

# 伊辛模型的四分支临界面及其临界行为

唐 坤 发    胡 嘉 桢

(上海交通大学应用物理系, 凝聚态物理研究所)

1987 年 4 月 20 日收到

## 提      要

本文通过等标度同普适类变换理论,使严格的重正化群递推方程得以直接应用. 对伊辛模型的计算产生了四个不动点、四支临界面. 对应于铁磁及反铁磁相变,其结果与已知的严格解及最好近似解一致. 对于超反铁磁相变,本文提出临界曲面方程为  $-\text{ch}(h) = \text{sh}(2K_x)\text{sh}(2K_y)$ .

## 一、引      言

近年来,实空间重正化群理论<sup>[1]</sup>已广泛应用于相变和临界现象. 所谓重正化变换,实质上是一种标度变换,它利用了系统在临界点附近具有标度不变性这一特征<sup>[2]</sup>. 这一基本思想已被推广到其它的物理分支<sup>[3]</sup>. 不过重正化方程只能近似求解. 严格的重正化变换将带来参数空间的增大. 除非取无穷维参数空间,才能使系统哈密顿量在重正化变换中其形式保持不变. 然而这又使问题回到了无穷多自由度体系,甚至使问题变得更加复杂. 通常的做法是采用累积量展开近似<sup>[4]</sup>、集团展开近似<sup>[5]</sup>、键移近似<sup>[6]</sup>等. 由于采用了各种近似手段,使得重正化方程失去了原有的一些信息. 以最近邻相互作用的伊辛模型为例,根据其对称性应有四个非平庸不动点及四支临界面. 然而采取了以上所说的这些近似后,只剩下部分不动点及其相应的临界面分支. 如果运用严格的 decimation 变换于该伊辛模型,所得结果保持了原哈密顿量的所有对称性. 但是由于哈密顿量不再保持原有形式,由原来的一个最近邻相互作用参数增加到最近邻、次近邻和四体相互作用三个参数,无法得到重正化方程. 本文运用作者先前提出的同普适类等标度变换理论<sup>[7]</sup>,使得严格的 decimation 变换结果得以应用. 从而得到伊辛模型的四个不动点及其四个临界面分支,并得到了相应的临界指数.

## 二、伊 辛 模 型

伊辛模型是第一个被严格求解的统计模型<sup>[8]</sup>. 它的临界行为已被人们很好地了解. 一般地,它取以下形式:

$$H = \sum_{\langle ij \rangle}^x K_x \sigma_i \sigma_j + \sum_{\langle ij \rangle}^y K_y \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \sigma_i. \quad (1)$$

这里  $\sum_i$  对所有格点求和,  $\sum_{\langle ij \rangle}^x$  和  $\sum_{\langle ij \rangle}^y$  分别对  $x$  和  $y$  方向的最近邻相互作用对求和. 变量  $\sigma_i$  取值  $\{+1, -1\}$ .  $K_x, K_y$  和  $h$  分别表示  $x$  和  $y$  方向上的最近邻耦合常数及磁场. 在零场情况下, 参数空间  $\{K_x, K_y\}$  中临界面方程为

一、三象限 ( $K_x > 0, K_y > 0$  和  $K_x < 0, K_y < 0$ )

$$\text{sh}(2K_x)\text{sh}(2K_y) = 1. \quad (2)$$

二、四象限 ( $K_x < 0, K_y > 0$  和  $K_x > 0, K_y < 0$ )

$$\text{sh}(2K_x)\text{sh}(2K_y) = -1. \quad (3)$$

在有磁场的情况下, 没有一般的严格解结果. 对于反铁磁情况, 磁场不再是相关参量. Müller-Hartmann 和 Zittartz<sup>[9]</sup> 提出了下面的临界面方程:

$$\text{ch}h = \text{sh}(2K_x)\text{sh}(2K_y). \quad (4)$$

后来 Sneddon 运用唯象重正化群计算了反铁磁伊辛模型<sup>[10]</sup>, 所得结果与 (4) 式几乎完全符合.

