

# 普适性的光学双稳及激光动力学 方程和稳定性分析

欧 发 蔡 永 强

(华南工学院物理系)

1987 年 3 月 16 日收到

## 提 要

本文从慢包络近似的麦克斯韦方程出发,在优质腔极限下,结合腔的边界条件与平均场极限,建立了适用于任何物质的光学双稳系统及相应的激光系统的动力学方程;并通过对方程的线性稳定性分析,得到了一个普适性的失稳判据。

## 一、普适性的动力学方程

迄今为止,在本征型光学双稳系统(简称 OBS)的动力学理论中,总是将非线性介质简化为二能级原子模型,而实际的工作物质由于非线性效应的物理机制的多样性和复杂性,远不能用一种二能级原子物质来模拟。因此现有的 OBS 动力学理论与实际之间仍然存在着鸿沟。我们感到, OBS 理论上的一个重要问题是探索一种普适性的 OBS 动力学规律,即使它是唯象的宏观理论,它也可以成为由宏观理论通向微观理论的桥梁,同时也是理论联系实际的桥梁。

对于静态的情况,这种普适性的 OBS 唯象理论是有的<sup>[1]</sup>,在那里,由下式:

$$P = \epsilon_0 \cdot \chi(|E|^2) \cdot E \quad (1)$$

定义的复电极化率  $\chi(|E|^2)$  对光强  $|E|^2$  的依赖关系和腔的边界条件共同支配着本征型 OBS 输出对输入的静态特性。

现在我们考虑动态的情况。假定原子极化的弛豫速率  $\nu_1$  以及布居的弛豫速率  $\nu_0$  远大于腔中场的弛豫速率  $k$ , 这就是说,介质的极化  $P$  能够及时地响应场  $E$  的变化,这样关系式(1)即使在动态下也能够成立。 $k \ll \nu_1, \nu_0$  正是优质腔极限(或优质腔近似)的情况,完全适用于 OBS 以及相应的激光系统(简称 LS)。在这种优质腔极限下,根据(1)式从慢包络近似的麦克斯韦方程中绝热消除掉极化变量  $P$ <sup>[2]</sup>,再利用腔(为具体起见,采用环形腔)的边界条件和平均场极限,我们严格地推导出如下称之为普适性的本征型 OBS 及 LS 的动力学方程:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = k\{\omega C[i\chi_r(x) - \chi_i(x)]\tilde{x} - (1 + i\theta)\tilde{x} + y\}, \quad (2)$$

其中  $\tilde{x} = x e^{i\phi}$ ,  $\omega = \Omega/\alpha c$ ; 实数  $y$  与复量  $\tilde{x}$  依次代表按常规标度的人射场与透射场,相

应地  $x$  与  $\phi$  依次代表透射场的实振幅与相位;  $\Omega, \alpha$  与  $c$  依次为入射场频率、线性吸收系数与光速, 相应地  $\bar{\omega}$  代表标度化入射场频率;  $\theta$  为按  $k$  标度的腔失谐;  $C$  为合作参量; 最后,  $\chi_r(x)$  与  $\chi_i(x)$  分别为非线性极化率的实部与虚部. 由 (2) 式得  $x$  与  $\phi$  的演化方程

$$\frac{dx}{dt} = -k \{ [\bar{\omega} C \chi_i(x) + 1] x - y \cos \phi \}, \quad (2a)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = k \left\{ \bar{\omega} C \chi_r(x) - \theta - \frac{y}{x} \sin \phi \right\}. \quad (2b)$$

由于方程 (2) 经过了对场作空间平均后得到的, 所以它实际上只是包括了共振模的单模运动方程.

下面就有关问题(特别是关于方程的普适性问题)对我们取得的结果进行讨论:

1. 从 (2a) 和 (2b) 式可分别看出, 极化率的虚部  $\chi_i(x)$  支配着场振幅  $x$  (即能量) 在时间上的演化; 实部  $\chi_r(x)$  支配着场相位  $\phi$  在时间上的演化.

