 1.63            |
|                                                                    | 3   | 0.96              | 0.73                  | 1.31            | 0.48            | 0.35            | 0.86            | 0.64            | 1.90            |
| $r_p = 0.15$<br>$n_e = 5 \times 10^{13}$                           | 1   | 0.93              | 0.88                  | 1.06            | 0.53            | 0.46            | 0.87            | 0.63            | 1.46            |
|                                                                    | 2   | 0.95              | 0.82                  | 1.15            | 0.50            | 0.41            | 0.87            | 0.63            | 1.63            |
|                                                                    | 3   | 0.96              | 0.73                  | 1.31            | 0.48            | 0.35            | 0.86            | 0.64            | 1.90            |
| $r_p = 0.15$<br>$n_e = 6 \times 10^{13}$                           | 1   | 0.93              | 0.88                  | 1.06            | 0.53            | 0.46            | 0.87            | 0.63            | 1.46            |
|                                                                    | 2   | 0.95              | 0.82                  | 1.15            | 0.50            | 0.41            | 0.86            | 0.63            | 1.63            |
|                                                                    | 3   | 0.96              | 0.73                  | 1.31            | 0.48            | 0.35            | 0.86            | 0.64            | 1.90            |
| $r_p = 0.2$<br>$n_e = 4 \times 10^{13}$                            | 1   | 0.93              | 0.88                  | 1.06            | 0.53            | 0.46            | 0.87            | 0.63            | 1.46            |
|                                                                    | 2   | 0.95              | 0.82                  | 1.15            | 0.50            | 0.41            | 0.87            | 0.63            | 1.64            |
|                                                                    | 3   | 0.96              | 0.73                  | 1.32            | 0.48            | 0.35            | 0.86            | 0.64            | 1.90            |
| $r_p = 0.2$<br>$n_e = 5 \times 10^{13}$                            | 1   | 0.93              | 0.88                  | 1.06            | 0.53            | 0.46            | 0.87            | 0.63            | 1.46            |
|                                                                    | 2   | 0.95              | 0.82                  | 1.15            | 0.50            | 0.41            | 0.87            | 0.63            | 1.64            |
|                                                                    | 3   | 0.96              | 0.73                  | 1.32            | 0.48            | 0.35            | 0.86            | 0.64            | 1.91            |
| $r_p = 0.2$<br>$n_e = 6 \times 10^{13}$                            | 1   | 0.93              | 0.88                  | 1.06            | 0.53            | 0.46            | 0.87            | 0.63            | 1.46            |
|                                                                    | 2   | 0.95              | 0.82                  | 1.15            | 0.50            | 0.41            | 0.87            | 0.63            | 1.64            |
|                                                                    | 3   | 0.96              | 0.73                  | 1.32            | 0.48            | 0.35            | 0.86            | 0.64            | 1.91            |

\* 下标 pA 代表解析解表面量; pN 代表数值解表面量。

\*\* 1, 2, 3 分别为  $T_e = 3, 4, 5 \text{ keV}$  时的计算结果。

解的结果比较后,发现这一目的可以达到. 表 2 给出了几组参数下数值解与解析解的比较.

由表 2 不难发现,各比值呈现非常明显的规律性. 对于  $T_e$  一定,当等离子体密度  $n$  和弹丸半径  $r_p$  改变时,各比值基本不变. 这说明各物理量与  $n, r_p$  的函数关系与解析解结果基本相似. 当  $r_p, n$  不变,  $T_e$  改变时,各比值呈现出有规律的递增与递减. 这说明,这些物理量与  $T_e$  的函数关系虽与解析解结果不同,但也只是相差一个与  $T_e$  有关的前置因子,即

$$\dot{r}_p = \beta_{\dot{r}_p}(T_e) \dot{r}_{pA}, \quad (2)$$

$$\rho_p = \beta_{\rho_p}(T_e) \rho_{pA}, \quad (3)$$

$$v_p = \beta_{v_p}(T_e) v_{pA}, \quad (4)$$

$$T_p = \beta_{T_p}(T_e) T_{pA}, \quad (5)$$

$$P_p = \beta_{P_p}(T_e) P_{pA}, \quad (6)$$

$$M_p = \beta_{M_p}(T_e) M_{pA} = 1.89 \beta_{M_p}(T_e), \quad (7)$$

$$E_p/E_w \simeq 0.86, \quad (8)$$

$$q_p/q_w \simeq 0.64. \quad (9)$$

以上各式中下标 A 表示解析解结果. 通过对各种  $T_e$  ( $\leq 5 \text{ keV}$ ) 下的结果进行分析拟合,最后得到

$$\beta_{\dot{r}_p}(T_e) \simeq 1.11 T_e^{-0.035}, \quad (10)$$

$$\beta_{\rho_p}(T_e) \simeq T_e^{0.159}, \quad (11)$$

$$\beta_{v_p}(T_e) \simeq 1.1 T_e^{-0.189}, \quad (12)$$

$$\beta_{T_p}(T_e) \simeq 1.67 T_e^{0.128}, \quad (13)$$

$$\beta_{P_p}(T_e) \simeq 1.67 T_e^{0.268}, \quad (14)$$

$$\beta_{M_p}(T_e) \simeq 0.85 T_e^{-0.252}. \quad (15)$$

(10)–(15) 式中  $T_e$  均以  $\text{keV}$  为单位. 据 (2), (10) 式和文献 [1] 中的 (14) 式,可得

$$\dot{r}_p \propto r_p^{-2/3} n_e^{1/3} T_e^{1.13}. \quad (16)$$

## 五、结 论

本文给出了  $T_e \leq 5 \text{ keV}$  下弹丸消融过程的双区数值解法,并通过数值解与解析解结果的比较,得到了弹丸消融速率及各表面物理量的拟合解析表达.

根据本文的计算与讨论,有以下结论:

1. 消融云的屏蔽作用不大,表面蒸发层为主要的吸热屏蔽机构,这一区域值得进一步研究.

2. 在各种等离子体参数下,入射电子到达弹丸蒸发表面时,其能量损失的份额及能量通量的损失份额基本上是一样的.

3. 消融云的流动性质与  $T_e$  有很大关系,  $T_e < 5 \text{ keV}$  时为超音速流动;  $T_e > 5 \text{ keV}$  时消融云中将出现跨音速间断.

- [1] 陶悦群、邱励俭, 核聚变与等离子体物理, 6(1986), 243.

## NUMERICAL ANALYSIS FOR PELLET ABLATION (I)

TAO YUE-QUN    QIU LI-JIAN

(*Institute of Plasma Physics, Academia Sinica, Hebei*)

### ABSTRACT

In this paper, we present a two-region numerical analysis method for pellet ablation in plasma where  $T_e \leq 5$  keV, as well as the analytic expressions of ablation variables, which conform with the results of our numerical analysis. Our results show that the major shield region is pellet surface vaporizing layer rather than ablatant cloud and that the flow of ablatant is supersonic when  $T_e \leq 5$  keV.