

激光束在漫射表面上的散射 (III)

程 路

(南开大学物理系)

1987年1月12日收到

提 要

本文用更为合理的“等效圆”模型修正了文献[1]和[2]中的弓形面积模型。

对于相干光在随机起伏表面(有用的是弱漫射表面)上的散射所涉及的特定随机行走,作者曾引进一个“质心”近似模型将其简化而导出了公式^[1,2],并由此引出一种简易的测量工件表面粗糙度¹⁾的“核-带比”方法^[3]。

在文献[1]和[2]中,将每一步特定的随机行走分为两步:第一步走到概率密度弧的质心;第二步则从该质心出发以步长 T 走出一个各向等概率的随机步子,这个步长 T 是这样一个圆的半径,该圆的面积与弓形(见文献[1]的图5)面积相等。

其实,这样来确定随机步长 T 道理是不够充分的。本文提出一种更为合理的确定 T 的原则。该原则的依据是,随机变量的期望值(均值)与力学中的质心相对应,方差则与转动惯量对应。就是说,若随机变量 x 的概率密度分布函数为 $p_X(x)$,则其均值

$$\bar{x} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx, \quad (1)$$

与一个沿 x 轴放置的线状物体的质心 C 的坐标 x_C 相等,该物体的线密度 $\rho(x) = p_X(x)$ 。又,随机变量 x 的方差

$$\sigma_x^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_C)^2 p_X(x) dx, \quad (2)$$

与上述线状物体绕一个轴的转动惯量相等,该轴过质心 C 且垂直于 x 轴。

对于激光束经粗糙表面漫射后在空间某点形成的波场,我们也是要导出场的期望值(主反射场)和对于期望值的方差(散斑光强)。在文献[1]至[3]中已经用质心模型解决了计算主反射场的问题。

从质心出发的随机步子正是与散斑光强即方差相对应的,由此可见,该随机步子的步长 T 应该对应于这样一个圆 ϵ (图1)的半径:该圆以质心 C 为中心,其总质量与弧 $AA^{2)}$ 的总质量相等(皆为1——盖因弧 AA 的总质量对应于概率密度的全积分),且该圆 ϵ 绕一条通过 C 且垂直于图面的轴的转动惯量与弧 AA 绕同一轴的转动惯量亦相等。

例如,设粗糙表面微观随机高度 h 的概率密度呈正态分布

1) 原称光洁度,现已正式规定称为粗糙度。

2) 弧 AA 的意义见文献[1]的图5。

$$p_H(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_H} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma_H^2}\right), \quad (3)$$

则与之对应的漫反射波场的随机位相 φ 的概率密度分布为

$$p_\phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2\sigma_\phi^2}\right). \quad (4)$$

这相当于弧 AA 的线密度(以每弧度的质量为单位)为

$$\rho(\varphi) = p_\phi(\varphi). \quad (5)$$

于是 $x_C = OC$ 为

$$\begin{aligned} x_C &= \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(\varphi) d\varphi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (a \cos \varphi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2\sigma_\phi^2}\right) d\varphi \\ &= a \exp\left(-\frac{\sigma_\phi^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

弧 AA 绕质心 C 的转动惯量为

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} l^2 \rho(\varphi) d\varphi, \quad (7)$$

其中 l 为 P 到 C 的距离为

$$l^2 = (a \cos \varphi - x_C)^2 + a^2 \sin^2 \varphi. \quad (8)$$

于是

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{\infty} [(a \cos \varphi - x_C)^2 + a^2 \sin^2 \varphi] \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2\sigma_\phi^2}\right) d\varphi \\ &= a^2 [1 - \exp(-\sigma_\phi^2)]. \end{aligned} \quad (9)$$

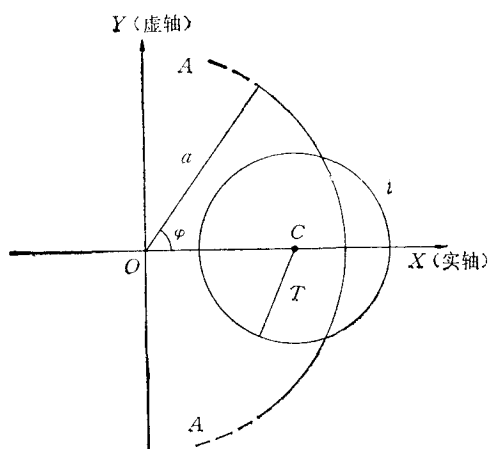


图 1

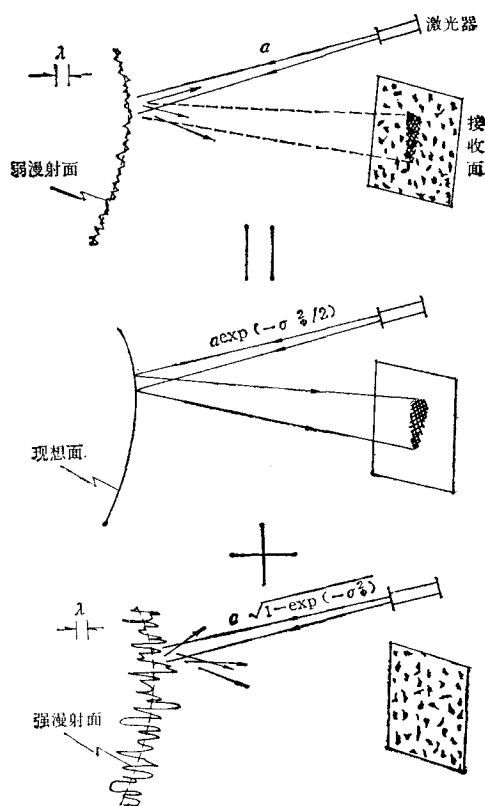


图 2

另一方面, 由于圆 ι 的总质量为 1, 所以它绕 C 轴的转动惯量等于其半径 T 的平方, 即

$$T^2 = J = a^2[1 - \exp(-\sigma_0^2)], \quad (10)$$

从而得出

$$T = a\sqrt{1 - \exp(-\sigma_0^2)}. \quad (11)$$

由于随机步子的位相角与走向质心的规则步子统计无关, 所以接收面上总的光强为规则行走造成的主反射光强加上随机行走造成的散斑光强。于是对于 h 作正态分布的情况可以得出如下结论: 振幅为 a 的激光束射在弱漫射表面上时, 接收面上的光强分布等于以下两项光强分布之和: 第一项是把振幅减小到 $a\exp(-\sigma_0^2/2)$ 的激光束射在相应的理想光滑表面上时产生的几何光学反射光强分布; 第二项是把振幅减小到 $a\sqrt{1 - \exp(-\sigma_0^2)}$ 的激光束射在相应的强漫射表面上时产生的典型散斑光强。

图 2 示意地画出了这一结论。

图 1 中的圆 ϵ 可称为“等效圆”; 这样, 整个的统计模型可称为“质心加等效圆”模型。

参 考 文 献

- [1] 程路, 物理学报, **27**(1978), 651.
- [2] 程路, 物理学报, **28**(1979), 470.
- [3] 程路、张炳泉, 物理学报, **29**(1980), 1570.

SCATTERING OF LASER BEAM BY DIFFUSING SURFACES (III)

CHENG LU

(Department of Physics, Nankai University, Tianjin)

ABSTRACT

This paper gives an “equivalent circle” model which modifies the bow-shaped area model in papers [1] and [2].