

颗粒介质中声衰减的浓悬浮 粒子理论及其应用

钱 祖 文

(中国科学院声学研究所)

1987 年 2 月 5 日收到

提 要

本文扼要介绍了作者建立的颗粒介质中的浓悬浮粒子理论,并将数值计算与已发表的有关实验比较,得到了满意的一致性。关于海洋沉积物的声衰减系数与频率的关系,因为不同的作者在不同的频段得到不同的关系,即高频段(几千赫以上)近似为线性关系,低频段(1千赫以下)高于一次方关系,曾产生过时期的争执,而根据本文的理论,这一争执可以得到统一。本文对颗粒参数的声学测量进行了探索,强烈地认为,除了测量颗粒介质的平均粒径之外,还要测量其第二粒径参数(如方差)才能完整描写颗粒介质的性质。本文可以作为新型颗粒参数测量仪的理论基础。

一、引 言

这里讨论的介质是液体填充的固体颗粒介质,或者称为悬浮体。当声波波长比粒径大很多时,可以近似地认为粒子是球形的。将单位体积内这种介质中包含的粒子体积及液体的体积分别称之为体积浓度与孔隙率。当体积浓度非常小,以致于使得粒子之间波的相互作用可以忽略,这样的悬浮体称为稀悬浮体,否则称为浓悬浮体。

河床海底沉积物,江河浑水,矿浆、水煤浆等都属于颗粒介质。这类介质中颗粒直径的大小及其分布、粒子浓度、悬浮体的密度的测量数据可以用于识别海底类型、自动控制矿浆的研磨、煤粉颗粒大小及成份的监测、航道疏浚挖泥指示等方面,而上述诸参数可以通过声学反演方法求得。此外,本理论还可用来处理超漏问题。

Sewell^[1], Lamb^[2] 以及后来的 Urick^[3], 先后建立与完善了稀悬浮粒子理论。但当体积浓度大到 0.1 左右,相互作用就不能忽略,很多颗粒介质,例如海底沉积物其体积浓度约为 0.5 显然对于这些介质,上述理论不能应用。

50 年代 Biot^[4] 建立了著名的多孔弹性媒质中波的传播理论,这种介质是指在弹性体连续介质中有许多孤立的或者连通的空腔,腔中充以流体,在这种介质中会产生两个纵波一个横波。Biot 理论给弹性波在地层中的研究和应用提供了一个有力的工具。但该理论在计算渗透率时,对结构因子的选择上有一定的任意性。

上述两种理论在研究声衰减与频率的关系时,高频衰减系数正比于频率的平方根,低

频衰减系数正比于频率的平方,这与实验结果有定性的不符^[5]。

近年来,本文作者陆续发表了颗粒介质中的浓悬浮粒子理论^[6~9],考虑了粒子之间的声波、粘滞波的相互作用,考虑了粒子大小有某种分布的影响。本文将应用这个理论进一步与已发表的有关实验数据比较。

二、稀悬浮粒子理论概述

Sewell^[1]研究了在声场中不动的硬粒子由于声散射和介质粘滞所引起的声衰减,得到的衰减系数为

$$2\alpha = \left\{ \frac{7}{9} k^4 R^4 + \frac{6\nu}{cR} + \frac{3\sqrt{2\omega\nu}}{c} \right\} N\pi R^2, \quad (1)$$

式中 k 为波数, ω 为角频率, R 为球形粒子的半径, c 为声速, ν 为液体的粘滞率, N 为单位体积中的粒子数目。式中等号右端第一项为瑞利散射所引起的衰减,后两项为粘滞吸收。如果球形硬粒子在声场中可以自由运动, Lamb^[2]研究了这种情况下的声衰减,后来经过 Urlick 化简了的衰减系数公式可写为

$$2\alpha = N\pi R^2 \left\{ \frac{4}{9} k^4 R^4 + \frac{3}{4} \pi k R \frac{(\sigma - 1)^2}{s^2 + (\sigma + \tau)^2} \right\}. \quad (2)$$

