

随机介质层对低混杂波传播的影响

潘 传 红 邱 孝 明

(中国西南物理研究所)

1987 年 12 月 16 日收到

本文采用随机模型,讨论等离子体边界层密度涨落对低混杂波的散射.色散关系中考虑了电磁项及 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 对流项.结果表明:考虑电磁效应之后,低混杂波的透射率(透过密度涨落层进入等离子体中心区的波强度与入射波强之比)减小,而反射率增加.

一、引 言

低混杂波加热和电流驱动日益引起人们的重视.因此,研究低混杂波在介质中的传播、尤其是在等离子体边界层附近的行为,是十分必要的.这是因为边界层附近存在较强的密度涨落.密度涨落对于低混杂波的影响表现在两方面:一方面,密度涨落对入射波的调制(通过波-波相互作用)将引起波频率的展宽和波矢量的改变,从而影响波的可接近性及功率吸收;另一方面,由于密度涨落层的散射,部分入射波将被反射,从而使透射波(进入等离子体中心区的波)强度减弱.

等离子体边界层附近的密度涨落现象,已经在不同的托卡马克装置上陆续观察到.通常的解释是:这种涨落是由于某些微观及宏观的不稳定性,以及不同程度的湍流态所引起的^[1]. Morales 和 Lee 等人^[2]略去其它因素的影响,只考虑波电场的有质动力对等离子体密度的调制,提出“低混杂波传播锥‘丝化’”的理论模型. Papanicolaou^[3], Morrison^[4] 和 Grossman 等人^[5]提出并发展了“随机理论”的数学模型,即把等离子体边界层看作“随机介质层”,研究其对低混杂波的散射.本文的工作即属于这一理论模型.本文的模型中,除包含 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 对流项之外,还考虑了电磁效应对透射波强度的影响.

二、基本方程

前面已经指出,等离子体边界层的密度涨落与多种因素有关.假定在各种因素(包括入射的低混杂波)的调制下,密度涨落趋于稳态.取平板模型,设密度分布与 y 无关,磁场均匀,沿 z 轴指向,即

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{z}, n(x) = n_0 [1 + \xi(x)] \quad \langle \xi \rangle = \left\langle \frac{d\xi}{dx} \right\rangle = 0. \quad (1)$$

其中 $\xi(x) \equiv \frac{\delta n}{n_0}$ 为密度涨落量(在涨落层外 $\xi = 0$);尖括号表示求平均值或期望值,

设密度涨落层的厚度为 l , 平静等离子体区的折射率为 N_p . 三个区域的坐标分别设为: $x < 0$ 为平静等离子体区, $0 < x < l$ 为密度涨落区, $x > l$ 为真空区或低混杂波入射区(波自右侧入射). 三个区域(用 N_p 归一)的相对折射率记为

$$\frac{N(x)}{N_p} = \begin{cases} \mu & (x > l) \\ 1 + \text{随机修正量} & (0 < x < l) \\ 1 & (x < 0) \end{cases} \quad (2)$$

由于密度涨落现象通常只存在于边界附近较薄的介质层内, 可以认为层内的平均密度值 n_0 为常数; 同时, 由于边界层温度较低, 可取冷等离子体近似. 这时介电张量为

$$\epsilon = \epsilon_{\perp}(\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y}) + \epsilon_{\parallel}\hat{z}\hat{z} + i\epsilon_{xy}(\hat{x}\hat{y} - \hat{y}\hat{x}). \quad (3)$$

在低混杂波频率范围 ($\Omega_e \gg \omega \gg \Omega_i$)

$$\epsilon_{\perp} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \approx 1, \quad \epsilon_{xy} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega\Omega_e}, \quad \epsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \approx -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (4)$$

其中 Ω_e 和 ω_{pe} 分别为电子回旋频率和电子等离子体频率,

$$\omega_{pe}^2 = \langle \omega_{pe}^2 \rangle (1 + \xi) \quad \langle \omega_{pe}^2 \rangle \equiv 4\pi n_0 e^2 / m_e. \quad (5)$$

如果在密度涨落层外, $\xi = 0$.

本文仍基于静电近似. 在静电近似下 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, 色散关系由 Poisson 方程给出, 为 $\nabla \cdot (\epsilon \cdot \nabla\phi) = 0$. 考虑到在等离子体边界层, 电磁效应不能忽略^[5], 我们引入电磁修正项. 色散关系变为

$$\nabla \cdot (\epsilon \cdot \nabla\phi) + D\phi = 0. \quad (6)$$

其中介电张量的元素由 (4) 式及 (5) 式给出, ϕ 为波电场的势

$$D = \frac{\omega^2}{c^2} (-\epsilon_{\parallel}\epsilon_{\perp} + \epsilon_{xy}^2) \quad (7)$$

系考虑了电磁效应后, 引入的最低量级的修正^[6].

