

分数量子 Hall 体系的电荷分布*

熊 小 明 周 世 勋

(复旦大学物理系)

1987 年 1 月 6 日收到

提 要

对 $1/3$ Landau 填充因子的二维电子气体体系, 用迭代自洽的计算方法得到了局域电中性背景下的电荷密度分布. 我们发现电荷密度分布与基态能量的尖角有密切的联系.

在分数量子 Hall 效应领域, 对少数电子体系的数值计算已经作了很多工作^[1-7], Laughlin 计算了三个电子体系, 并建立了解释分数量子 Hall 效应的不可压缩流体理论. 他发现分数量子 Hall 体系是一种新的流体状态^[8], 可以用经典的单分量等离子体的方法处理. 根据与单分量等离子体的类比, 分数量子 Hall 体系的电荷分布应该是常数.

很多数值计算都是用均匀正电背景作为正电荷的分布, 因此, 电子的密度分布都趋向均匀分布. 例如 Takano 和 Isihara^[7] 给出填充因子 ν 为 $1/3$ 时, 电子密度趋于常数 $1/3$.

Lai 等人从另一角度考虑了正电荷的贡献. 他们考虑局域电中性体系^[6]. 正电荷的分布由体系的电子波函数决定. 由于放弃了均匀正电背景的假设, 因此背景的电荷分布以及电子的电荷密度就不再是常数. 本文给出了局域电中性体系电荷的分布函数的数值结果. 计算结果表明电荷的密度分布与基态能量出现的尖角有密切联系.

另一方面, 在 Lai 等人的计算过程中, 体系并不是局域电中性的. 他们用以构造正电密度的波函数并不是体系的本征态. 本文在计算中用自洽迭代的方法, 确保局域电中性条件得到满足. 并且, 本文中对给定填充因子 $\nu = 1/3$ 的情况考虑了单电子角动量受 Landau 简并度的限制. 这样计算出的体系能量都有一定的修正.

对少数电子体系的数值计算, 最后总是归结为求解本征方程

$$\hat{H}\Phi = E\Phi \quad (1)$$

其中 $\hat{H}$ 为体系的哈密顿量, 在二次量子化表象中, $\hat{H}$ 由电子的产生和湮灭算符 $c_i^\dagger$ 和 c_i 表示为

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} V(i,j,k) c_i^\dagger c_j^\dagger c_{i-k} c_{i+k} \\ & + \sum_i V_b c_i^\dagger c_i + \frac{1}{2} V_{bb}, \end{aligned} \quad (2)$$

* 中国科学院科学基金资助的课题.

其中 V_b 和 V_{bb} 为与背景有关的相互作用积分, $V(i, j, k)$ 为电子间的库仑相互作用积分. 不同的处理方法在于以不同的途径得到体系的哈密顿矩阵. 在强磁场中的二维电子气体系

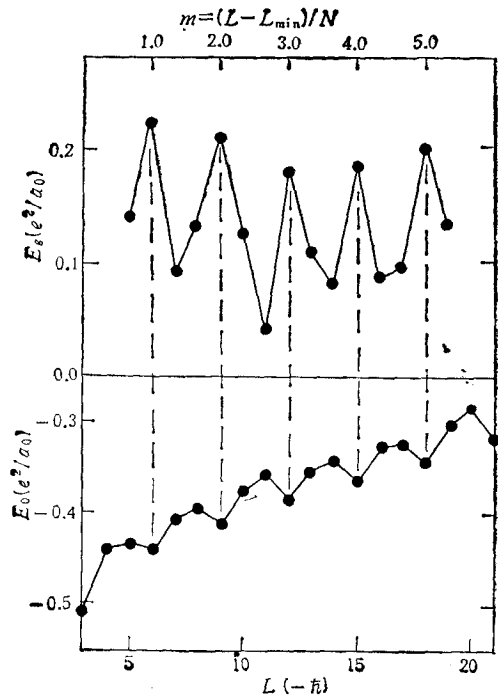


图 1

$$\begin{aligned}
 V(i, j, k) &= \int d^2r_1 d^2r_2 \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_j^*(\mathbf{r}_2) \\
 &\times \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \phi_{i+k}(\mathbf{r}_1) \phi_{j-k}(\mathbf{r}_2) \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{l=0}^{i+j} b_l(i, j) b_l(i+k, j-k) \\
 &\times \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