这里

$$\begin{aligned} s &= \frac{9}{4\beta R} \left(1 + \frac{1}{\beta R} \right), & \tau &= \frac{1}{2} + \frac{9}{4\beta R}, \\ \sigma &= \rho/\rho_l, & \beta &= \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中 ρ , ρ_l 分别为粒子的固体材料密度和液体密度。当 $kR \ll 1$ 时,散射衰减可以忽略不计。如 $\beta R \gg 1$,即粒径比起粘滞波波长长很多时, $2\alpha \sim \sqrt{\omega}$,但当 $\beta R \ll 1$ 时, $2\alpha \sim \omega^2$ 。而海底沉积物声吸收的测量数据在高频几乎正比于频率的一次方关系。

三、浓悬浮粒子理论^[6~9]

一个固体粒子在声场中散射声波,使入射声能在空间重新分布,导致声强减弱;另一方面,在它与流体作相对运动时,由于粘滞摩擦,还要发出粘滞波,在没有相互作用时,这部分能量完全损耗于流体之中。稀悬浮粒子声衰减理论主要计及这两部分能量。

当一列平面波入射到悬浮介质中时,所产生的散射波势 φ_s 及粘滞波矢量势 A 可分别表为

$$\varphi_s = \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) A_n^{(1)} h_n(kr) P_n(\cos\theta), \quad (4)$$

$$A = - \sum_{n=1}^{\infty} j^n (2n+1) C_n^{(1)} h_n(Kr) \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}, \quad (5)$$

式中 $h_n(x)$ 为 n 阶第一类球汉克尔函数, K 为粘滞波复波数,且有

$$K^2 = j\omega/\nu = 2j\beta, \quad (6)$$

$A_n^{(1)}, C_n^{(1)}$ 为散射波、粘滞波的展开系数。当 $kr \ll 1$, $A_2^{(1)}, A_3^{(1)}, \dots$ 为高阶小量, 只有零阶和一阶展开系数, 于是有

$$A_0^{(1)} = \frac{1}{3j} (kR)^3, \quad A_1^{(1)} = \frac{1}{3} (kR)^3 (-a + jb),$$

$$C_1^{(1)} = g + jh, \quad (7)$$

式中 a, b, g, h 的详细表达式见文献[9]。以上是讨论一个粒子的情况。当这个粒子周围有许多其它粒子时, 则一个粒子上的散射波和粘滞波将会波及到其它粒子, 从而产生第二次散射波、粘滞波, 这部分二次相互作用波又作为其它粒子的新的入射波, 再产生高阶相互作用波, 这个过程继续下去, 最终达到稳态。根据上述步骤, 经过几次相互作用之后, 两种波的展开系数有下述递推矩阵关系:

$$\begin{pmatrix} A_0^{(n+1)} \\ A_1^{(n+1)} \\ C_1^{(n+1)} \end{pmatrix} = \Gamma^n \begin{pmatrix} A_0^{(1)} \\ A_1^{(1)} \\ C_1^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

这里

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_0 A_0^{(1)} & \gamma_1 A_0^{(1)} & 0 \\ \gamma_0 A_1^{(1)} & \gamma_1 A_1^{(1)} & \gamma_3 \\ \gamma_0 C_1^{(1)} & \gamma_1 C_1^{(1)} & \gamma_4 \end{pmatrix} \quad (9)$$

称为相互作用矩阵, $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_3, \gamma_4$ 为复系数, 有关表达式见文献[9]。再考虑到粒径按其 ϕ 值作正态分布, 最终可以算得浓悬浮液体中的声衰减公式表为

$$\bar{\alpha} = \frac{3}{2} k \bar{\alpha} r_N \left\{ \left[1 - (r_N/4)(1 - 9\bar{b}) - \frac{27}{4} r_N^2 \bar{E}_2 \right]^2 + \frac{81}{16} r_N^2 (\bar{a} - 3r_N \bar{E}_1)^2 \right\}^{-1}, \quad (10)$$

式中 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{E}_1, \bar{E}_2$ 为相应的值在正态分布下作了平均, E_1, E_2 的表达式见文献[9]。(10)式是考虑了散射波、粘滞波相互作用并且考虑了粒径作正态分布的声衰减公式, 它可以用于浓悬浮体中, 即用于浓度很高的像海洋沉积物这类颗粒介质。这个式子表示了声衰减系数与介质的体积浓度、平均粒径、粒径方差等参数有关, 因此, 如果测出这类介质中的声学量, 通过反演方法, 可以反推出介质的上述几个参数, 实现声学方法遥测。

