

适用于 CW 同步泵浦染料激光器的 锁模方程及其解

关 信 安 赵 智 虹

(南开大学现代光学研究所)

1987 年 3 月 20 日收到

提 要

在指出传统的锁模方程中的缺陷之后,利用自治模型,重新推导出适用于同步泵浦染料激光器的锁模方程;从此方程出发,只需将其中的增益项 $G(t)$ 对时间 t 展开到二阶,便能求出光脉冲宽度 τ , 强度 I_0 等量的较精确的解析解,这些结果与实验事实相符,并能解释原方程的二阶解所无法解释的现象.

一、引 言

用锁模 A^+ 激光脉冲同步泵浦的染料激光器,是研究超快过程的有力工具,在过去十多年里曾对它本身作过大量的理论研究,其中相当多的工作采用了最初由 Haus^[1] 导出,后来被 Frigo^[2] 和 Ausschnitt^[3] 所推广的锁模方程

$$\left[G(t) - L + \delta T \frac{d}{dt} + \frac{1}{\omega_c^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \right] v(t) = 0. \quad (1)$$

根据此方程或类似的方程^[4],许多作者企图通过将 $G(t)$ 对时间 t 展开到二阶来求出光脉冲宽度 τ , 强度 I_0 等量的解析解,或者借助计算机求数值解,可惜得到的结果与实验并不完全符合^[5,6],而且至今没有找出根本的原因及简单易行的解决办法.

在 CW 同步泵浦染料激光器中,当光脉冲每次通过放大介质(染料喷膜)时,会将增益迅速地耗尽,即增益 $A(t)$ 是 t 的复杂函数,这是大家都知道的实验事实. 因此, $A(t)$ 与算符 $y = \frac{d^2}{dt^2}$ 是互不对易的,即 $[y, A(t)] \neq 0$; 而对于两个互不对易的算符 $y, A(t)$, 根据 Wely 等式, $e^y \cdot e^{A(t)}$ 决不等于 $e^{y+A(t)}$. 如果对此不予重视,那末严格地说,所导出的方程是不适用于 CW 同步泵浦染料激光器的,这便是问题的症结所在.

本文的目的是,依然采用自治模型,并注意到互不对易算符的运算法则,重新导出适用于同步泵浦染料激光器的锁模方程;并在此基础上,将增益 $G(t)$ 对 t 展开到二阶,求出了光脉冲宽度 τ , 强度 I_0 等量的较精确的解析解,这些结果与实验事实相符合,并解释了原方程所无法解释的现象.

二、CW 同步泵浦染料激光器锁模方程的推导

CW 同步泵浦染料激光器由三部份组成: 被重复泵浦的放大介质(染料喷膜)、激光

谐振腔及波长调谐元件,如图 1 所示.

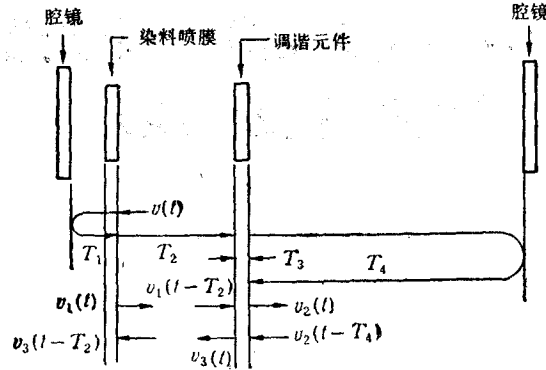


图 1 CW 同步泵浦染料激光器模型

设图 1 中激光介质右界面(起始参考面)处的初始光场为 $v(t) \cdot \exp i\omega_0 t$, 其中 $v(t)$ 为光脉冲包络, ω_0 为激光中心频率. 可以证明, 光脉冲从参考面出发, 经过放大介质、调谐元件等, 在腔内往返一周后, 返回参考面时包络变为^[1]

$$v_4(t) = \exp \left[\left(-\frac{\omega_0 T_R}{4Q} \right) \left(1 - \frac{1}{\omega_c^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \right) \right] \cdot \exp \left[\left(-\frac{\omega_0 T_R}{4Q} \right) \left(1 - \frac{1}{\omega_c^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \right) \right] \cdot e^{A(t)} \cdot v(t - T_R), \quad (2)$$

其中 $A(t)$ 为放大介质的往返增益系数, T_R 为光脉冲在腔内往返一周的时间, ω_c 为调谐元件所确定的腔内带宽, Q 为谐振腔的品质因素.

