

非理想 MHD 流的奇异吸引子与混沌现象¹⁾

王晓钢²⁾ 刘 悦 邱孝明

(大连工学院物理系)

(中国西南物理研究所)

1987 年 7 月 13 日收到

本文提出并研究了在剪切磁场中非理想 MHD 流的 Rayleigh-Bénard 问题的一个模型,得到了关于这个模型的一个新的非线性微分方程组. 理论和数值分析表明: 这组方程蕴含一个奇异吸引子,它具有不同于 Lorenz 吸引子的一些新特性;更重要的是,已知的三条通往混沌的道路并存于这个模型之中. 应当指出,在迄今所有已知的向混沌态过渡的三条道路共存的模型中,我们的方程组是唯一没有外部周期驱动项的,更直接地体现了非线性确定论系统的“内在”随机性. 另外,对这个简单模型进行数值模拟,我们观察到磁力线的随机运动、磁力线重联和磁岛的生成.

一、引 言

等离子体不稳定性的研究和湍流理论已有了较大的发展. 但人们对湍流的发生机制、发展方式、及其本质还没有一个系统的、令人满意的理论描述. 特别是受控热核聚变研究中两个悬而未决的重大问题——托卡马克等离子体的大破裂 (major disruption) 和电子的反常热导 (anomalous heat conductivity), 促使人们进一步弄清磁约束等离子体系统中不稳定性与湍流问题的本质,解决诸如湍性扩散、磁力线的随机运动、磁面的破裂与磁岛的生成、电阻撕裂模的非线性演化以及漂移不稳定性的非线性发展等重要理论问题.

对磁约束等离子体系统中混沌现象的研究始于 70 年代末,短短几年之内,涌现出大量的文献^[1,2,6-9]. 磁场效应的加入带来更多的运动模式和时空尺度,产生了普通流体中不曾有过的各种不稳定性^[10]和“奇异”行为,更丰富了人们对非线性系统的认识. 目前理论工作大体沿着两个方向进行: (1)从等离子体湍流(主要指 MHD 湍流³⁾)理论的波-波相互作用出发,研究非线性的波耦合现象,展示湍流发生机制^[7,8,11,12]. (2)在 MHD 理论框架内,研究等离子体的宏观湍动,特别是磁力线的随机运动,以及由此引起的磁力线重联与磁岛生成,磁面的破坏,撕裂模不稳定性等现象. 其中用二维保面积映象来模拟托卡马克磁面的横断面以及用 Hamilton 力学描述磁力线的无规运动已引起极大的兴趣^[9]. 但在撕裂模不稳定性和其它一些物理现象中,电阻的耗散效应十分重要. 所以人们也致力于研究磁约束等离子体的非理想 MHD^[1,4,8].

1) 本文的部分结果曾发表在 Chinese Physics Letters 上^[1,2].

2) 现在通讯处: 美国纽约哥伦比亚大学应用物理与核工程系.

3) 磁约束等离子体湍流分两大类——Vlasov 湍流和 MHD 湍流.

二、磁流体力学中的 Rayleigh-Bénard 问题

普通流体中 Rayleigh-Bénard 问题的 Lorenz 模型^[4]是人们最早注意到奇异吸引子的著名例子. 在 Rayleigh-Bénard 问题中, 两无限平板间的流体受到来自下面的加热, 并保持顶部与底部之间有一温差, 重力的作用是垂直向下的. 这样一个系统在某个时刻可以处于一种整体的静力学平衡. 但当温度差使 Rayleigh 数超过临界值时, 平衡成为不稳定的. 用 Navier-Stokes 方程研究不稳定性的发展, 通常是把表示运动的流函数 ψ 和表示温度剖面与平衡分布的偏离 θ 所满足的偏微分方程化为 ψ 和 θ 的 Fourier 展开式的系数对时间 t 的常微分方程组 (经过适当截断后的有限个常微分方程). Lorenz 的模型, 其中心思想就是他认为在这个问题中最主要的运动模式, 是对流运动的振幅 $X_1(t)$, 上升流和下降流的温差 $X_2(t)$, 和纵向温度剖面与静态平衡分布的偏差 $X_3(t)$. 它们耦合在如下的一组常微分方程中:

$$\dot{X}_1 = -\sigma X_1 + \sigma X_2, \quad (1)$$

$$\dot{X}_2 = -X_1 X_3 + r X_1 - X_2, \quad (2)$$

$$\dot{X}_3 = X_1 X_2 - b X_3. \quad (3)$$

式中参数 σ 为 Prandtl 数, r 为用临界值规一化的 Rayleigh 数, b 为一个几何因子. Lanford^[13] 对这个模型的数值分析发现, 当 $r > 24.06$ 时, 运动轨道基本上收缩在 (X_2, X_3) 平面附近, 吸引子由两片构成, 特别是此时轨道是“混沌的”. 所以他称之为 Lorenz 奇异吸引子.