表 1

曲线标号	$\bar{R} \cdot 10^{-3} \text{cm}$	$D(\phi)$
1	4.5	1.41
1'	2.5	1.41
2	4.5	2.12
2'	2.5	2.12
3	4.5	2.83
3'	2.5	2.83
4	4.5	2.4
4'	2.5	1.7

表 2 已发表的有关实验数据

符 号	$2\bar{R}(\text{mm})$	$D(\text{phi})$	τ_N	$f(\text{kHz})$	$\frac{\alpha}{f}$ (dB/m·MHz)	文 献
×	0.1015	—	0.53	3.5	0.323	[5]
×	0.1015	—	0.53	7.0	0.377	[5]
×	0.1015	—	0.53	14.0	0.377	[5]
□	0.1119	—	0.53	100	0.425	[5]
□	0.0533	—	0.49	100	0.6	[5]
△	0.054	1.90	0.36	23.0	0.286	[13]
△	0.054	1.90	0.36	30.4	0.449	[13]
△	0.058	1.68	0.4	23.0	0.241	[13]
△	0.058	1.68	0.4	30.6	0.402	[13]
△	0.058	1.75	0.42	23.3	0.386	[13]
△	0.058	1.75	0.42	30.8	0.437	[13]
△	0.046	2.28	0.34	23.0	0.339	[13]
△	0.046	2.28	0.34	30.5	0.516	[13]
△	0.046	2.02	0.3	23.0	0.293	[13]
△	0.046	2.02	0.3	30.6	0.497	[13]
△	0.053	1.99	0.37	23.3	0.445	[13]
△	0.053	1.99	0.37	31.2	0.44	[13]
△	0.054	1.89	0.4	23.2	0.315	[13]
△	0.054	1.83	0.4	31	0.408	[13]
△	0.061	1.91	0.42	23.5	0.402	[13]
△	0.061	1.91	0.42	31.1	0.416	[13]
△	0.063	1.86	0.42	23.4	0.475	[13]
△	0.063	1.86	0.42	31.1	0.451	[13]
△	0.064	2.17	0.44	23.4	0.316	[13]
△	0.064	2.17	0.44	27	0.356	[13]
△	0.064	2.17	0.44	31	0.505	[13]
△	0.060	2.43	0.40	23.3	0.363	[13]
△	0.060	2.43	0.40	26.8	0.287	[13]
△	0.060	2.43	0.40	31.1	0.409	[13]
△	0.052	2.45	0.54	31.3	0.429	[13]
+	0.08	2.12	0.45	0.4	0.133	[12]
+	0.08	2.12	0.45	0.6	0.237	[12]
+	0.08	2.12	0.45	0.8	0.3	[12]
+	0.08	2.12	0.45	1.0	0.347	[12]
+	0.08	2.12	0.45	1.2	0.370	[12]
+	0.08	2.12	0.45	1.4	0.298	[12]
+	0.08	2.12	0.45	1.6	0.406	[12]
+	0.08	2.12	0.45	1.8	0.427	[12]
+	0.08	2.12	0.45	2.0	0.449	[12]
○	0.05	1.26(平均)	0.42	0.16	0.076	[11]
○	0.05	1.26(平均)	0.42	0.20	0.091	[11]
○	0.05	1.26(平均)	0.42	0.25	0.104	[11]
○	0.05	1.26(平均)	0.42	0.315	0.132	[11]
○	0.05	1.26(平均)	0.42	0.40	0.165	[11]
○	0.05	1.26(平均)	0.42	0.80	0.612	[11]
*	0.09	2.45(平均)	0.42	0.08	0.031	[11]

表 2 (续)

符 号	$2\bar{R}(\text{mm})$	$D(\text{phi})$	τ_N	$f(\text{kHz})$	$\frac{\alpha}{f}$ (dB/m·kHz)	文 献
*	0.09	2.45(平均)	0.42	0.10	0.063	[11]
*	0.09	2.45(平均)	0.42	0.125	0.092	[11]
*	0.09	2.45(平均)	0.42	0.160	0.104	[11]
*	0.09	2.45(平均)	0.42	0.20	0.108	[11]
*	0.09	2.45(平均)	0.42	0.25	0.129	[11]
*	0.09	2.45(平均)	0.42	0.315	0.132	[11]
*	0.09	2.45(平均)	0.42	0.40	0.142	[11]
*	0.09	2.45(平均)	0.42	0.50	0.242	[11]
*	0.09	2.45(平均)	0.42	0.63	0.686	[11]
----	0.072	1.85	0.58	5—50	0.388	[14]
●	0.062—0.125		0.54	1	0.39	[15]
●	0.062—0.125		0.54	10	0.4	[15]
●	0.062—0.125		0.54	100	0.36	[15]