为便于推导, 令算符

$$-\frac{\omega_0 T_R}{4Q} \left(1 - \frac{1}{\omega_c^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \right) \equiv y(t), \quad (3)$$

利用 (3) 式及算符结合律, 并注意 $y(t)$ 自身是对易算符, 即 $[y(t), y(t)] = 0$, 则 (2) 式可改写成

$$v_4(t) = e^{y(t)} \cdot e^{y(t)} \cdot e^{A(t)} \cdot v(t - T_R) = e^{2y(t)} \cdot e^{A(t)} \cdot v(t). \quad (4)$$

由算子运算法则知两个互不对易的算符 A, B 的指数运算遵守以下法则:

当 $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ 时,

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A, B]}. \quad (5)$$

在 CW 同步泵浦染料激光器中, 放大介质的增益 $A(t)$ 为时间 t 的复杂函数^[2], 故 $[y(t), A(t)] = \frac{1}{\omega_c^2} \left[2A'(t) \frac{d}{dt} + A''(t) \right] \neq 0$, 即 $A(t)$ 与 $y(t)$ 互不对易; 而且

$$[y(t), [y(t), A(t)]] = \frac{1}{\omega_c^2} \left[A''''(t) + 4A'''(t) \frac{d}{dt} + 4A''(t) \frac{d^2}{dt^2} \right] \neq 0,$$

故不能简单地把 (4) 式中 $e^{2y(t)} \cdot e^{A(t)}$ 合并为一个指数项.

腔内损耗 $\frac{\omega_0 T_R}{2Q}$ 为常数, 用它将 (4) 式改写为

$$v_4(t) = e^{[2y(t) + \frac{\omega_0 T_R}{2Q}]} \cdot e^{[A(t) - \frac{\omega_0 T_R}{2Q}]} \cdot v(t). \quad (6)$$

上式 $\left[A(t) - \frac{\omega_0 T_R}{2Q} \right]$ 表示光脉冲在腔内往返一周的净增益; $\left[2y(t) + \frac{\omega_0 T_R}{2Q} \right] = \frac{1}{\omega_c^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2}$ 表示调谐元件对光脉冲的作用。由于染料光脉冲每次经过腔内诸元件时, 只发生小量变化, 故可把(6)式中表示各元件对光脉冲作用的指数项分别展开到一阶:

$$v_1(t) = \left\{ 1 + \left[2y(t) + \frac{\omega_0 T_R}{2Q} \right] \right\} \cdot \left\{ 1 + \left[A(t) - \frac{\omega_0 T_R}{2Q} \right] \right\} \cdot v(t). \quad (7)$$

为推导方便, 令 $\frac{\omega_0 T_R}{2Q} = 1$, 则 $A(t) - \frac{\omega_0 T_R}{2Q} = \frac{\omega_0 T_R}{2Q} \left[\frac{A(t)}{\frac{\omega_0 T_R}{2Q}} - 1 \right] = A(t) - 1$

相当于归一化后的净增益; 再令 $A(t) - 1 \equiv G(t) - 1$, 其中 L 为振荡阈值, $G(t)$ 代表坐标平移 $(L - 1)$ 后归一化的净增益; 于是(7)式变为

$$v_1(t) = \left(1 + \frac{1}{\omega_c^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \right) \cdot [1 + G(t) - L] \cdot v(t). \quad (8)$$

根据算符运算法则对(8)式等号右侧运算后得

$$v_1(t) = v(t) + \left\{ \left[G(t) - L + \frac{G''(t)}{\omega_c^2} \right] + \frac{2G'(t)}{\omega_c^2} \cdot \frac{d}{dt} + \frac{[1 + G(t) - L]}{\omega_c^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \right\} \cdot v(t), \quad (9)$$

其中 $G'(t) = \frac{dG(t)}{dt}$, $G''(t) = \frac{d^2G(t)}{dt^2}$.

另一方面, 根据自洽模型, 在稳态运转时, $v_1(t)$ 相对于 $v(t)$ 除了时间延迟了 T_R 外, 形状只发生小量变化:

$$v_1(t) = v(t) - \delta T \frac{dv(t)}{dt}, \quad (10)$$

其中 $\delta T = -\frac{2\delta L}{c}$, δL 为染料激光器腔长失谐量。把(10)式代入(9)式等号左侧并化简后, 得到适用于同步泵浦染料激光器的锁模方程为

