

具有自相似结构的非均匀复合媒质 质量分布的标度指数*

张 珉 陶瑞宝 周世勋

(复旦大学物理系)

1988年3月23日收到

本文研究了一类与 Sierpinski carpet 具有相同拓扑的非均匀复合媒质质量分布的标度规律,计算了它们的标度指数. 研究表明必须引进一维数集来描写质量的非均匀分布的细节.

一、引 言

近几年来,具有非整数维数物质分布的体系已引起很多人的注意. 这类体系一般分为两类:一类是有规分形体系,它们具有完全确定的自相似结构,例如 Koch 曲线^[1]、Sierpinski gesket^[2,3], Sierpinski carpet^[4,5] 等等;另一类是随机分形体系,它们仅具有统计意义上的自相似性,例如在渗流值处的无穷大集团^[6,7]等等. 虽然有规分形结构还没有真实的物理实体,但作为某些真实的物理实体的初级理论模型是可取的,另外由于它们相对来说比较简单,作为研究具有自相似性的非均匀分布的物质体系所具有的可能的物理性质,现在已为许多理论物理学家所重视.

为了更好地逼近真实的物理实体,需要建立各种各样的模型. Sierpinski carpet 这一类模型是目前广为研究的理论模型之一. 本文推广这一类模型,规定一种比原来 Sierpinski carpet 更为普遍的自相似构造规则,研究并严格地计算了这种体系线度变换时的幂律行为. 从这些幂律行为中,我们定义了物质分布的非均匀部分的维数,用它可以研究象复合媒质或其它非均匀分布的自相似媒质等体系.

二、物质分布的维数及 Sierpinski carpet 的推广

任一物体在空间都有一定的分布. 设它的线度为 L ,若 L 愈大,则其质量 $M(L)$ 也愈大,当 L 很大时(可忽略涨落效应),一般说来, $M(L)$ 可以具有如下的幂律行为:

$$\begin{aligned} M(L) &= C_1 L^{d_1} + C_2 L^{d_2} + \dots \\ &= \sum_i C_i L^{d_i}. \end{aligned} \quad (1)$$

这里令 $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots$. 式中的 $\{C_i\}$ 为系数集合, $\{d_i\}$ 为幂指数集合. 体系的平均

* 国家自然科学基金资助的课题.

密度为

$$\rho(L) = \frac{M(L)}{L^D} = \sum_i C_i L^{(d_i - D)}, \quad (2)$$

式中 D 为欧几里得维数。人们以往讨论得较多的是(1)式等号右端第一项, 用一个指数 d_1 来刻画体系的几何性质。对于通常所指的均匀分布物质, $d_1 = D$; 对于有些体系, 如非均匀的自相似复合媒质、准晶体等, 质量分布随线度变换的带头项指数都等于欧几里得维数 D , 它们的非均匀性主要是反映在第二项, 甚至第三、第四项等等。因此, 一个非均匀分布的物质维数最好是用一维维数 $\{d_i\}$ 来描写, 这样才能完全地反映物质的非均匀分布特性。在一些特殊情况下, 可以只存在一个指数, 即 $d_1 = d_2 = d_3 = \dots$, 若这时 $d_i = D$, 即为均匀分布; 若 $d_i \neq D$, 而是某个整数或分数, 则是多孔自相似性非均匀分布, 人们定义 d 为分形维数, 这就是以前讨论得很多的多孔分形体系。

这里要讨论的是一种 $d_1 \neq d_2$ 的只有两个指数的数组体系, 它是一类通常 Sierpinski carpet 在相同拓扑结构下的推广, 具有较为普遍的物质分布特性, 我们精确地导出了它们的物质分布维数组 $\{d_1, d_2\}$ 。当然在更加一般的非均匀分布情况下, 需要数目更多的指数。