### 三、重正化方案

对于二维平方晶格上的伊辛模型 (1) 式, 经过严格重正化变换 (decimation 变换) 后, 保持晶格形状不变, 重正化后的哈密顿量取以下形式:

$$\begin{aligned} H' = & 2B \sum_{NN} \sigma_i \sigma_j + B_x \sum_{NNN}^x \sigma_i \sigma_j + B_y \sum_{NNN}^y \sigma_i \sigma_j + C \sum_p \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l \\ & + E \sum_i \sigma_i + D_x \sum_T^x \sigma_i \sigma_j \sigma_k + D_y \sum_T^y \sigma_i \sigma_j \sigma_k. \end{aligned} \quad (5)$$

这里

$$B = \frac{1}{16} \sum_{i,j=1}^2 \ln [(-1)^{i+1} \text{ch}(2K_x + (-1)^{i+1} 2K_y + (-1)^i h)],$$

$$\begin{aligned} B_x = & \frac{1}{16} \sum_{i,j=1}^2 \ln \text{ch}(2(K_x + (-1)^{i+1} K_y) + (-1)^i h) \\ & + \frac{1}{8} \sum_{j=1}^2 \ln \frac{\text{ch}(2K_y + (-1)^j h)}{\text{ch}(2K_x + (-1)^j h)} - \frac{1}{4} \ln \text{ch}h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_y = & \frac{1}{16} \sum_{i,j=1}^2 \ln \text{ch}(2(K_x + (-1)^{i+1} K_y) + (-1)^i h) \\ & - \frac{1}{8} \sum_{j=1}^2 \ln \frac{\text{ch}(2K_y + (-1)^j h)}{\text{ch}(2K_x + (-1)^j h)} - \frac{1}{4} \ln \text{ch}h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = & \frac{1}{16} \sum_{i,j=1}^2 \ln \text{ch}(2(K_x + (-1)^{i+1} K_y) + (-1)^i h) \\ & - \frac{1}{8} \sum_{j=1}^2 \ln \text{ch}(2K_x + (-1)^j h) \cdot \text{ch}(2K_y + (-1)^j h) + \frac{1}{4} \ln \text{ch}h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E &= h + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \ln \text{ch}(2K_x + 2K_y + (-1)^i h) \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \ln \text{ch}(2K_x + (-1)^i h) \cdot \text{ch}(2K_y + (-1)^i h), \\
 D_x &= \frac{1}{16} \sum_{i,j=1}^2 (-1)^i \ln \text{ch}(2K_x + 2(-1)^i K_y + (-1)^i h) \\
 &\quad - \frac{1}{8} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \ln \text{ch}(2K_x + (-1)^i h), \\
 D_y &= \frac{1}{16} \sum_{i,j=1}^2 (-1)^j \ln \text{ch}(2K_y + 2(-1)^j K_x + (-1)^j h) \\
 &\quad - \frac{1}{8} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \ln \text{ch}(2K_y + (-1)^j h). \tag{6}
 \end{aligned}$$

$\sum_{NN}$  表示对最近邻相互作用求和,  $\sum_{NNN}^x$  和  $\sum_{NNN}^y$  分别表示对原  $x$  和  $y$  方向上的次近邻相互作用求和,  $\sum_p$  表示对正方形四体相互作用求和,  $\sum_r^x$  和  $\sum_r^y$  分别表示构成等腰三角形其底边沿原  $x$  和  $y$  方向上的三体相互作用求和(见图 1).