2. 据文献 [3], 适用于二能级原子物质的吸收型 OBS 与 LS 的 Fokker-Planck 方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, \phi, t) = & \frac{k}{x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \cdot x \cdot \left( x - y \cos \phi + \sigma \cdot \frac{g^2 N}{k \nu_1} \cdot \frac{x}{1+x^2} \right) \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot y \cdot \sin \phi + q \frac{\partial}{\partial x} \cdot x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1-\sigma+x^2}{(1+x^2)^2} \\ & \left. + \frac{q}{x} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \frac{1-\sigma+x^2}{1+x^2} \right\} P(x, \phi, t), \end{aligned} \quad (3)$$

其中当  $\sigma < 0$  时,  $-\sigma$  就代表泵浦参量. 据 F-P 方程 (3), 考虑到  $x$  与  $\phi$  相当于极坐标变量, 可得到关于  $x$  与  $\phi$  的朗之万方程<sup>[4]</sup>

$$\frac{dx}{dt} = -k \left\{ \left( \sigma \cdot \frac{g^2 N}{k \nu_1} \cdot \frac{1}{1+x^2} + 1 \right) x - y \cos \phi \right\} + F_x, \quad (4a)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -k \frac{y}{x} \sin \phi + F_\phi, \quad (4b)$$

其中  $x$  与  $\phi$  代表随机变量,  $F_x$  与  $F_\phi$  为相应的随机力. 若对方程组 (4) 求统计平均并忽略相关性, 再考虑到随机力  $F_x$  与  $F_\phi$  的平均为零, 结果就与普适性方程组 (2a), (2b) (对应于二能级原子物质及纯吸收的情况:  $\theta = \chi_r = 0$ ) 完全一致.

3. 普适性动力学方程 (2) 不仅适用于无泵浦的 OBS, 对应于  $\chi_i(x) > 0$ ; 也适用于 LS, 对应于  $\chi_i < 0$ . 另外, 方程 (2) 还适用于介质为非均匀加宽的情况.

4. 方程 (2) 适用于任何非线性物质. 对于某一种具体物质,  $\chi_r(x)$  与  $\chi_i(x)$  可以根据微观理论计算或实验测定的结果, 代入方程 (2), 就可以具体研究这种工作物质的 OBS 动力学特性. 这会给 OBS 动力学特性的理论或实验研究带来若干方便, 促进对更多类型的工作物质的 OBS 动力学特性的研究. 我们的进一步工作, 证实了这个预期. 文献 [5] 按上述思路, 从本文的动力学方程 (2) 出发, 计算了半导体带填充型光学双稳系统的静态与动态特性, 例如临界开关光强与入射光频的关系、临界慢化、异常开关以及过冲特性等. 所得到的结果与实验事实都符合得相当好. 这又从一个侧面证明方程 (2) 是可信的, 确实具有普适性.

## 二、暂态特性

我们根据方程(2)用数值方法对均匀加宽的二能级原子物质的 OBS 暂态特性进行了研究,数值计算主要集中在系统从低透支向高透支跳变的开关动态过程上.已经得到的结果有三个方面,其中一部分与半经典的平均场理论已有的结果一致,另外我们还发现了一些新的规律性:

1. 临界慢化现象 只有当标度化的原子失谐 $\Delta$ 等于零时,才会有正常的临界慢化现象,这里“正常”是指临界慢化发生在由定态特性决定的临界上跳阈值 $y_M$ 附近.图1是其中的一个计算结果.

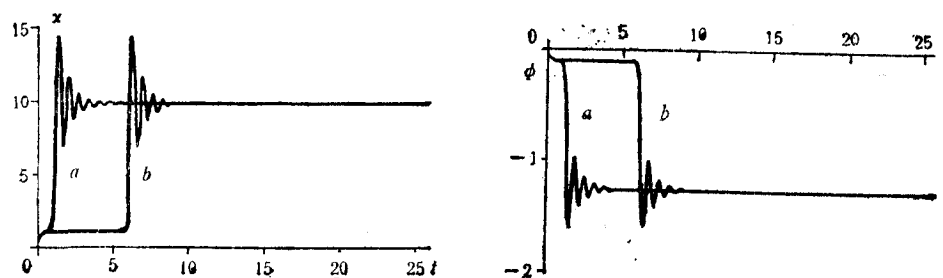


图1 临界慢化现象

$C = 100$ ;  $\Delta = 0$ ;  $\theta = 10$ ;  $y(t=0^-) \approx 0$ ;  $a$  为  $y(t=0) = 101.7$ ;  $b$  为  $y(t=0) = 101.52$ ; 阈值  $y_M = 101.475$ ; 时间单位为  $k^{-1}$  (以下各图同此)

2. 过冲及衰减振荡现象 只有当标度化的腔失谐量 $\theta$ 不为零时,才会有过冲及衰减振荡现象.衰减振荡来源于与入射场频率最接近的两个腔模的相互竞争,振荡频率正比于失谐量 $\theta$ (图2).