将 (3)–(5), (7) 诸式代入 (6) 式, 并注意到在低混杂波频率范围有

$$\frac{\omega}{\Omega_e} \ll 1$$

及涨落层外 $\xi = 0$, 我们得到

$$\nabla_{\perp}^2 \phi - i\mathbf{A} \cdot \nabla\phi + (1 + \xi) \left[-\frac{\langle \omega_{pe}^2 \rangle}{\omega^2} \nabla_{\parallel}^2 + \langle D \rangle \right] \phi = 0. \quad (8)$$

其中 $\nabla_{\perp}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\nabla_{\parallel}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, 以及

$$\mathbf{A} \equiv M\hat{z} \times \nabla\xi, \quad M \equiv \frac{\langle \omega_{pe}^2 \rangle}{\omega\Omega_e}, \quad \langle D \rangle \equiv \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\langle \omega_{pe}^2 \rangle}{\omega^2} \left(1 + M \frac{\omega}{\Omega_e} \right). \quad (9)$$

将波电场表示成 $\phi = u(x)e^{i(k_y y + k_z z) - i\omega t}$ 的形式, 其中 ω 和 k_z 为常数, 由入射波源决定. 同时, 我们还假定 k_y 为常数(事实上, 即假定了波源在 y 方向的尺度无穷大). 另外, 注意到在 $x > l$ 区域, 相对折射率为 μ , 故电场的 Fourier 展式应为 $u(x)e^{i\mu(k_y y + k_z z) - i\omega t}$. 由 (8) 式, 我们得到三个区域波电场满足的方程

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} + \mu^2 \tilde{k}_0^2 (1 + \mathcal{G}) u &= 0 \quad (x > l), \\ \frac{d^2 u}{dx^2} + \tilde{k}_0^2 \left\{ 1 + \varepsilon \xi(x) + \varepsilon \mathcal{C} \frac{d\xi}{dx} + \mathcal{G} [1 + \varepsilon \lambda \xi(x)] \right\} u &= 0 \quad (0 < x < l), \\ \frac{d^2 u}{dx^2} + \tilde{k}_0^2 (1 + \mathcal{G}) u &= 0 \quad (x < 0). \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{k}_0^2 &\equiv k_0^2 - k_y^2, \quad k_0^2 \equiv \frac{\langle \omega_{pe}^2 \rangle}{\omega^2} k_z^2, \quad \mathcal{G} \equiv \frac{\langle D \rangle}{\tilde{k}_0^2}, \\ \mathcal{C} &\equiv -M k_y / k_0^2, \quad \lambda \equiv \tilde{k}_0^2 / k_0^2, \quad \varepsilon \equiv \varepsilon / \lambda \end{aligned} \quad (11)$$

ε 表示密度涨落的幅度, M 及 $\langle D \rangle$ 已在 (9) 式中定义. 采用符号 ε , 涨落量 ξ 可改写成

$$\xi \rightarrow \varepsilon \xi(x) \quad \xi(x) \rightarrow O(1). \quad (12)$$

由于我们只限于讨论小涨落的情形, 故将 ε 定为 1 级小量.

略去电磁项及 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 对流项(即令 $\mathcal{G} = 0$, $\mathcal{C} = 0$) 时, (10) 式即回到文献 [4] 所讨论的情况, 该文得到透射系数的解析表达式. 如果只有 $\mathcal{G} = 0$ 而 $\mathcal{C} \neq 0$, 即为文献 [1] 的情况, 文献 [1] 指出: 当 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 对流项耦合进来之后, 透射系数变小, 而反射系数增加.

三、电磁效应对透射系数的影响

现在讨论 $\mathcal{G} \neq 0$ 的情形. 由方程 (10), 我们得到

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + K^2 \left(1 + \varepsilon \frac{1 + \lambda \mathcal{G}}{1 + \mathcal{G}} \xi + \varepsilon \frac{\mathcal{C}}{1 + \mathcal{G}} \frac{d\xi}{dx} \right) u = 0 \quad (0 < x < l) \quad (13)$$

以及

$$u(x) = \begin{cases} e^{-i\mu K x} + R e^{i\mu K x} & (x > l), \\ T e^{-iK x} & (x < 0). \end{cases} \quad (14)$$

其中 $K^2 \equiv \tilde{k}_0^2 (1 + \mathcal{G})$. 这里我们将入射波的强度取为 1, R 和 T 即表示复反射系数及透射系数. 散射层无波能吸收时, $|R|^2 = 1 - |T|^2$. 显然地, 增加散射层的厚度, 将使得透射系数减小(或使反射系数增大). 因此反射系数 R 及透射系数 T 是涨落量 ξ 及涨落层厚度 l 的函数.