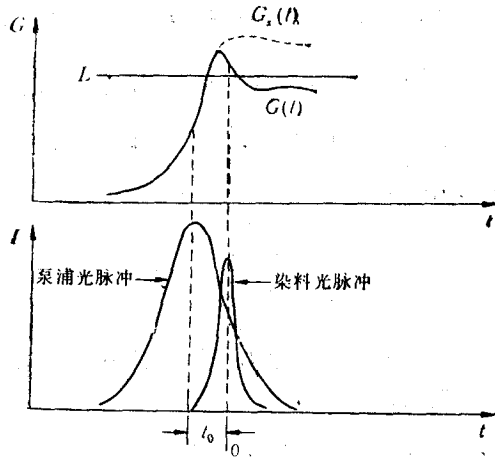
$$\left\{ \left[G(t) - L + \frac{G''(t)}{\omega_c^2} \right] + \left[\frac{2G'(t)}{\omega_c^2} + \delta T \right] \frac{d}{dt} + \frac{[1 + G(t) - L]}{\omega_c^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \right\} \cdot v(t) = 0. \quad (11)$$

显然, 方程(11)与原方程(1)有明显的区别。

三、锁模方程的解

通常, 大家感兴趣的是通过解此方程, 求出染料光脉冲宽度 τ , 强度 I_0 等量与激光器各参数的关系, 以便指导实验中怎样去调整各参数来得到最窄、最强的光脉冲。

欲解此方程, 首先必须确定增益 $G(t)$ 的函数形式, 我们依然采用 Ausschnitt 根据 Frigo 的实验事实^[2]所提出的模型^[3](见图 2): 由于泵浦光脉冲激发, 增益 $G(t)$ 首先上升到阈值以上, 然后, 当染料光脉冲一到达喷嘴, 由于受激辐射, 使增益系数急剧下降; 这种由染料脉冲造成的增益调制效应是产生很窄的光脉冲的必要条件。 $G(t)$ 可由速率方程来确定

图2 $G(t)$ 的模型图

$$G_{s0} \equiv G_s(0), \quad \frac{1}{\tau_r} \equiv \left. \frac{dG_s(t)}{dt} \right|_{t=0}, \quad \frac{1}{\tau_c^2} = -\frac{1}{2} \cdot \left. \frac{d^2G_s(t)}{dt^2} \right|_{t=0}. \quad (17)$$

最近的实验事实表明^[7], CW 同步泵浦染料光脉冲的包络介于高斯型与 Sech² 型之间,但高斯型与 Sech² 型相差甚微,为便于求解,取 $v(t)$ 为高斯型,即

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}, \quad I(t) = I_0 e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}. \quad (18)$$

将 (13), (18) 两式代入锁模方程 (11), 求出系数 A, B, C 与激光器参数 $\delta T, L, \omega_c$ 及染料光脉冲宽度 τ 的关系为

$$A \left(1 - \frac{1}{\omega_c^2 \tau^2} \right) = \frac{1}{\omega_c^2 \tau^2} + L - \frac{2c}{\omega_c^2}, \quad (19)$$

$$B \left(1 - \frac{3}{\omega_c^2 \tau^2} \right) = \frac{\delta T}{\tau^2}, \quad (20)$$

$$C \left(1 - \frac{5}{\omega_c^2 \tau^2} \right) = -\frac{A + 1 - L}{\omega_c^2 \tau^4}. \quad (21)$$

另一方面,小信号增益为

$$G_s(t) \sim G_m \int_{-\infty}^t I_p(t') dt', \quad (22)$$

G_m 为可获得的最大增益, $I_p(t)$ 为泵浦光脉冲的光强,当采用锁模 A^* 激光脉冲作泵浦光时, $I_p(t)$ 为高斯型^[8]

$$I_p(t) = \frac{E_{p0}}{\sqrt{\pi} \tau_p} \cdot e^{-\frac{(t+t_0)^2}{\tau_p^2}}, \quad (23)$$

E_{p0} 为泵浦光脉冲的总能量(以染料吸收的饱和能量为单位); t_0 为泵浦光脉冲相对染料光脉冲的提前量, τ_p 为泵浦光脉冲的脉宽. 将 (23) 式代入 (22) 式得到

$$G_s(t) \sim \frac{G_m E_{p0}}{2} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{t+t_0}{\tau_p}} e^{-t'^2} dt' \right] \sim \frac{G_m E_{p0}}{2} \left[1 + \operatorname{erfc} \left(\frac{t+t_0}{\tau_p} \right) \right]. \quad (24)$$