其中 $\phi_i(\mathbf{r}_1)$ 为单电子的波函数, $b_l(i, j)$ 满足下列递推关系:

$$\begin{aligned}
 b_0(i, j) &= \lambda, \\
 b_1(i, j) &= \frac{(i-j)}{\sqrt{i+j}} b_0(i, j), \\
 b_l(i, j) &= \frac{(i-j) b_{l-1}(i, j)}{\sqrt{(i+j-l+1)l}} \\
 &- \frac{\sqrt{(i+j-l+2)(l-1)}}{\sqrt{(i+j-l+1)l}} b_{l-2}(i, j),
 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sum_{l=0}^{i+j} |b_l(i, j)|^2 = 1. \quad (4)$$

相互作用积分 V_b 和 V_{bb} 与背景电荷的密度有关.

$$\begin{aligned}
 V_b &= - \int d^2r d^2x n(\mathbf{x}) \phi_i^*(\mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \phi_i(\mathbf{r}), \\
 V_{bb} &= \int d^2x d^2x' n(\mathbf{x}) n(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (5)
 \end{aligned}$$

其中 $n(\mathbf{x})$ 为背景电荷密度. 在局域电中性条件下, $n(\mathbf{x})$ 依赖于方程 (1) 的本征矢.

$$n(\mathbf{x}_1) = \int |\Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 d^2x_2 \dots d^2x_N. \quad (6)$$

因此, 要用逐次迭代的方法. 才能得到自洽的结果.

随着电子数目 N 的增加以及总角动量增大, 本征方程的阶数增长很快. 这限制了少体问题只能讨论 N 较小的情况. 对于给定填充因子 ν 的体系, Landou 简并度 G 与电子数 N 的关系为:

$$G = N/\nu. \quad (7)$$

因此, 单电子的角动量被限制在 $0 \leq l < G$ 的范围.

图 1 和图 2 分别给出了 $\nu = 1/3$, $N = 3$ 和 $\nu = 1/3$, $n = 4$ 时体系的基态能和第一激发能隙. 正如 Lai 等人指出的那样, 当总角动量满足下列关系时, 基态能量出现向下

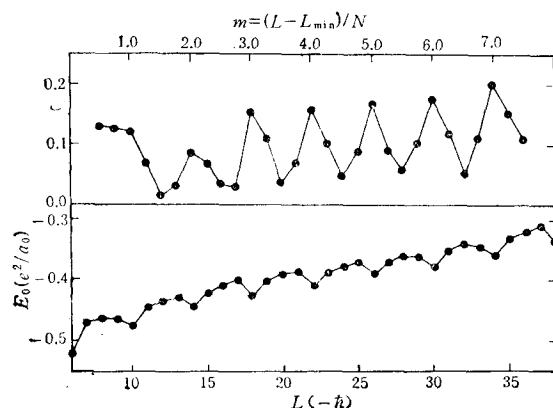


图 2

的尖角:

$$L_m = \frac{2m + N - 1}{2} N \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

从图 1 和图 2 中还可以看到, 每一个能量的尖角对应于第一激发能隙的极大值。

图 3 给出 $N = 3$ 的电子体系在不同总角动量 L 时电荷密度的分布。可以看到, 对应于基态能尖角处的角动量 $L = 6$ 和 9 , 电荷密度具有与众不同的特征。它们对应于电荷的一个环状分布, 而其它角动量时, 电荷分布呈盘状。图 4 表示三电子体系各个能量尖角的电荷分布。随着角动量的增加, 环的半径逐渐增大。

图 5 给出 $N = 3$ 和 $m = 1.0$ 时, 基态和激发态的密度分布。各激发态的分布基本相近, 而基态与激发态则差别很大。图 6 是对不同粒子数 N 的体系在 $m = 1.0$ 处基态的密度函数。它们都具有相同的特征。