由 $x > l$ 区域波电场的解析式, 我们有

$$\frac{u_x(l)}{u(l)} = i\mu K (R e^{i\mu K l} - e^{-i\mu K l}) / (R e^{i\mu K l} + e^{-i\mu K l}).$$

由此, 我们得到

$$R(l, \xi) = e^{-i2\mu K l} \cdot \frac{i\mu K u(l) + u_x(l)}{i\mu K u(l) - u_x(l)} \quad (l \geq 0). \quad (15)$$

对 (15) 式求导, 并利用 $x = l$ 处函数 u 及其导数 u_x 的连续性, 我们得到反射系数 R 的随机微分方程

$$\frac{dR}{dl} = \frac{i\tilde{k}_0(1+\mathcal{G})^{1/2}}{2\mu} \left[(1-\mu') + \tilde{\varepsilon} \frac{1+\lambda\mathcal{G}}{1+\mathcal{G}} \xi(l) + \tilde{\varepsilon} \frac{\mathcal{C}}{1+\mathcal{G}} \xi_x(l) \right] \cdot [Re^{i\mu\tilde{k}_0(1+\mathcal{G})^{1/2}l} + e^{-i\mu\tilde{k}_0(1+\mathcal{G})^{1/2}l}]^2 \quad (16)$$

在(15)及(16)式中, $u_x \equiv \frac{du}{dx}$, $\xi_x \equiv \frac{d\xi}{dx}$. 此外,在(16)式中 K 已换成

$$\tilde{k}_0(1+\mathcal{G})^{1/2}.$$

(16)式是一个右端含随机项的非线性微分方程(本文的模型中, $\xi(x)$ 表示随机涨落),当 $\mu=1$, $\mathcal{G}=0$, $\mathcal{C}=0$ 时,即回到 Papanicolaou 导出的表达式(见文献[3](2.6)式).原则上,我们可以参照文献[3]的做法,用 Hashminskii^[7]的理论求解方程(16).在这里,我们采用一种更为简便的方法,即直接讨论(13)式的微分方程.这是一个“双边值问题”的随机微分方程.

用密度涨落量 ξ 的空间连接长度 γ 对有关的量无量纲化,我们得到

$$t \equiv x/\gamma, L \equiv l/\gamma, \bar{K}^2 \equiv \gamma^2 K^2, u(x) \rightarrow u(t), \quad (17)$$

散射层的波电场方程可以改写为无量纲形式

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \bar{K}^2(1 + \tilde{\varepsilon}\xi)u = 0. \quad (18)$$

这样,我们便可以将边值问题的微分方程作为“初值问题”来处理(t 看成是“时间”变量). (18)式中

$$\xi(t) \equiv \frac{1+\lambda\mathcal{G}}{1+\mathcal{G}} \xi(t) + \frac{\mathcal{C}}{\gamma(1+\mathcal{G})} \frac{d\xi}{dt}. \quad (19)$$

如果 $\xi(t)$ 为 Markov 过程,我们可以证明:等效过程 $\xi(t)$ 完全满足文献[3]中所罗列的条件,即 $\xi(t)$ 仍为 Markov 过程. 方程(18)在形式上与文献[4]所讨论的基本方程完全相同,因此,透射波强度的统计平均值为

$$\frac{1}{\mu} \langle |T|^2 \rangle = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-1/4}}{\tilde{\varepsilon}} \int_0^\infty dv \frac{v e^{-v^2}}{[\theta + \cosh(2\sqrt{\tilde{\varepsilon}} v)]^{1/2}} \tanh^{-1} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{2} \sinh(\sqrt{\tilde{\varepsilon}} v)}{[\theta + \cosh(2\sqrt{\tilde{\varepsilon}} v)]^{1/2}} \right\} + O(\tilde{\varepsilon}^2). \quad (20)$$

在得到这个结果的过程中, Morrison^[4]作了“散射层内无波能吸收”的假定,即

$$|T|^2 = 1 - |R|^2.$$

(20)式中

$$\tilde{s} \equiv \tilde{\varepsilon}^2 L \frac{\bar{K}^2}{2} \bar{I}(2\bar{K}), \theta = \frac{\mu' + 1}{2\mu}, \quad (21)$$