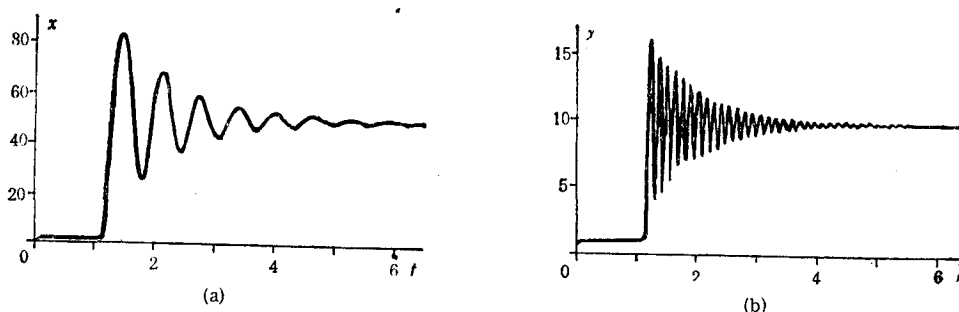


图2 过冲及衰减振荡现象

$C = 500$ ;  $\Delta = 0$ ; (a)  $\theta = 10$ ,  $y(t=0^-) = 400.531$ ,  $y(t=0) = 501.131$ ;  
(b)  $\theta = 50$ ,  $y(t=0^-) = 401.280$ ,  $y(t=0) = 503.555$

3. 异常开关现象 异常开关现象只发生在原子失谐不为零的时候.此时  $y(t=0)$  只需要大于某个阈值  $y_{th}$ , 就可以使  $x$  最终稳定在高透支上, 而  $y_{th}$  比  $y_M$  小(图3). 计算结果还显示,  $y_{th}$  随  $y(t=0^-)$  而变, 当  $y(t=0^-)$  接近  $y_M$  时,  $y_{th}$  就接近  $y_M$  (图4). 仔

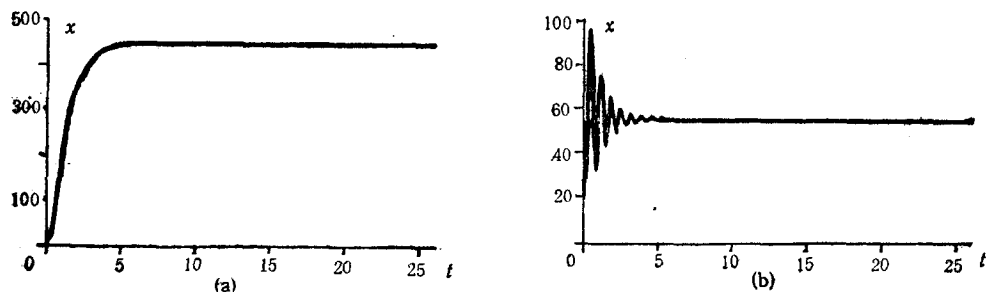
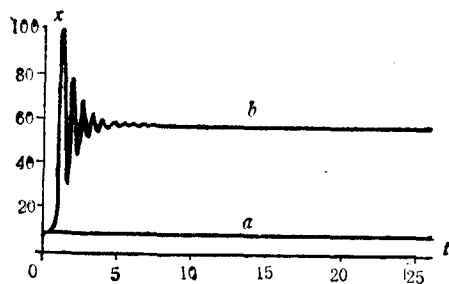


图 3 异常开关现象

$C = 500$ ; (a)  $\Delta = 10, \theta = 0, y(t=0^-) = 98.632, y(t=0) = 450, y_M = 501.101$ ;  
 (b)  $\Delta = \theta = 10, y(t=0^-) = 88.699, y(t=0) = 380; y_M = 409.686$