如果在 Rayleigh-Bénard 问题中的流体是非理想的磁流体——具有有限电导率的等离子体, 并加上约束磁场, 我们面前摆着一个 MHD (磁流体力学) 的 Rayleigh-Bénard 问题. 在这样一个系统中会出现什么现象呢? 或者说, 普通流体的 Lorenz 奇异吸引子将发生什么变化呢? Treve 等人首先研究了这一问题^[6]. 他们沿无限平板的水平方向加上相互平行的均匀恒定磁场 B_0 和电流 J_0 , 出于与 Lorenz 类似的物理考虑, 得到了 Lorenz 模式 X_1, X_2 和扰动磁场矢势基波幅度 $X_4(t)$ 所满足的方程组

$$\dot{X}_1 = -\bar{\nu} X_1 + X_2, \quad (4)$$

$$\dot{X}_2 = -X_1 X_3 + X_1 - \kappa X_2 + \eta X_4, \quad (5)$$

$$\dot{X}_3 = X_1 X_2 - \kappa b X_3, \quad (6)$$

$$\dot{X}_4 = -\eta X_4. \quad (7)$$

式中 b 仍表示几何因子, $\bar{\nu}$, κ , η 分别表示无量纲的等离子体粘性系数、热导率和电阻率. 我们注意到 X_4 与 Lorenz 模式之间几乎没有耦合, 且是迅速衰减的 ($X_4(t) = X_4(0)e^{-\eta t}$). 对于长时间行为, 方程组 (4)–(7) 退化为 Lorenz 方程 (只要重新适当定义参数和变数), 因此我们称之为 MHD Lorenz 方程组.

但等离子体理论和大量实验都告诉我们, 磁场模式与流体模式之间的耦合是重要的, 并会激发起新的振荡模式. 在我们看来, MHD Lorenz 方程组之所以只蕴含 Lorenz 吸引子, 而没有新的现象出现, 关键在于 Treve 等人的磁场位形取得简单. 我们的基本想法是, 复杂的磁场位形会大大加强磁场模式与流体模式之间的耦合, 激励新的混沌运动,

并产生真正的 MHD 奇怪吸引子。

三、剪切磁场中的一组新的方程

我们仍然考虑非理想 MHD 流的 Rayleigh-Bénard 问题。相应的磁流体力学方程组为^[6]

$$\rho_0 \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho_0[1 + \varepsilon(T_0 - T_1)]\mathbf{g} + \rho_0\nu\nabla^2\mathbf{V} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (8)$$

$$\rho_0 C_v \frac{DT}{Dt} = \rho_0 C_v \kappa \nabla^2 T + \eta J^2, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}, \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (11)$$

式中 $\mathbf{g}$ 为重力加速度, $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla$.

如 Treve 等人^[6], 假设(见图 1)

(1) 对流运动仅发生在 (x, z) 平面内, x 方向存在空间周期性, 特征长度为 h/a ,

h 为两平板间等离子体厚度, a 为一个无量纲的常数[见(22)–(24)式].

(2) 系统底部受到均匀加热, 使等离子体上下底面之间有一温度差。

(3) 在 y 方向加入均匀恒定的磁场 $\mathbf{B}_0$ 和电流密度 $\mathbf{J}_0$.

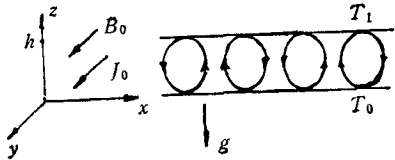


图 1

与文献[6]不同, 为加强磁场与流体模式之间的耦合, 我们另外引入 x 方向的均匀磁场 $\mathbf{B}_x = (J_0 h/2, 0, 0)$, 见图 1。这样总的约束磁场为

$$\mathbf{B}_0 = B_0(z/L_s, 1, 0), \quad (12)$$

式中 $L_s = B_0/J_0$ 为剪切长度。

由上述假设可知所有物理量均与 y 坐标无关, 并得到边界条件

$$V_x(x, 0, t) = V_z(x, h, t) = 0, \quad (13)$$

$$T(x, 0, t) = T_0, \quad T(x, h, t) = T_1 \quad (T_0 - T_1 = \Delta T > 0) \quad (14)$$

及周期性条件

$$V_x(nh/a, z, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=nh/a} = 0. \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (15)$$

且由方程(11), 我们引入速度矢势

$$\boldsymbol{\phi}(x, z, t) = (0, \phi(x, z, t), 0) \quad (16)$$

及磁矢势

$$\mathbf{A}(x, z, t) = \left(\frac{1}{2} B_0 z, \tilde{A}(x, z, t) - \frac{1}{2} B_0 z^2/L_s, -\frac{1}{2} B_0 x \right). \quad (17)$$

式中 $\mathbf{A} = (0, \mathbf{A}, 0)$ 为扰动磁场矢势。可得到

$$\mathbf{V} = \nabla \times \boldsymbol{\phi} = (-\alpha\phi/\partial z, 0, \partial\phi/\partial x), \quad (18)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = (-\partial\tilde{A}/\partial z + B_0 z/L_z, B_0, \partial\tilde{A}/\partial x), \quad (19)$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = (0, J_0 - \nabla^2 \tilde{A}, 0). \quad (20)$$