尽管新的哈密顿量不再保持原有的形式, 但与原哈密顿量属于同一普适类, 具有相同的临界现象. 根据这一性质, 我们可以在同一标度下运用平均场理论或有限标度理论来计算它们的热力学量, 并令它们在临界点具有相同的渐近行为. 如此便可建立这两个具有不同形式但具有相同临界行为的哈密顿量的参量之间的关系. 本文计算采用类平均场近似. 考虑一个具有  $L^2$  个自旋的集团, 边界上引入对称破缺场  $b$  来模拟集团外自旋对所考虑集团的影响, 同时也作为系统趋向临界点的量度. 在临界点附近, 即当对称破缺场以及磁场  $h$  趋于零时, 要求系统的平均场近似序参量  $M$  满足下列等式:

$$\begin{aligned}
 M'(B, B_x, B_y, C, D_x, D_y, E, b) &= qM(K', h', b') \\
 b &= qb'. \tag{7}
 \end{aligned}$$

这里  $q$  是一个比例常数.

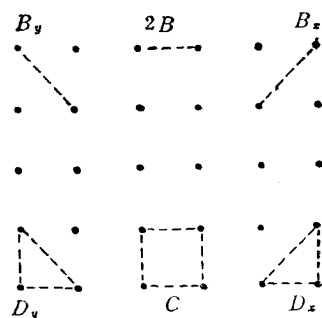


图 1

## 四、计算结果

本文计算取  $L^2 = 4$ . 由于 (7) 式只能给出两个递推关系, 因此我们先取  $|K_x| = |K_y| = |K|$  的情况. 然后由等标度变换理论<sup>[7]</sup>及所知各向同性伊辛模型的临界点结果计算各向异性时的临界曲线.

### 1. 铁磁相变 ( $K > 0$ )

对于铁磁相变,序参量取平均磁化强度.由(7)式给出 $K$ 和 $h$ 的两个递推公式.详细计算参见文献[11].该文献中已给出 $L=1, 2, 3$ 时的结果.当 $L$ 增加时, $K_c$ ,  $y_T$ 及 $y_h$ 迅速趋向于严格解结果.

为讨论各向异性情况,我们引入参量 $R = K_y/K_x$ .当 $R=1$ 时,以昂色格严格解结果 $K_c = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$ 和 $h_c = 0$ 代入(7)式.当 $R$ 变化时,令序参量在系统趋向临界点时渐近行为不变.这样便给出了各向异性时参数空间 $\{K_x, K_y\}$ 中的临界曲线,结果见图2.为了比较,图2中同时示出了由(2)式给出的严格解结果.

### 2. 反铁磁相变 ( $K < 0$ )

对于反铁磁相变,序参量取交错(staggered)磁化强度<sup>[12]</sup>.由我们的计算供出与铁磁相变具有相同绝对值的临界耦合常数 $K_c = -0.477$ ,以及与铁磁相变相同的热指数 $y_T = 1.0237$ ,所不同的是磁场不再是相关参量,即系统的临界行为不随 $h$ 变化.因此运用等标度同普适类变换,可计算出空间 $\{K_x, K_y, h\}$ 中的临界曲面.图3给出了 $R=1$ 时的计算结果.图2给出了 $h=0$ 及 $h=1$ 时的临界曲线.该临界曲面没有严格解结果,最好近似解由(4)式给出.