综上所述, 我们通过自洽迭代的方法, 对少体问题求出了体系的基态能量和对应的电

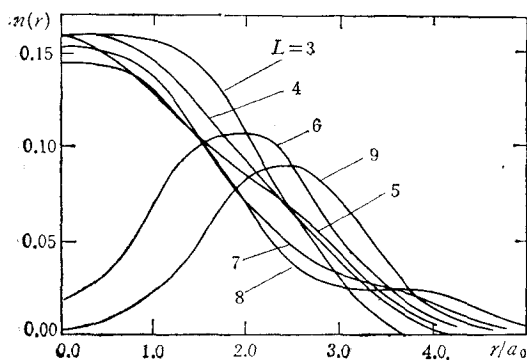


图 3

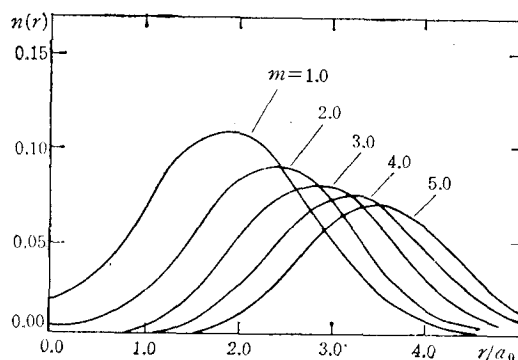


图 4

荷分布。基态能相对于总角动量的曲线, 周期性地出现奇异性, 并且这奇异性对应于能隙的一个极大值。电荷密度的分布提示我们, 电子的空间分布, 采取环的形状更有利于基态能量。

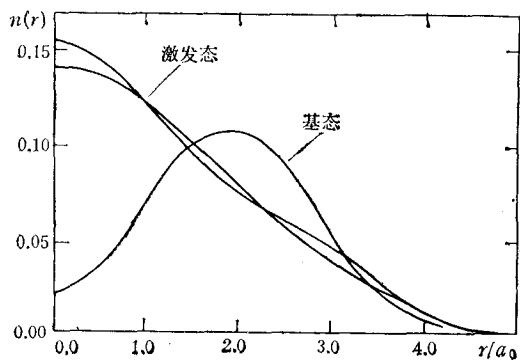


图 5

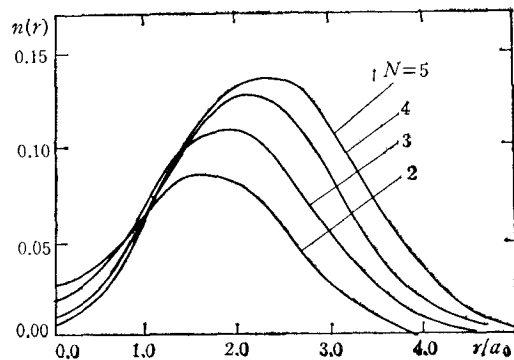


图 6

参 考 文 献

- [1] R. B. Laughlin, *Phys. Rev.*, **B27**(1983), 3383.
- [2] D. Yoshioka, B. I. Halperin and P. A. Lee, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 1219.
- [3] S. M. Girvin and T. Jach, *Phys. Rev.*, **B28**(1983), 4506.
- [4] F. D. M. Haldane and E. H. Rezayi, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985), 237.
- [5] D. Levesque, J. J. Weis and A. H. MacDonald, *Phys. Rev.*, **B30**(1984), 1056.
- [6] W. Lai, K. Yu, Z. Su and L. Yu *Solid State Commun.*, **52**(1984), 339.
- [7] K. Takano and A. Isihara, *Phys. Rev.*, **B34**(1986), 1399.
- [8] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 1395.

THE CHARGE DENSITY OF FRACTIONAL QUANTIZED HALL REGIME

XIONG XIAO-MING ZHOU SHI-XUN

(Department of Physics, Fudan University, Shanghai)

ABSTRACT

The charge density of the local charge neutrality two dimensional electron system has been obtained for $1/3$ Landau filling factor by the self consistent iteration method. We find a characteristic density distribution for the downward cusps of the ground state energies.