通常 Sierpinski carpet 的构造规则如下(见图 1): 取一单位“面积”的“方块”, 称它为第零级结构。增大线度 b 倍, 则“面积”变为 b^D , D 为欧几里得维数, b 为正整数, 这样我们得到 b^D 个单位“方块”。然后按一定的分布规则取走 p 个“方块”, 得到留下的第一级结构。继以第一级结构为单位图形, 再按相同的构造方式取走 p 个单位, 留下的称为第二级结构, 重复上面的手续直至无穷, 于是就获得具有自相似性的 Sierpinski carpet 模型, 自相倍率为 b 。这种 carpet 已经熟知它的物质质量分布按线度的幂次规律为

$$M(L) \propto L^{d_1}, \quad (3)$$

式中 d_1 为通常所定义的分形维数, 它为 $\log(b^D - p) / \log b$ 。以上构造方式的特点是多孔性的, 物质密度阶跃地分布在一些特定的空间区域(见图 2)。

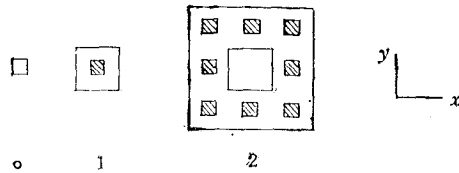


图 1 Sierpinski carpet (以 $b = 3$, $p = 1$, $D = 2$) 的第零、第一和第二级结构, 阴影区域表示挖空的地方

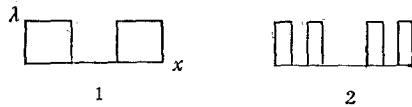


图 2 物质密度 λ 的空间分布 这里给出的是沿 x 轴的关系图; 1 和 2 分别示意第一和第二级结构的物质密度分布

现在我们改变上述构造规则。先按照前面的构造方式排好留下的 $b^D - p$ 个单位图

形,然后在 p 个原先是完整取走的单元位置上作一些比较普遍性的规定,那里可以是空的(即原先 Sierpinski carpet 规则),也可以注入其它物质(密度分布任意),见图 3. 当注入均匀物质时,构成“均匀复合媒质的 Sierpinski carpet”,相当于在原先 Sierpinski carpet 多孔骨架的空隙区域充满另一种均匀物质,见图 3(a). 图 3(b)给出一种空的地方充以密度分布非均匀的物质,构成所谓的“非均匀复合媒质 Sierpinski carpet”. 这种推广的结构,其自相似倍率 b 与原来的 Sierpinski carpet 相同,拓扑性也相同,只是物质分布的非均匀性更为复杂. 每一种 carpet 都能对应地找到这样的拓扑推广类,它们都具有自相似性,自相似倍率相同.

下面我们证明拓扑推广类的物质分布随线度变换的幂次规律可统一地表述为

$$M(L) = C_1 L^D + C_2 L^{d_f}, \tag{4}$$

式中系数 C_1 和 C_2 由物质的非均匀分布细节决定,而 D 为欧几里得维数, d_f 为通常的分形维数.

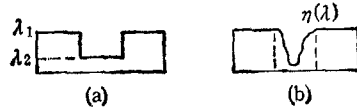


图 3

三、维数组计算

把图 3(b) 所示的连续分布近似地看成阶梯分布,见图 4. 根据质量可加性,我们能找到一基本结构(图 5(a)),只需先求得该基本结构的质量线度变换幂律,则通过求和手续可求得多梯结构的幂律,再取极限,求得连续分布的情况.

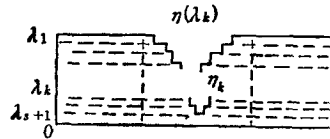


图 4 非均匀分布近似看成无限细分的阶梯型分布
分布参数为 $\{\lambda_k, \eta_k\}$, $k = 1, 2, \dots, s$; s 为阶梯数目

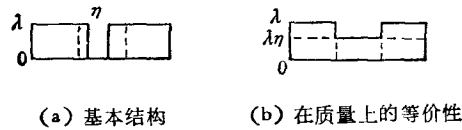


图 5

我们以 $D = 2, b = 3, p = 1$ 为例. 对原先的 Sierpinski carpet 只在 $(b^D - p)$ 个“方块”中的一块里取走一部分物质,令 η 为那“方块”中未被取走的部分的“面积”与该“方块”面积之比. $\eta = 0$ 即为通常的 carpet, $\eta = 1$ 为均匀结构,一般情况是 $0 < \eta < 1$. 设第零级结构的图形“面积”为 $S_0 = 1$, 物质密度 $\lambda = 1$, 挖空处的密度 $\lambda' = 0$. 记不同级结构的物质质量分别为 M_0, M_1, M_2, \dots , “面积”为 S_0, S_1, S_2, \dots . 显然有