### 3. 超反铁磁相变 ( $K_x = -K_y = K$ )

对于超反铁磁相变,序参量同样取交错磁化强度,与反铁磁相变一样.我们的计算结

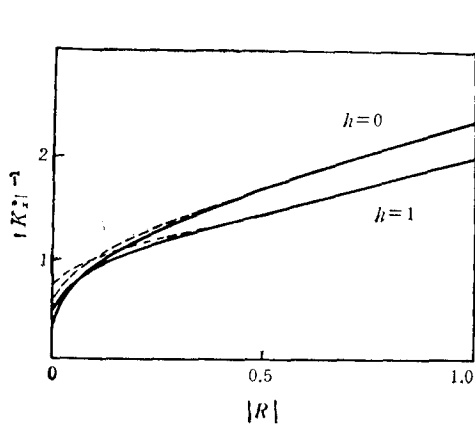


图2 各向异性伊辛模型临界温度曲线 实线为严格解结果;虚线为本文近似计算结果; $R > 0.4$ 两线基本重合

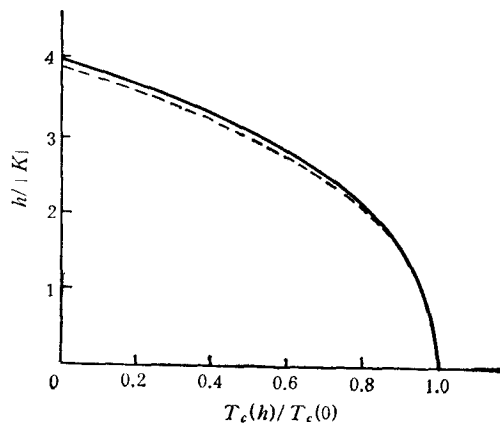


图3 反铁磁临界曲线 实线为最好推测解;虚线为本文计算结果

果给出 $K_x^c = -K_y^c = \pm 0.477$ 及 $y_T = 1.0237$ .磁场为非相关量.等标度同普适类变换给出与反铁磁类似的结果,只是 $R$ 相差一个负号.其结果同样由图2和图3给出.

## 五、讨 论

本文的工作表明,严格的重整化群变换包括所有的相变信息,一般近似计算之所以不

能得到全部信息是近似方法本身所致. 它使得系统的某些对称性不再存在. 对于超反铁磁相变, 临界曲线方程与反铁磁相变类似, 因此满足如下方程:

$$-\text{ch}h = \text{sh}(2K_x)\text{sh}(2K_y), \quad (8)$$

这有可能是一个严格解结果. 对于具有严格解结果的铁磁及反铁磁相变情况. 我们的计算结果与严格解符合很好. 但当各向异性度  $R$  增大时, 误差增加. 这是因为本文所采用的类平均场近似所致. 当增加  $L$  时, 将逐步趋向于严格解结果.

### 参 考 文 献

- [1] T. W. Burkhardt and J. M. J. van Leeuwen, Real Space Renormalisation Group, Berlin: Springer, (1982).
- [2] 唐坤发、胡嘉楨, 物理学报, **35**(1986), 1048.
- [3] B. Fiu, *Phys. Rep.*, **91**(1982), 233.
- [4] Th. Niemeijer and J. M. J. van Leeuwen, *Phys. Rev. Lett.*, **31**(1973), 1411.
- [5] L. P. Kadanoff and A. Houghton, *Phys. Rev.*, **B11**(1975), 377.
- [6] A. A. Migdal, *Z. Eksp. Teor. Fiz.*, **69**(1975), 1457.
- [7] K-F Tang and J-Z Hu, *J. Phys., A*, **20**(1987), 3069.
- [8] L. Onsager, *Phys. Rev.*, **65**(1944), 117.
- [9] E. Müller-Hartmann and J. Zittartz, *Z. Physik*, **B27**(1977), 261.
- [10] L. Sneddon, *J. Phys. C*, **12**(1979), 3051.
- [11] K-F Tang and J-Z Hu, *J. Phys., A*, **19**(1986), L621.
- [12] M. Droz, A. Maritan and A. L. Stella, *Phys. Lett.*, **A92**(1982), 287.

## FOUR-BRANCH CRITICAL SURFACE AND CORRESPONDING CRITICAL BEHAVIOUR FOR ISING MODEL

TANG KUN-FA HU JIA-ZHEN

(Department of Physics, Institute of Condensed Matter Physics, Shanghai Jiaotong University)

### ABSTRACT

Application of exact renormalisation transformation, to Ising model via equiscale transformation in the same universality class, yields a four-branch critical surface and four fixed points. In the case of the ferromagnetic and antiferromagnetic phase transitions, the results are in agreement with the known exact and the best approximate ones very satisfactorily. For the superantiferromagnetic phase transition, we propose the critical surface equation as follows

$$-\text{ch}(h) = \text{sh}(2K_x)\text{sh}(2K_y).$$