写 $T(x, z, t) = T^* + \theta(x, z, t)$, T^* 是 $\mathbf{V} = 0, \mathbf{A} = 0$ 时的静态平衡温度场分布, 满足方程组

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T^*}{\partial t} = 0, \quad \rho_0 c_v \kappa \nabla^2 T^* + \eta J_0^2 = 0$$

和边界条件 $T^*(z=0) = T_0, T^*(z=h) = T_1$. 容易解出

$$T^*(z) = -\frac{\eta J_0^2}{2\rho_0 c_v \kappa} z^2 + \left(T_1 - T_0 + \frac{\eta J_0^2 h^2}{2\rho_0 c_v \kappa}\right) \frac{z}{h} + T_0.$$

将这些结果代入(8)及(9)式, 对(8)式取旋度并忽略两式中的扰动磁场 $\tilde{A}$ 的高阶项, 不难得到

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \phi) + \frac{\partial(\phi, \nabla^2 \phi)}{\partial(x, z)} = \nu \nabla^4 \phi + g\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{2B_0^2}{\rho_0 h} z \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \tilde{A}), \quad (8')$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(\phi, \theta)}{\partial(x, z)} = \frac{\Delta T}{h} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 \theta + \frac{4\eta B_0^2}{\rho_0 c_v \kappa h^2} \left(z - \frac{h}{2}\right) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{4\eta B_0^2}{\rho_0 c_v h} \nabla^2 \tilde{A} \quad (9')$$

式中 $z = h/2l_z$, 定义为磁剪切参数. 而由方程(10)可求出

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + \frac{\partial(\phi, \tilde{A})}{\partial(x, z)} = 2B_0^2 z/h \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta \nabla^2 \tilde{A}. \quad (10')$$

然后用 h 去规一化长度, h^2/κ 规一化时间, 以及用 ΔT 去规一化温度, κ 规一化速度势 ϕ , $B_0 h$ 规一化扰动磁矢势 $\tilde{A}$, 即令

$$L/h \rightarrow L, \quad \nu\kappa/h^2 \rightarrow \nu; \quad \theta/\Delta T \rightarrow \theta, \quad \phi/\kappa \rightarrow \phi, \quad \tilde{A}/B_0 h \rightarrow \tilde{A}, \quad (21)$$

得到

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \phi) + \frac{\partial(\phi, \nabla^2 \phi)}{\partial(x, z)} = \sigma \nabla^4 \phi + \sigma r \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{2B_0^2 h^2 z^2}{\rho_0 \kappa^2} z \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \tilde{A}), \quad (8'')$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(\phi, \theta)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nabla^2 \theta + \frac{4B_0^2 p_m^2}{\rho_0 c_v \Delta T} \left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{4B_0^2 p_m^2}{\rho_0 c_v \Delta T} \nabla^2 \tilde{A}, \quad (9'')$$

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + \frac{\partial(\phi, \tilde{A})}{\partial(x, z)} = 2z \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + p_m \nabla^2 \tilde{A}. \quad (10'')$$

式中 $p_m = \eta/\kappa$ 为无量纲电阻, $\sigma = \nu/\kappa$ 为 Prandtl 数, $r = g\varepsilon h^3 \Delta T/\nu\kappa$ 为 Rayleigh 数.

参照 Lorenz^[14], Treve 等人^[6], 将 $\phi, \theta, \tilde{A}$ 展成空间 Fourier 级数, 仅保留主要项: 描述元胞样对流的 X_1 , 相应的对流温差 X_2 和纵向温度剖面对 T^* 的偏离 X_3 , 以及磁场的扰动幅度 X_4 , 即

$$\phi = \sqrt{2} (1 + a^2) a^{-1} X_1 \sin \pi a x \sin \pi z, \quad (22)$$

$$\theta = \pi^{-1} r^{-1} (\sqrt{2} X_2 \cos \pi a x \sin \pi z - X_3 \sin 2\pi z), \quad (23)$$

$$\tilde{A} = \sqrt{2} \pi^{-1} X_4 \cos \pi a x \sin \pi z. \quad (24)$$

值得注意的是, 与(24)式不同, Treve 等人^[6]设 $\tilde{A} \approx J_0^{-1}$, 这在物理上是不合理的. 因为 J_0 很小时, $\tilde{A}$ 会很大, 与他们推导方程(4)~(7)时所做的忽略 $\tilde{A}$ 的高阶项的假设相悖.

另外, 仅就在物理上容易实现来说, 可以认为除相对 Rayleigh 数 r (正比于 ΔT) 之外, J_0 是唯一的可调参数. Treve 等人那样写 $\tilde{A}$ 的结果, 使参数 J_0 在方程中不出现, 而且所得结果也无法同普通流体 ($B_0 = 0, J_0 = 0$) 的 Lorenz 方程对比. 实际上, 电流 J_0 增大导致磁剪切增强. 正因为我们把 $\tilde{A}$ 写成(24)式, 使磁剪切参数 $\beta (\approx J_0)$ 在我们的方程组(25)–(28)中出现, 并引出一系列新的结果.