$$S_n = b^2 S_{n-1}. \quad (5)$$

根据新的构造规则,有

$$M_0 = \lambda S_0 = 1; \quad (6a)$$

$$M_1 = (b^2 - 1)M_0 + \lambda\eta S_0 = (b^2 - 1) + \eta; \quad (6b)$$

$$M_2 = (b^2 - 1)M_1 + \lambda\eta S_1 = (b^2 - 1)^2 + \eta[(b^2 - 1) + b^2]; \quad (6c)$$

$$M_3 = (b^2 - 1)M_2 + \eta S_2 = (b^2 - 1)^3 + \eta[(b^2 - 1)^2 + (b^2 - 1)b^2 + (b^2)^2]; \quad (6d)$$

.....

$$\begin{aligned} M_n &= (b^2 - 1)M_{n-1} + \eta S_{n-1} \\ &= (b^2 - 1)^n + \eta[(b^2 - 1)^{n-1} + (b^2 - 1)^{n-2}b^2 \\ &\quad + \dots + (b^2)^{n-1}] \\ &= (1 - \eta)(b^2 - 1)^n + \eta(b^2)^n. \end{aligned} \quad (6e)$$

令 $b^2 - 1 \equiv b^{d_t}$, 则

$$M_n = (1 - \eta)(b^n)^{d_t} + \eta(b^n)^2. \quad (7)$$

用结构的线度表示,则有

$$M(L) = \eta L^2 + (1 - \eta)L^{d_t}. \quad (8)$$

若 $\lambda \neq 1$, 有

$$M(L) = \lambda\eta L^2 + \lambda(1 - \eta)L^{d_t}. \quad (9)$$

平均密度

$$\rho(L) = \frac{M(L)}{L^2} = \lambda\eta + \lambda(1 - \eta)L^{d_t-2}. \quad (10)$$

(9)式等价一个“均匀复合媒质 Sierpinski carpet”的质量随线度变化的公式,见图 5(b). 相当于局域密度为 λ 的多孔 Sierpinski carpet 在空的地方充密度为 $\lambda\eta$ 的物质. 若 $\lambda' \neq 0$, 根据图 6 的分解式,可得

$$\begin{aligned} M(L) &= \lambda' L^2 + (\lambda - \lambda')\eta L^2 + (\lambda - \lambda')(1 - \eta)L^{d_t} \\ &\equiv \lambda_i L^2 + \lambda_f L^{d_t}, \end{aligned} \quad (11)$$

式中

$$\lambda_f = \lambda_i - \lambda_i, \quad (12)$$

$$\lambda_i = \lambda' + (\lambda - \lambda')\eta. \quad (13)$$

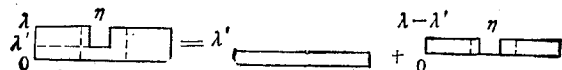


图 6 本底密度非零时 ($\lambda' \neq 0$) 的基本结构

为推广到多梯结构,先讨论两阶梯结构的情况. 以 $b = 3$, $p = 1$, $D = 2$ 为例,分布参量分别设为 (λ_1, η_1) 和 (λ_2, η_2) 及本底密度为 λ_3 , 见图 7. 利用(8)式的基本结构公式,将分解图形按质量再加起来,则总质量随线度变化的关系为

$$M(L) = (\lambda_3 L^2) + [(\lambda_2 - \lambda_3)\eta_2 L^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)(1 - \eta_2)L^{d_t}]$$

$$+ [(\lambda_1 - \lambda_2)\eta_1 L^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - \eta_1)L^{d_f}] \\ \equiv \lambda_r L^2 + \lambda_f L^{d_f}, \quad (14)$$

式中

$$\lambda_f = \lambda_1 - \lambda_r, \quad (15)$$

$$\lambda_r = (\lambda_1 - \lambda_2)\eta_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\eta_2 + \lambda_s. \quad (16)$$