图 4 异常开关阈值  $y_{th}$  随  $y(t=0^-)$  变化

$C = 500; \Delta = \theta = 10; y(t=0^-) = 408.770; a$  为  $y(t=0) = 409.655$ ;  
 $b$  为  $y(t=0) = 409.8; y_M = 409.686$

细比较图 3(b) 和图 4 列出的参数值, 就可以得到这一结果。

### 三、线性稳定性分析

根据 Hurwitz 判据<sup>[6]</sup>, 可以得到方程 (2) 的定态解在小扰动下保持稳定的两个条件:

$$(1 + \omega C x_i) + \omega C x_i \frac{d x_i}{d(x^2)} > 0, \quad (5a)$$

$$\frac{d(y^2)}{d(x^2)} > 0, \quad (5b)$$

其中  $\frac{d(y^2)}{d(x^2)}$  由定态解方程的一阶导数给出。这两个条件可称为本征型 OBS 与 LS 的线性稳定判据, 显然, 它具有与动力学方程 (2) 同样的普适性。

当定态解曲线上出现双稳区域时, 上述条件 (5b) 式在曲线的负斜率部分不满足, 因此这部分是不稳定的。但是, 这部分的定态在物理上不能实现, 所以不必考虑它的失稳问题。因此, 物理上可以实现的不稳定性, 必然来自 (5a) 式, 即当下述条件成立时, 对应的定态是不稳定的:

$$\frac{d\chi_i}{d(x^2)} < -\frac{1 + \bar{\omega} C \chi_i}{\bar{\omega} C x^2}. \quad (6)$$

方程(2)是共振模的动力学方程,所以(6)式也仅对共振模成立,因此它可以看成为优质腔极限下是否存在单模不稳定性的一个判据。据此可见,这种不稳定性只与介质的损耗或增益(取决于 $\chi_i$ )有关,纯色散介质( $\chi_i = 0$ ,如 Kerr 介质)就不可能产生这种不稳定性。

对于均匀加宽的二能级原子物质系统(包括 OBS 及 LS),利用(6)式我们已经得到与半经典的平均场理论一致的结果。

#### 四、结 语

在优质腔极限下,由于在原子谱线宽度内,可以容纳两个或两个以上非共振模,这些非共振模很容易得到足够的增益而被激活,所以在优质腔极限下比较容易产生多模不稳定性。在这种情况下只有单模方程是不够的。但是,在平均场极限下,我们不能够考虑多模问题。所以,要发展包括多个模式的动力学方程,只能在非平均场极限下才可能做得到。最后要指出的是,本文的结果只适用于优质腔的情况。对于非优质腔,则需要从别的途径解决本文开始时提出的问题。

#### 参 考 文 献

- [1] L. A. Lugiato, in *Progress in Optics* XXI, ed. by E. Wolf, (1984); H. Haken, in *Light*, Vol. 2, *Laser Light Dynamics*, North-Holland, (1985), p. 223.
- [2] L. A. Lugiato, P. Mandel and L. M. Narducci, *Phys. Rev.*, A29(1984), 1438.
- [3] F. Casagrande and L. A. Lugiato, in *Quantum Optics*, ed. by C. A. Engelbrecht, Springer-Verlag, (1982), p. 79.
- [4] H. Haken, in *Advanced Synergetics*, Springer-Verlag, (1983), p. 153.
- [5] 张晓东, 华南工学院硕士研究生毕业论文 (1987)。
- [6] Peter Hagedorn, *Non-Linear Oscillations*, Clarendon Press, Oxford, (1981) p. 90.

## THE GENERALIZED DYNAMICAL EQUATION OF OPTICAL BISTABILITY AND LASER AND ITS STABILITY ANALYSIS

OU FA CAI YONG-QIANG

(Department of Physics, South China Institute of Technology Guangzhou)

#### ABSTRACT

A single-mode dynamical equation is obtained from the Maxwell equation with the slowly varying amplitude approximation and the boundary conditions of the cavity, here the mean field limit and the good quality cavity case have been used. This equation is useful in describing the dynamical behavior of intrinsic optical bistable systems and/or lasers with injected signals for any kinds of materials including two-level atoms. Furthermore, according to the linear stability analysis, a generalized instability criterion is derived.