将(22)–(24)式代入(8'')–(10'')式, 并依照文献[6], 用 $\rho_0 g \epsilon h \Delta T$ 去重新归一化 $B_0^{[2]}$, 并令 $\alpha^2 = g \epsilon h / c_v$, 同时将常数因子 $\pi^2(1 + \alpha^2)$ 吸收到时间变数中去, 我们得到一组新的方程:

$$\dot{X}_1 = -\sigma X_1 + \sigma X_2 - (4\pi^2 \sigma r \beta / b) X_4, \quad (25)$$

$$\dot{X}_2 = -X_1 X_2 + r X_1 - X_2 + 4\alpha^2 p_m r \beta X_4, \quad (26)$$

$$\dot{X}_3 = X_1 X_2 - b X_3, \quad (27)$$

$$\dot{X}_4 = \beta X_1 - p_m X_4. \quad (28)$$

式中几何因子 $b = 4/(1 + \alpha^2)$.

四、理论与数值分析

方程组(25)–(28)是我们最近得到的新结果^[1]. 不难看出, 当磁场模式 X_4 不存在时, 这组方程退化成 Lorenz 方程组(1)–(3). 现在, 由于磁场扰动 X_4 的耦合作用, 必然会观察到一些新现象.

首先做一些理论分析.

我们将方程(25)和(28)再对时间微分一次, 得到相应的动力学方程为

$$\ddot{X}_1 + \sigma \dot{X}_1 - \sigma r (1 - 4\pi^2 \beta^2 / b) X_1 = f_1(t), \quad (29)$$

$$\ddot{X}_4 + p_m \dot{X}_4 + (4\pi^2 \sigma r \beta^2 / b) X_4 = f_4(t). \quad (30)$$

式中

$$f_1(t) \equiv -\sigma X_2 + 4\sigma r p_m \beta (\alpha^2 + \pi^2 / b) X_4 - \sigma X_1 X_3, \quad (31)$$

$$f_4(t) \equiv \sigma \beta (X_2 - X_1) \quad (32)$$

可看作驱动项. 由(30)和(32)式可看出, X_2 和 X_1 直接驱动 X_4 . 而 X_4 对其它模式的影响由(31)式, 等号右端第二项反馈回去. 有关的耦合系数都有 β 因子. 正如我们所期望的, 磁剪切大大增强了 X_4 与其它模式之间的耦合. 这可以在物理上给出说明. 正象 Rayleigh 数 r 是表征垂直方向温度场梯度的物理参数, 磁剪切参数 β 标志了磁场强度的纵向梯度, 所以我们不妨称它为“磁 Rayleigh 数”. 在方程(26)中也可看到, Rayleigh 数 r 和“磁 Rayleigh 数” β 具有同等地位. 随 r 增大, 温度场将产生对流甚至混沌运动. 那么随 β 增大, 磁场的各种振荡模式也同样会被激发, 但不同的是(29)式中的 β 增加到某个值后再继续增加则反而会对不稳定性起抑制作用. 这一点我们将进一步讨论. 总之, 我们认为磁场剪切在问题中有举足轻重的地位, 所以将集中研究当 β 变化时系统的行为, 同时固定其它参数不变.

为了系统地揭示非理想 MHD 流的演化特性, 特别是磁运动模式的时间行为, 我们

在数值分析中应用了四阶 Runge-Kutta 法解方程组(25)–(28), 将相轨迹投影到子空间 (X_1, X_4) 平面上, 直接观察磁-流体耦合的相空间行为, 以及用快速 Fourier 变换 (FFT)-功率谱分析法和 Poincaré 映象法分析系统的周期、准周期和混沌运动, 并对磁场的变化和磁岛生成进行了数值模拟, 同时进行理论分析, 并与数值结果相对照。在计算中, 仿照 Lorenz^[14,15], 我们固定 $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ 。另外, 为了计算方便, 取 $p_m = 1$ (或 10) 和令 $\alpha^i = \pi^2/bp_m$ 。

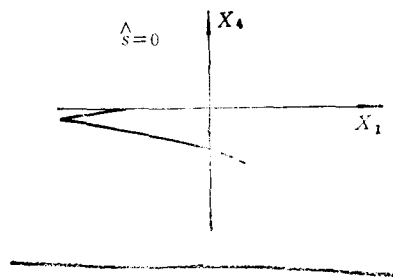


图 2

1. $\hat{s} = 0$ 时, 方程(28)与方程组(25)–(27)之间解耦。这对应于 Treve 等人^[6]的 MHD Lorenz 方程组: $X_4(t)$ 的时间行为是指数衰减的—— $X_4(t) = X_4(0)\exp\{-p_mt\}$ 。在我们选定的参数下, 仅仅观察到 Lorenz 吸引子, 它的两片“简并”在超平面 $X_4 = 0$ (即子空间 (X_1, X_2, X_3)) 上(见图 2)。

2. 当 $\hat{s}$ 由零开始增加但仍保持方程(29)中 X_1 的系数是负的时, 系统的流体模式具有 Rayleigh Bénard 不稳定性, X_1, X_2 和 X_3 继续保持混沌运动的状态。但是由方程(30), 可以认为 X_4 是一个受迫阻尼谐振子, 它的长时间行为取决于驱动项 $\sigma\hat{s}(X_2 - X_1)$ 。因此, X_4 将随着 X_1 和 X_2 做混沌运动, 使得奇异吸引子成为包含磁模式的 MHD 奇异吸引子, 并具有一些新的特征。