$\bar{I}(2\bar{K}) = \int_0^\infty \bar{\rho}(\tau) \cos(2\bar{K}\tau) d\tau$ 为等效过程 ξ 的功率谱密度的一半, $\bar{\rho}(\tau)$ 为 ξ 的两点关联函数. 注意到 $\langle \xi'(t)\xi(s) \rangle = \rho'(t-s)$, $\langle \xi(t)\xi'(s) \rangle = -\rho'(t-s)$ 以及

$$\langle \xi'(t)\xi'(s) \rangle = -\rho''(t-s),$$

我们有

$$\bar{\rho}(\tau) \equiv \langle \xi(t+\tau)\xi(t) \rangle = \left(\frac{1+\lambda\mathcal{G}}{1+\mathcal{G}} \right)^2 \rho(\tau) - \frac{\mathcal{C}^2}{\gamma^2(1+\mathcal{G})^2} \rho''(\tau),$$

由此,得到

$$\bar{I}(2\bar{K}) = \left[\left(\frac{1 + \lambda \mathcal{G}}{1 + \mathcal{G}} \right)^2 + 4 \frac{\mathcal{C}^2}{r^2(1 + \mathcal{G})^2} \bar{K}^2 \right] I(2\bar{K}). \quad (22)$$

其中 $I(2\bar{K})$ 为过程 ξ 的功率谱密度的一半。如果托卡马克等离子体边缘的密度涨落为漂移波型,功率谱密度为^[8]

$$\int_0^\infty \rho(\tau) \cos(k\tau) d\tau = 2\sqrt{\pi} \xi_0 e^{-k^2/\xi_0^2},$$

其中 $\xi_0 \equiv 1/r$ 为密度涨落量特征长度的倒数。故当涨落为漂移波型时,

$$I(2\bar{K}) = 2\sqrt{\pi} \xi_0 e^{-4(k_0^2 - k_y^2)/\xi_0^2} e^{-4(k_0^2 - k_z^2)/\xi_0^2}. \quad (23)$$

另外,我们还注意到,在低混杂波频率范围,

$$|\epsilon_H| \cong \frac{\omega_{pe}}{\omega^2} \gg 1.$$

这就是说,即使在 $k_y \approx k_z$ 时,仍有 $k_y \ll k_0$ 。即 $k_y/k_0 \ll 1$, 及 $\lambda \approx 1$ 。由此我们得到

$$\bar{\epsilon} \cong \epsilon, \left(\frac{1 + \lambda \mathcal{G}}{1 + \mathcal{G}} \right)^2 = 1 - 2 \frac{\mathcal{G}}{1 + \mathcal{G}} \frac{k_y^2}{k_0^2} + \left(\frac{\mathcal{G}}{1 + \mathcal{G}} \right)^2 \frac{k_y^2}{k_0^2} \cong 1. \quad (24)$$

由 (21)–(24) 诸式,得到

$$\bar{s} = [1 + \mathcal{G} + 4\mathcal{C}^2 k_0^2 (1 - k_y^2/k_0^2)] (1 - k_y^2/k_0^2) \frac{\exp[4(k_0/\xi_0)^2 (k_y/k_0)^2 (1 + \mathcal{G})]}{\exp[4\mathcal{G}(k_0^2/\xi_0^2)]} s. \quad (25)$$

其中 $s \equiv \epsilon^2 L \frac{\gamma^2 k_0^2}{2} I(2k_0)$ 为文献 [4] 中所定义的参数。不考虑 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 对流项及电磁项的贡献(即令 $\mathcal{C} = 0$, $\mathcal{G} = 0$) 时, $\bar{s} = s$ 。

文献 [9] 指出: 只有当 $k_0^2 \ll \xi_0^2$ (即混杂波的波长远大于密度涨落特征长度) 时, 才会导致大角度散射, 即密度涨落层对低混杂波有明显的散射效应; 反之, 当 $k_0^2 \gg \xi_0^2$ (低混杂波的波长远小于涨落量的特征长度) 时, 几何光学描述即为很好的近似。因此, 本文讨论

$$k_0^2 \ll \xi_0^2 \quad (26)$$

的情形。在 $k_0^2 \ll \xi_0^2$ 条件下, 同时注意到

$$\frac{k_y}{k_0} \ll 1,$$

我们有

$$\bar{s} \cong (1 + \mathcal{G} + 4\mathcal{C}^2 k_0^2) (1 - k_y^2/k_0^2 - 4\mathcal{G} k_0^2/\xi_0^2) s.$$