将 (24) 式代入 (17) 式, 得出与 $G_s(t)$ 有关的 $G_{s0}, 1/\tau_r, 1/\tau_c^2$ 与泵浦光脉冲参数之间的关系

$$\frac{dG(t)}{dt} = \frac{dG_s(t)}{dt} - I(t)G(t), \quad (12)$$

$G_s(t)$ 为小信号增益. 根据有关的假设条件^[1], 可将 $G(t)$ 对时间展开到二阶

$$G(t) = A + Bt + Ct^2, \quad (13)$$

$$A = G_{s0} \left(1 - \int_{-\infty}^0 I(t) dt \right), \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{\tau_r} - I_0 G_{s0}, \quad (15)$$

$$C = - \left[\frac{1}{\tau_c^2} + \frac{I_0}{2} \left(\frac{1}{\tau_r} - I_0 G_{s0} \right) \right], \quad (16)$$

式中

$$G_{s0} = \frac{G_m E_{p0}}{2} \left[1 + \operatorname{erfc} \left(\frac{t_0}{\tau_p} \right) \right], \quad \frac{1}{\tau_r} = \frac{G_m E_{p0}}{\sqrt{\pi} \tau_p} \cdot e^{-\frac{t_0^2}{\tau_p^2}}, \quad \frac{1}{\tau_c^2} = \frac{G_m E_{p0}}{\sqrt{\pi} \tau_p} \cdot \frac{t_0}{\tau_p^2} \cdot e^{-\frac{t_0^2}{\tau_p^2}}. \quad (25)$$

把(25)式与(14)–(16)式以及(19)–(21)式联立,并根据同步泵浦染料激光器的基本实验事实^[2,3]: $\tau_p \gg \delta T$, $t_0/\tau_p < 1$, 进行化简得到

$$\tau = \sqrt{\frac{\sqrt{\pi} \tau_p \delta T^3 \sqrt{2}}{18 G_m E_{p0}} + \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \tau_p}{3 \omega_c^2 \delta T} \left[1 + \operatorname{erfc} \left(\frac{t_0}{\tau_p} \right) \right]}, \quad (26)$$

$$I_0 = \frac{6}{\sqrt{\pi} \tau_p} \cdot \frac{(6/\sqrt[3]{2}) G_m E_{p0}}{\omega_c^2 \delta T^2 + \sqrt[3]{3} G_m E_{p0} \left[1 + \operatorname{erfc} \left(\frac{t_0}{\tau_p} \right) \right]}. \quad (27)$$

四、讨 论

大量的实验事实表明, 染料光脉冲的宽度 τ 对染料激光器腔长失谐量 δL 的变化极为敏感, 在其他条件不变时, δL 存在最佳值 $(\delta L)_{\text{opt}}$, 使 τ 达到最小值 τ_{min} ; 当 $\delta L < (\delta L)_{\text{opt}}$ 时, τ 急剧增大; 而当 $\delta L > (\delta L)_{\text{opt}}$ 时, τ 也增大, 但趋势变化较缓慢^[9].

根据(26)式, 并利用 $\delta T = 2\delta L/c$, 作出 τ 随 δL 变化的曲线, 如图3中 a, 显然它与上述实验结果相符合. 对 τ - δL 的关系可以这样解释: 当 δL 较小时, (26)式等号右端中第二项 $\frac{\sqrt[3]{3} \sqrt{\pi} \tau_p}{3 \omega_c^2 \delta T} \left[1 + \operatorname{erfc} \left(\frac{t_0}{\tau_p} \right) \right]$ 的贡献较大 (δT 在分母上), 即 δL 较小时, 腔内带宽 ω_c 对脉宽起主要作用, 它使 τ 随 δL 的增加而迅速变窄; 当 δL 变得比较大时, (26)式等号右端中第一项 $\frac{\sqrt[3]{2} \sqrt{\pi} \tau_p \delta T}{18 G_m E_{p0}}$ 的贡献逐渐增大 (δT 在分子上), 这时腔内增益调制对脉宽起主要作用, 它使 τ 随 δL 的增加而缓慢增大; 当 $\delta L = (\delta L)_{\text{opt}}$ 时, 腔内带宽与增益调制作用对 τ 的影响差不多时, τ 就达到最小值.