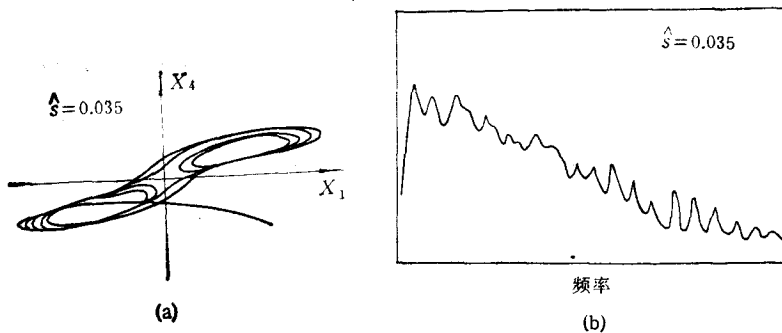


图 3

数值结果(图 3)显示出吸引子的两片都从 $X_4 = 0$ 上“翘起”, 相互分开, “简并”被解除, 并给出了 X_4 的混沌谱。磁扰动 X_4 的混沌运动, 使得磁场进入“湍态”: 磁力线无规地断开又重联, 磁岛随机地生成和消失。图 4 为某一时刻形成的磁岛。

3. 在 $\hat{s} > 0$ 到 $\hat{s} < 0.1$ 的参数区间内, 理论和数值分析展示了更多纷繁的新现象。我们在这里介绍其中几个有趣的情形。

1) 共振现象和周期运动

由于在混沌谱中, 几乎所有频率成分都被激发起来; 考虑到 X_4 是被 X_1 和 X_2 驱动的

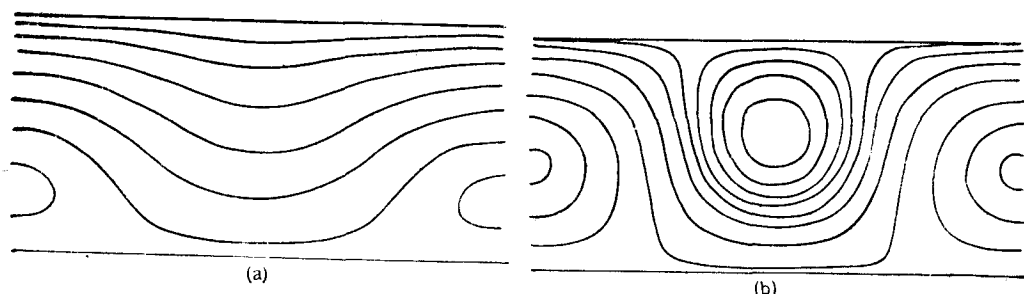


图 4

阻尼振子,如果在 X_1 或 X_2 的频谱中,有一峰值的频率接近 X_1 的固有频率 ($\omega_0 = [4\pi^2 \sigma r \beta^2 / b - p_m^2 / 4]^{1/2}$), 且足够强,以致激发起 X_1 的共振,那么 X_1 谱中的这个共振峰将反馈到 X_1 或 X_2 . 这样将导致一个正反馈过程. 最后,有可能所有其它频谱分量都为共振所抑制,整个系统以共振频率做周期运动. 当然这种周期运动是极不稳定的,在数值实验中,我们确实观察到这种现象 (见表 1 中 $\beta = 0.08498-0.08500$ 的情形和图 5), 这是一个很有意思的结果.

2) 一条新的向混沌态过渡的道路?

迄今,人们比较一致的看法是,非线性系统通往混沌的道路有三条(倍周期分岔、准周期到混沌和阵发混沌). 但也有人提出了新的向混沌态过渡方式: 周期和混沌交替出现的方式^[16,17]. 但周期运动为什么会突然失稳直接变为混沌,物理实质是什么? 有人认为这条“新”的道路本质上和阵发混沌是一样的,都是切分岔行为^[18]. 至今众说纷纭. 在这里我们给出自己的结果并进行一些探讨.