四、数值计算以及与有关数据比较

利用自适应辛普森方法,对(10)式进行了数值计算,图1给出了 $\alpha/f-f$ 的曲线,这里 f 为频率,以 kHz 为单位, α 以 dB/m 为单位,取体积浓度 $\tau_N = 0.4$. 图1中每条曲线相应于不同的平均粒径 $\bar{R}$ (以 cm 为单位)及不同的粒径方差 D (以 phi 值为单位),不同标号的曲线中的有关参数列于表1. 从理论曲线可以看出, $\alpha/f-f$ 的曲线在低频区(低于几千赫)对 $\bar{R}$, D 很敏感,而在高频区(高于 10kHz)较迟钝一些,但总的说来, α 是与 $\bar{R}$ 和 D 有重要依赖关系. 在高频(几千赫以上), α/f 随 f 变化缓慢,即 α 与 f 近似地有一次方关系,这与 Hamilton^[9] 所总结的实验数据规律是一致的,而在低频(1kHz 以下), α 与 f 的关系高于一次方,这与 Stoll 等人^[10] 长期坚持的另一种观点一致(近来周纪得等人^[11,12] 的实验结果也支持了这一点). 由此可见,文献[5]和[10]的观点在他们各自的频段内都是正确的,并且可以用浓悬浮粒子理论将两个表面上有抵触的结论统一起来.

表2中列出了与图1有关的实验数据,其平均粒径 $\bar{R}$ 在 2.5×10^{-3} 到 4.5×10^{-3} cm, 方差(如果有关实验者给出)约在 1.5 到 2.5 之间. 这些数据都示于图1中,其中体积浓度(在第一级近似下)都按一次方浓度关系校正到 0.4 的情况. 从理论与实验比较可知,一致性是较好的.

五、颗粒参数声遥测的探索

从图1可见,理论与实验符合得比较好,这一事实似乎给我们启示,通过对颗粒介质声吸收系数的测量可以反推出介质的颗粒浓度,平均粒径,粒径分布(如方差)等物理量.

图1中给出理论曲线与文献[11]的数据比较. 表2中的两组数据(分别用符号●和*表示)与理论曲线4和4'相对应,这两条理论曲线所对应的颗粒参数(见表1)与实验数

表 3 河床沉积物粒径分布范围预测以及与测量值比较

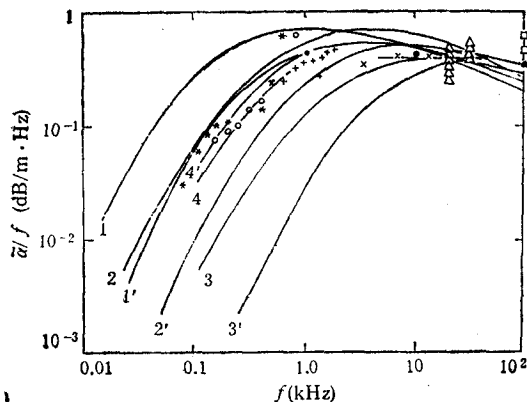
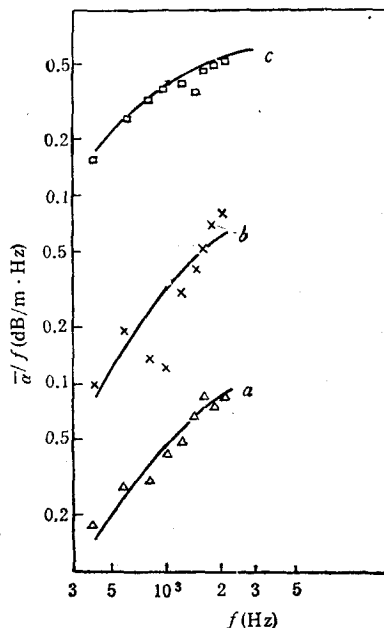
	颗粒含量百分数(%) ^[12]			粒径范围的声学 预测值 (mm)
	2—0.05mm	0.05—0.005mm	<0.005mm	
<i>a</i>	18	75	7	0.021—0.03
<i>b</i>	56	42	2	0.012—0.045
<i>c</i>	65	34	1	0.015—0.24