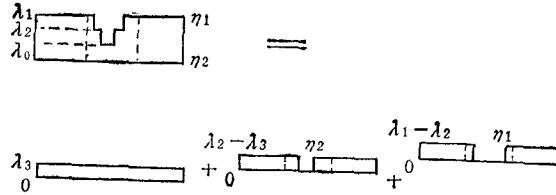


图7 两阶梯结构

现在推广到 s 阶梯的情况, 见图 4, 设分布参数为 $(\lambda_1, \eta_1), (\lambda_2, \eta_2), \dots, (\lambda_s, \eta_s)$, 本底密度为 λ_{s+1} . 易证明总质量随线度变化的关系同(14)式一样, 只是(16)式得改写成

$$\lambda_r = \lambda_{s+1} + \sum_{j=1}^s (\lambda_j - \lambda_{j+1})\eta_j. \quad (17)$$

在连续分布极限情况下, $\lambda_j - \lambda_{j+1} \rightarrow d\lambda$, $\eta_j \rightarrow \eta(\lambda)$, 结果

$$\lambda_r \rightarrow \lambda_0 + \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \eta(\lambda) d\lambda, \quad (18)$$

式中 λ_0 为质量密度连续分布的最低点.

再推广到一般情况 $p \neq 1$, 倍率为 b , 所嵌的空间为 D , 设 p 个“方块”中第 i 个“方块”的分布参数为 $\{(\lambda_{ij}, \eta_{ij})\}$, ($j = 1, 2, \dots, s_i$), ($i = 1, 2, \dots, p$), 则类似可证明

$$M(L) = \lambda + L^D + \lambda_f L^{d_f}, \quad (19)$$

其中

$$d_f = \log(b^D - p) / \log b, \quad (20)$$

$$\lambda_f = \lambda_1 - \lambda_r, \quad (21)$$

$$\lambda_r = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left[\lambda_{i, s_i+1} + \sum_{j=1}^{s_i} (\lambda_{ij} - \lambda_{i, j+1}) \eta_{ij} \right] \\ \rightarrow \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left[\lambda_{i, 0} + \int_{\lambda_{i, 0}}^{\lambda_1} d\lambda \eta_i(\lambda) \right]. \quad (22)$$

从上面的讨论, 我们看到“非均匀复合媒质” Sierpinski carpet 其拓扑性跟通常相对应的 carpet 一样, 而质量随线度变化的幂律必须由两个指数表征, 也就是说这种非均匀的自相似体系的维数应有维数组 $\{D, d_f\}$ 来表示. 在我们的例子中, d_f 将由结构的拓扑性质决定, 而系数 λ_f 和 λ_r 是由物质分布的非均匀性和对称性决定. 同样, 可以讨论 Sierpinski gasket 的推广类, 结论一样.

我们的讨论, 只是提供了一个例证, 说明对更为一般的非均匀分布的物质体系, 有时需要用一个维数组来描写它们的非均匀特征, 一个分形维数是远远不够的. 这些指数对

动力学性质会有影响,有关工作有待进行.

- [1] Y. Gefen *et al.*, *J. Phys. A*, **16**(1983), 1267.
- [2] Y. Gefen *et al.*, *J. Phys. A*, **17**(1984), 435.
- [3] R. Rammal and G. Toulouse, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 1194.
- [4] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, San Francisco: Freeman, (1982).
- [5] Y. Gefen *et al.*, *J. Phys. A*, **17**(1984), 1277.
- [6] R. F. Voss *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 1441.
- [7] A. Kapitulnik and G. Deutscher, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 1444.

THE SCALING EXPONENTS OF MASS DISTRIBUTION IN INHOMOGENEOUS COMPOSITES WITH SELF- SIMILAR STRUCTURES

ZHANG MIN TAO RUI-BAO ZHOU SHI-XUN

(Department of Physics, Fudan University, Shanghai)

ABSTRACT

The scaling law of mass distribution in composite media which have the same topology as that of the corresponding fractals but have more inhomogeneity in mass distributions is studied, and the scaling exponents (dimensions) are calculated. We suggest that a set of dimensions may be introduced to describe the details of the inhomogeneous distribution of mass