在 $\beta = 0.06$ 到 $\beta = 0.09$ 的区间内,我们也确实发现了类似于周期与混沌交替的现象. 但更为有趣的是我们观察到的是不动点 (fixed point)、极限环 (limit-cycle) 和混沌运动的奇异吸引子交替出现 (见表 1). 我们更愿意称之为随参数变化 (而不是随时间演变) 的“阵发混沌”. 这是否给出一种新的混沌发生机制? 我们倾向于回答: 否! 因为在第一个嵌在混沌区中的“规则”运动窗口 (我们不称之为周期窗口, 因为其中有不动点存在) 边缘, 我们观察到了随时间演变的阵发混沌现象, 这对否定意见——认为“参数阵发混沌”与“时间阵发混沌”本质是一样的——是个支持, 但有些周期轨道确实象是直接失稳变为混沌的, 我们觉得这不奇怪. 从物理上来说, 这种现象和那些阵发混沌行为都是由于 X_1 与其它模式之间的共振极不稳定而产生的. 由于共振现象起源于混沌谱中某一固有频率附近的尖峰, 所以存在着共振频率和其它频率之间的竞争, 在时间行为上, 可表现为一会儿共振 (周期), 一会儿混沌的阵发混沌现象. 而在参数空间, 小的变化就可能引起固有频率的“漂移”, 从而也可使共振 (周期) 运动突然失稳变为混沌. 而当固有频率移到混沌谱的另一尖峰附近时, 又会出现共振现象, 这就是“参数阵发混沌”的原因. 正是由于共振现象只发生在固有频率附近, 所以只形成一个极窄的“规则”运动窗口. 它们实际上都是混沌区的一部分, 本质上是带有随机运动的色彩. 这只能更加说明奇异吸引子行为的奇特和为人们所陌生. 下面的现象更证实了这一点.

表 1 “参数阵发混沌”现象
 $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3, p_m = 10.$

$\hat{s} = 0$ ——		$\hat{s} = 0.08875$	不动点 p'
0.08495	奇异吸引子	0.08880	极限环
0.08496	阵发混沌	0.08881—0.08887	奇异吸引子
0.08497	极限环		
0.08498	不动点 p	0.08900—0.08915	极限环
0.08499	不动点 p'		
0.08500	极限环	0.08925	不动点 p'
0.08501—0.08785	奇异吸引子	0.08950—0.08970	奇异吸引子
0.08786—0.08795	极限环	0.08975	不动点 p
		0.08985	奇异吸引子
0.08800	不动点 p'	0.08990	不动点 p'
0.08805	不动点 p	0.09100—0.09150	奇异吸引子
0.08810	极限环		
0.08811—0.08872	奇异吸引子	0.09200	不动点 p'
		0.10000	不动点 p
0.08873	极限环	$\hat{s} > 0.11100$	不动点 p'
0.08874	不动点 p		

3) 平庸吸引子流域的奇异行为

在对相空间轨迹的观察中,一个奇怪的现象是,在极窄的规则运动窗口内,平庸吸引子的流域会突然改变。当参数 $\hat{s}$ 值有一个极微小的变化时,从相空间某一区域流向两个不动点之一的“流”,会突然转向另一个不动点(图 5 和图 6)! 从我们的数值实验中观察到,本文所考察的系统的奇异吸引子与 Lorenz 吸引子有一相似之处,就是运动轨线会突然从一片跳到另一片上去。在“规则”窗口内,当奇异吸引子的两片各自收缩到一个平庸吸引子——不动点上之后,这种随机性竟也保留了下来:运动轨迹当参数微小变化时突然从一个不动点的流域跳到另一不动点的流域。这一事实可能会给人以新的启示。

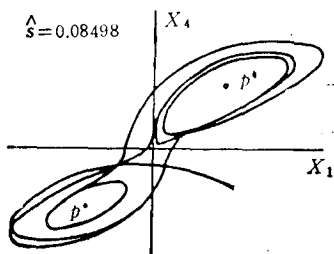


图 5

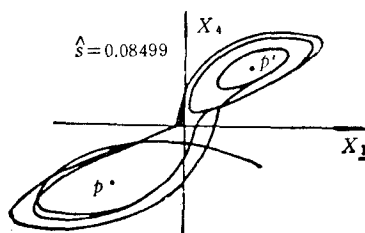


图 6

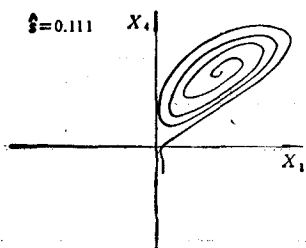


图 7

4. 随着 $\hat{s}$ 进一步增大, 方程 (29) 中 X_1 的系数会由负变正, 这将抑制与内在随机性相联系的磁流体不稳定性. 实际上, 我们看到, 当 $\hat{s} > 0.1$ ($p_m = 10$) 时, 系统的吸引子最后断开成两个稳定的不动点 (图 7). 这对应着系统的稳定对流状态, 生成的磁岛也不再变化. 这一结果说明, 大的剪切磁场能有效地抑制等离子体中的不稳定性. 这一点与许多托卡马克装置上的实验结果是一致的.

5. 从准周期到混沌态的过渡

湍流的发生机制是物理学最关心的问题之一. 自从 Landau-Hopf 所提出的向湍流过渡的方式被否定之后, 人们试图把向混沌态的转变与湍流的发生联系起来, 建议了多种通往湍流的道路. 目前已知的是 Ruelle-Takens 道路 (从准周期到混沌), Feigenbaum 道路 (倍周期分岔) 和 Pomeau-Manneville 道路 (阵发混沌)^[49]. 后两者是孪生现象, 由同一个重整化群方程描述, 在各种数值实验中最常见. 而 Ruelle-Takens 道路虽然提出较早, 但人们对其认识较浅, 只是在最近才见理论和数值研究的有关报道^[2, 5, 20-22]. 研究了 20 多年的 Lorenz 方程, 至今也只发现了倍周期分岔和阵发混沌行为^[23].