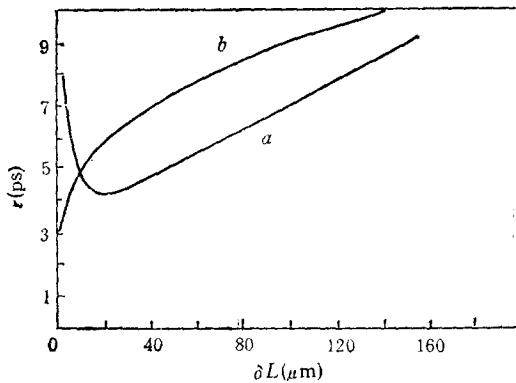


图3 τ 与 δL 的关系

$\omega_c = 5 \times 10^{12} \text{s}^{-1}$; $\tau_p = 100 \text{ps}$; $G_m E_{p0} = 0.55$

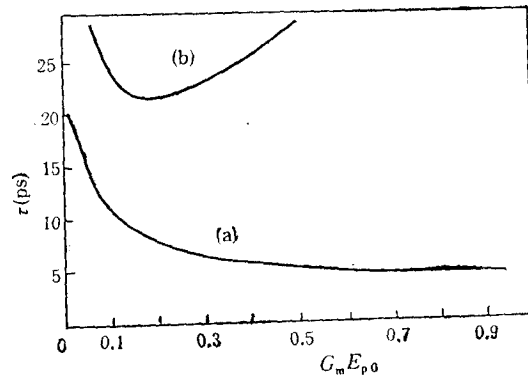


图4 τ 与 $G_m E_{p0}$ 的关系

$\omega_c = 5 \times 10^{12} \text{s}^{-1}$; $\tau_p = 100 \text{ps}$;
 $L = 0.46$; $\delta T = 0.2 \text{ps}$

从原方程(1)出发,采用类似(13)–(25)等式的计算步骤;可求得 τ 的表达式为

$$\tau = \frac{\tau_p}{3(G_m E_{p0})^{2/3}} \left[\sqrt[3]{\frac{58}{27} (G_m E_{p0} F - 2L)^3 \omega_c^2 \tau_p^2 - \frac{81}{4}} \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{50}{27} (G_m E_{p0} F - 2L)^3 \omega_c^2 \tau_p^2 + \frac{4}{3} \sqrt{\pi} G_m E_{p0} (G_m E_{p0} F - 2L)^4 \tau_p^3 \omega_c^4 \delta T - \frac{135}{4}} \right], \quad (28)$$

其中 $F = 1 + \operatorname{erfc}\left(\frac{t_0}{\tau_p}\right)$. 根据上式,画出 τ - δL 曲线如图3中 b^* , τ 随 δL 增加而单调增大,不存在极小值 τ_{\min} ,这与实验结果不符合.

此外,实验结果还表明,随着泵浦脉冲的能量 $G_m E_{p0}$ 的增加, τ 是单调减小的^[10]. 利用(26)式,作出 τ - $G_m E_{p0}$ 的曲线,如图4中 a ,它与实验结果基本相符;而根据(28)式得到的 τ - $G_m E_{p0}$ 的曲线(图4中 b),则与实验规律不一致.

参 考 文 献

- [1] H. A. Haus, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-11** (1975), 736.
- [2] N. J. Frigo, T. Daly and H. Mahr, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-13** (1977), 101.
- [3] C. P. Ausschnitt, R. K. Jain and J. P. Heritage, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-15** (1979), 912.
- [4] Dae M. Kim, J. Kuhl, R. Lambrich and D. von der Linder, *Optics Comm.*, **27**(1978), 123.
- [5] G. H. C. New and J. M. Catherall, *Optics Comm.*, **50** (1984), 111.
- [6] F. Minami and K. Era, *Optics Comm.*, **56**(1985), 46.
- [7] G. J. Blanchard and M. J. Wirth, *Optics Comm.*, **53**(1985), 394.
- [8] 关信安、袁树忠、吕福云, *中国激光*, **13**(1986), 96.
- [9] 刘玉璞、张影华、张国轩、傅宝祥, *光学学报*, **3**(1983), 332.
- [10] J. Kuhl, H. Klingenberg, D. von der Linde, *Appl. Phys.*, **18**(1979), 279.

A NEW MODE-LOCKED EQUATION FOR SYNCHRONOUSLY PUMPED DYE LASERS AND ITS SOLUTION

GUAN XIN-AN ZHAO ZHI-HONG

(*Institute of Modern Optics, Nankai University, Tianjin*)

ABSTRACT

A new mode-locked equation suitable for synchronously pumped dye lasers is presented, after the drawbacks in the conventional equation are pointed out. The analytical expressions for pulsewidth τ and pulse-intensity I_0 are obtained by expanding the gain $G(t)$ to second order of t only. The theoretical analyses are well consistent with experiments and can interpret some experimental phenomena which can not be explained by the second order solution of the original equation.