据的相应参数颇为接近。

表 3 给出了河床沉积物的颗粒参数的预测结果。理论值是将图 2 中的介质的声衰减理论曲线最佳逼近于实际测量数据时所对应的粒径和方差，再根据后两个数值算出粒径的分布范围。实验数据取自文献[12]。表 3 中的百分含量是指在所列出的粒径范围内所含的沉积物质量百分数，是文献[12]中用通常的粒径分析方法测得的。显然，*a* 组和 *c* 组很理想，而 *b* 组稍差，这是由于 *b* 组的衰减系数数据分散较大所致。这表明预测精度与衰减系数的测量精度关系很大。

六、结 论

根据浓悬浮粒子理论算得的声衰减系数与实验结果符合得很好，本文的理论可以将实验上多年争论的声衰减系数与频率的关系得到统一。对于海洋沉积物而言，在高频（高于几千赫），声衰减系数与频率的关系近似为线性的，而在低频（低于 1kHz），声衰减与频

图 1 $\bar{\alpha}/f$ 的理论和实验比较图 2 利用 $\bar{\alpha}/f$ 的关系预测颗粒参数

率的关系高于一次方的。

除了平均粒径(或者中值粒径)以外,还需要第二个颗粒参数例如方差才能很好地描写颗粒介质的性质,目前工业上采用的粒度仪(例如 PSM 系列的超声粒度仪)只能测量一个颗粒参数。而根据浓悬浮粒子理论可以设计一种新型的颗粒参数测量仪,它除了测量粒子体积浓度以外,还能同时测量两个颗粒参数。

参 考 文 献

- [1] C. J. T. Sewell, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A210**(1910), 239.
- [2] H. Lamb, *Hydrodynamics*, Camb. Univ. Press 6th ed., p. 661.
- [3] R. J. Urlick, *J. Acoust. Soc. Am.*, **20**(1948), 283.
- [4] M. A. Biot, *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**(1956), 168.
- [5] E. L. Hamilton, *Geophysics*, **27**(1972), 620.
- [6] 钱祖文, *物理学报*, **30**(1981), 433.
- [7] Qian, Z. W. (钱祖文), *Fortschritte der Akustik-FASE/DAGA 82 Teil 2*, (1982), p. 739.
- [8] Qian, Z. W. (钱祖文), *J. Sound Vib.*, **103**(1985), 427.
- [9] Qian, Z. W. (钱祖文), *J. Sound Vib.*, **108**(1986), 147.
- [10] R. D. Stoll, *J. Acoust. Soc. Am.*, **77**(1985), 1789.
- [11] Zhou Ji-Xun (周纪浚), *J. Acoust. Soc. Am.*, **78**(1985), 1003.
- [12] 单汝政、周树义, *声学学报*, **9**(1984), 201.
- [13] G. Shumway, *Geophysics*, **25**(1960), 451.
- [14] C. McCann and D. M. McCann, *Geophysics*, **34**(1969), 882.
- [15] L. Bjørnø, *Acustica*, **38**(1977), 195.

CONCENTRATED SUSPENSION THEORY OF SOUND ATTENUATION IN GRANULAR MEDIA AND THE APPLICATIONS

QIAN ZU-WEN

(*Institute of Acoustics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The concentrated suspension theory in granular media set up by the author is presented concisely in this paper. By comparing its numerical results with the relevant data published, a satisfactory consistency can be obtained. As far as the relationship of the attenuation coefficients in marine sediments to the frequency is concerned, there has been a controversy among some authors for a long time, i.e. it appears to be a linear dependence upon frequency in the high-frequency range (higher than several kilohertz) and to be some deviation from first power dependence in the low-frequency range (lower than 1 kilohertz). However, according to our theory, reasonable unity can be achieved for them. Through an investigation on the measurement of the granular media by means of the acoustic method, the author believe that besides the mean diameter, the second granular parameter (such as the sorting coefficient) is necessary for a full characterization of granular media.

This theory may give a theoretical basis to design new equipment for measuring granular parameters.