本文的最重要结果是, 在我们的方程 (25)–(28) 中除了有存在于 Lorenz 方程中的两条道路外, 还发现了第三条——通过准周期运动过渡到混沌的道路 (图 8). 图 8 中给

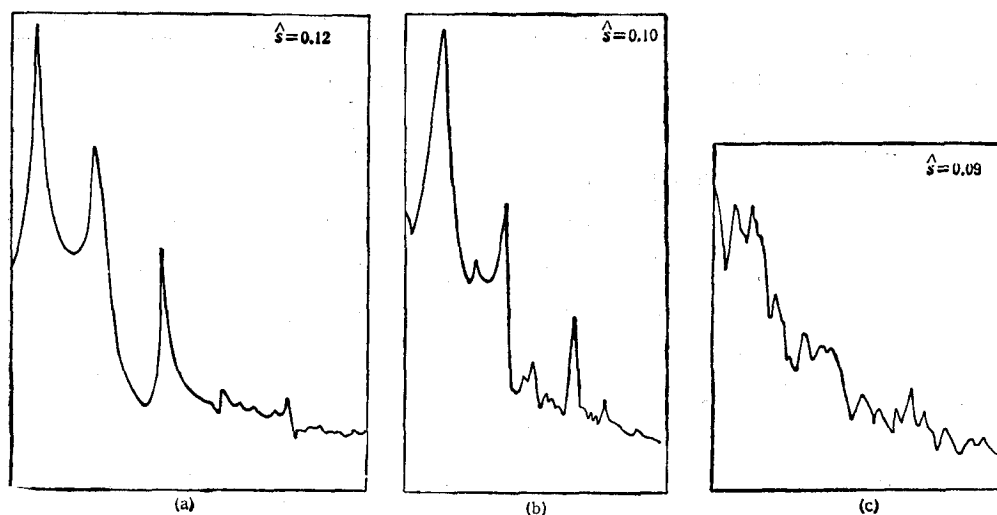
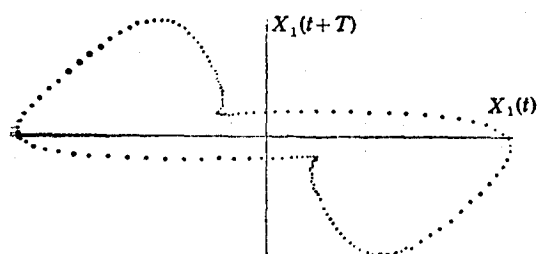
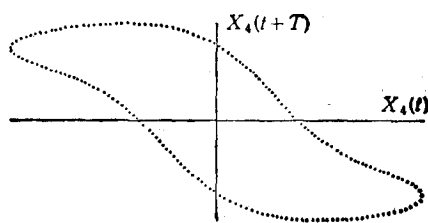


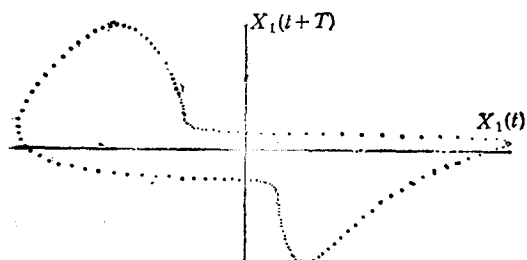
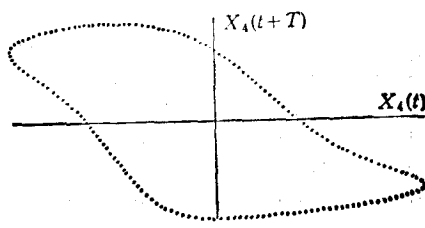
图 8

出了磁扰动模式 X_1 的对数功率谱. 我们看到, 当 $\hat{s} = 0.12$ 时, 系统做准周期运动, 随着 $\hat{s}$ 减小, 准周期谱出现噪声背景. $\hat{s} = 0.09$ 时, 磁场剪切对不稳定性的抑制效应进一步减弱, 各种无规振荡增强, 以至功率谱完全被噪声淹没, 系统过渡到混沌态.

为了进一步展示准周期向混沌态的过渡, 我们以 $T = 2\pi/\omega_0$ 为采样间隔, 分别做出了在图 8 的参数下 X_1 和 X_2 的 Poincaré 映象 (图 9 和图 10). ω_0 是由 (30) 式给出的 X_1 的固有频率. 可以观察到, 当 $\hat{s} = 0.12$ 时, Poincaré 截面只是在个别地方出现迭折, 而且保持着关于原点的对称性. $\hat{s}$ 减小到 0.10 时, 皱折增多, 且对称性被破坏. 而过渡到混

(a) $\varepsilon = 0.12$ (a) $\varepsilon = 0.12$

(Poincaré 截面关于原点称)

(b) $\varepsilon = 0.10$ (b) $\varepsilon = 0.10$

(对称性破坏)