这个结果表明: 当 $\mathcal{G} \neq 0$ 或者 $\mathcal{C} \neq 0$, 以及二者均不为零时, $\bar{s}$ 的值都会变大。(20) 式的结果可以图 1 表示。从图 1 中可以看出: $\bar{s}$ 的值越大, 低混杂波的透射强度愈小。这就是说, 将有更多的低混杂波被散射层的密度涨落所反射。因此, 可以得出结论: 考虑了电磁效应之后, 在低混杂波穿越密度涨落区的过程中, 将有更大的份额被反射, 从而使

进入等离子体中心区的低混杂波减少。根据定义以及 $\frac{\omega}{\Omega_e} \ll 1$, $\frac{k_y}{k_0} \ll 1$ 等关系, 我们得到

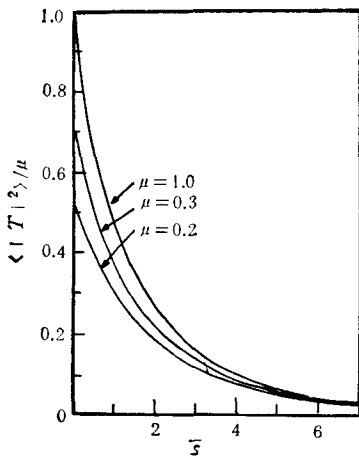


图 1 透射波强度随参数 $\bar{s}$ 的变化

$$\mathcal{G} \cong \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\langle \omega_{pe}^2 \rangle}{\omega^2} \left(1 + M \frac{\omega}{Q_e} \right) / \left(\frac{\langle \omega_{pe}^2 \rangle}{\omega^2} k_z^2 \right) \approx \frac{1}{N_{\parallel}^2}, \quad (27)$$

$N_{\parallel} \equiv \frac{ck_z}{\omega}$ 为平行折射率。取典型的 Alcator C 电流驱动参数 $N_{\parallel} \approx 2-3^{[10]}$, $\mathcal{G} \approx 0.1-0.25$, 即参数 $\bar{s}$ 可增大 10% 以上。但对于该装置上的加热实验, 初始 $N_{\parallel}$ 可为 $\approx 3-5^{[11]}$, 这时, 电磁修正项即变得不太重要。相比较而言, 在一定的条件下, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 对流项对透射强度的影响可以成为支配因素。文献 [1] 指出: 当 $\frac{k_y}{k_0} \approx 0.5-1.0$ 时, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 对流项对散射过程的影响即变得重要。

虽然我们只限于研究低混杂波的传播, 未涉及波能的吸收, 但仍可以得出结论: 在研究低混杂波与托卡马克等离子体边界层相互作用时, 有必要采用电磁的色散关系。

- [1] W. Grossmann *et al.*, *Phys. Fluids*, **28**(1985), 1783.
- [2] G. J. Morales and Y. C. Lee, *Phys. Rev. Lett.*, **35**(1975), 930.
- [3] G. C. Papanicolaou, *SIAM J. Appl. Math.*, **21**(1971), 13.
- [4] J. A. Morrison *et al.*, *Commun. Pure. Appl. Math.*, **24**(1971), 473.
- [5] W. Grossmann *et al.*, *Phys. Fluids*, **27**(1984), 1699.
- [6] P. M. Bellon, *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1980), 1407; P. Hsu *et al.*, *Nucl. Fusion*, **22**(1982), 1679.
- [7] R. Z. Hashminskii, A limit theory for the solutions of differential equations with random right-hand side, *Theor. Probability Appl.*, **11**(1966), p. 390.
- [8] P. L. Andrews *et al.*, *Phys. Fluids*, **26**(1983), 2537.
- [9] R. E. Slusher *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978), 400.
- [10] P. Bonoli, *IEEE Trans. Plasma Science*, **PS-12**(1984), 95.
- [11] M. Porkolab, *IEEE Trans. Plasma Science*, **PS-12**(1984), 107.

LOW-HYBRID WAVE PROPAGATION AFFECTED BY A RANDOM MEDIUM LAYER

PAN CHUAN-HONG QIU XIAO-MING

(Southwestern Institute of Physics, Leshan, Sichuan, China)

ABSTRACT

Making use of the stochastic model, we have studied the low-hybrid wave scattering by the density fluctuations in the edge-regions of Tokamak plasmas. The dispersion relation under consideration includes not only the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ convective derivation term but also the electromagnetic correction term. The results show that the transmission coefficient decreases, whereas the reflection coefficient increases when the electromagnetic effect is taken into account.