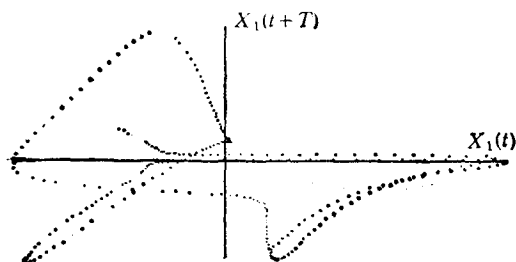
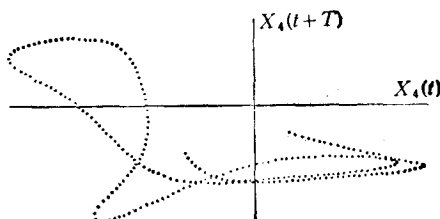
(c) $\varepsilon = 0.09$ (c) $\varepsilon = 0.09$, X_4 的 Poincaré 映象
(Poincaré 截面完全破坏, 轨道迷失)

图 9

图 10

沌态 ($\varepsilon = 0.09$) 时, 整个截面完全破坏, 轨道迷走。 X_1 (图 9) 和 X_4 (图 10) 的 Poincaré 映象都是局部出现皱折就成为混沌的。 这与其它非线性系统由准周期向混沌态过渡^[5,22] 是类似的。

到目前为止, 就我们所知, 数值实验中同时看到各种通向混沌的道路并存的模型是: 强迫布鲁塞尔振子^[5], 在周期外力激励下的等离子体鞘层模型^[22], 和本文所研究的模型^[1,2]。但是, 在所有这些模型中, 只有我们的方程组(25)–(28)是唯一没有周期外力驱动的; 或者说, 在向混沌态过渡的准周期行为中, 我们所研究的系统的内在随机性是“自发”地显露出来的! 我们认为这一结果使我们的方程组, 不仅对等离子体系统中, 而且对各种非线性系统中的湍流和混沌现象的研究, 有着特殊重要的意义。

[1] QIU Xiaoming (邱孝明) and WANG Xiaogang (王晓钢), *Chinese Phys. Lett.*, 3(1986), 106.

[2] QIU Xiaoming (邱孝明) and WANG Xiaogang (王晓钢), *Chinese Phys. Lett.*, 4(1987), 49.

- [3] 郝柏林, 物理学进展, **3**(1983), 329.
- [4] Hao Bailin, Chaos, "World Scientific" Company, Singapore, (1984).
- [5] 王光瑞、郝柏林, 物理学报, **33**(1984), 1321.
- [6] G. Laval and D. Gresillou (eds.), Intrinsic Stochasticity in Plasmas, Orsay, (1980).
- [7] E. Ott, *Rev. Mod. Phys.*, **53**(1981), 655.
- [8] Physica Scripta T2: Intern. Conf. on Plasma Phys., Göteborg, Sweden, (1982).
- [9] C. W. Horton, Jr. and L. E. Reichl (eds.), Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasma, John Wiley & Sons, (1984).
- [10] F. F. Cap, Handbook on Plasma Instabilities, Academic Press, (1982).
- [11] P. Terry and W. Horton, *Phys. Fluids*, **25**(1982), 491.
- [12] He Kaifen and D. Biskamp, *Phys. Lett.*, **108A**(1985), 347.
- [13] R. B. White, *Rev. Mod. Phys.*, **58**(1986), 183.
- [14] E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.*, **20**(1963), 130.
- [15] O. Lanford, *Lecture Notes in Math.*, **615**(1977), 114.
- [16] J. S. Turner *et al.*, *Phys. Lett.*, **85A**(1981), 9.
- [17] Y. Kuramoto and S. Koga, *Phys. Lett.*, **92A**(1983), 1.
- [18] K. Kaneko, *Prog. Theor. Phys.*, **68**(1983), 669.
- [19] J. P. Eckmann, *Rev. Mod. Phys.*, **53**(1981), 643.
- [20] M. J. Feigenbaum *et al.*, *Physica*, **5D**(1982), 370.
- [21] L. Glass and R. Perez, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 1772.
- [22] 方锦清, 周刘来, 中国科学 A 辑, (5)(1986), 485.
- [23] C. Sparrow, The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors, Springer, New York, (1982).

STRANGE ATTRACTOR AND CHAOTIC PHENOMENA IN NON-IDEAL MHD FLOW

WANG XIAO-GANG LIU YUE

QIU XIAO-MING

(Department of Physics, Dalian Institute of Technology)(Southwestern Institute of Physics, Leshan, Sichuan, China)

ABSTRACT

A model on the Rayleigh-Benard problem of a non-ideal MHD flow in a sheared magnetic field is proposed and studied. A new set of nonlinear differential equations for the model has been derived. Theoretical and numerical analysis shows that the set of equations implies a strange attractor with several novel features differing from Lorenz attractor and, in particular, the coexistence of all three routes to chaos in that model. Among the well-known models with these routes, so far, our system of equations is the unique one without any extrinsic periodic driving term. It exhibits more immediately the intrinsic stochasticity of deterministic nonlinear system. The stochastic motion and reconnection of magnetic field-lines, and the creation of magnetic islands are observed in numerical simulating of this set of equations.