

圆对称环域 Josephson 隧道结的 静态特性 (I)*

准衍射现象和自场效应

王 炜 姚 希 贤

(南京大学物理系)

1986年12月26日收到; 1987年9月29日收到修改稿

提 要

本文研究了圆对称环域 Josephson 隧道结的静态特性。在环带宽度较窄的情形下, 不计入自场, 并考虑到外磁场在结区内的非均匀性, 解析地得到了 I_m 与外磁场的 I_H 的关系。与典型的小结衍射图形所不同的是所有极小都不为零, 表现出准衍射图形特征。在环带宽度较宽的情形下, 对自场方程进行了数值计算, 得到其与一般一维结不同的结特性。

一、引 言

晚近研究二维圆域和三维球域的 Sine-Gordon 方程引起了人们的兴趣^[1]。圆域和环域 Josephson 隧道结是实际存在的这种二维系统的例子。不过描述其行为的方程不是 Sine-Gordon 方程, 还有附加项。通常称它为扰动的 Sine-Gordon 方程。但是在静态情况下, 扰动的 Sine-Gordon 方程将退化为较易于处理的方程。本文将研究这一问题。

自从 Josephson 提出弱耦合超导体并讨论其隧道结的行为后^[2], 有关 Josephson 隧道结在外磁场下的静态行为, 在实验和理论上已作了不少研究^[3]。但是在结的形状上, 研究的只是矩形小结、一维长结和二维方结^[3]。圆形结的研究只限于无外磁场的情形^[4]。

矩形小结在外磁场下的行为是众所周知的。一维长结在理论上 Owen 等人的工作^[5], 他们采用的边界条件是: 在外磁场下, 通过结的电流 I 在左右边界上产生的自场大小相同, 但方向相反。这样的边界条件只是在电流分布相对于长结中点是对称的情形, 或者是把长结处理为垂直于长结方向和隧道电流方向有无限延伸的情形才是没有近似的^[6]。对二维结的研究, 有线性化模型和模拟计算方法的研究^[7]。以线性化模型为例, Vaglio 研究的是方结, 他对边界条件的处理与 Owen 等人的处理基本相同, 不过对几种不同的外电流馈入方式进行了不同的处理。至于超电流与位相差的关系则作了线性处理, 即把 Sine-Gordon 方程线性化了, 显然这样处理是粗糙的。

能否设想另一种二维的 Josephson 隧道结, 位相差满足的是 Sine-Gordon 方程, 而

* 中国科学院科学基金资助的课题。

边界上给出的磁场(包括外磁场和隧道电流产生的磁场)值能避免上面提到的近似处理? 本文所讨论的圆对称环域的 Josephson 隧道结能够提供这样的结的例子.

二、静态方程

设有图 1 所示的圆对称中空环域 Josephson 隧道结, 隧道电流沿 z 轴方向, 外磁场由电流 I_s 通过坐落在 z 轴上的另外一根导线所产生. 若考虑流过结的总电流小于结的临界电流, 则结两侧的电势差为零, 直流 Josephson 方程可表为

$$j_s = j_c \sin \varphi, \quad (1a)$$

$$\nabla \varphi = \frac{ze d}{\hbar c} \mathbf{H}_s \times \mathbf{n}, \quad (1b)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\lambda_j^2} \sin \varphi, \quad (1c)$$

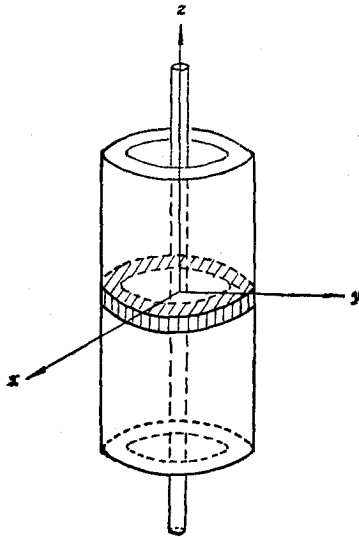


图 1 环形结

其中 φ 为结两侧的位相差, 其他参数为标准的结参数. 就环域的结问题, 引入柱坐标 (r, θ, z) 是方便的. 由于圆对称, φ 和 \mathbf{H}_s 与 θ 无关, 仅是 r 的函数, \mathbf{H}_s 沿 θ 方向, 大小记为 H_s . 若引入无量纲长度 $\rho = r/\lambda_j$, 无量纲电流密度 $j = j_s/j_c$ 和磁场强度 $H = \frac{ze d \lambda_j}{\hbar c} H_s$, 则在

无量纲变量下, 安培环路定理变为

$$H = I/2\pi\rho, \quad (2)$$

而无量纲变量表示的 Josephson 方程为

$$j = \sin \varphi, \quad (3a)$$

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = H, \quad (3b)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} = \sin \varphi. \quad (3c)$$

并把产生外磁场的通过导线的无量纲电流记为 I_H .

三、窄环带结的准衍射

在窄环带结(小结)情形, 自场可以不考虑, 则结中的场由导线电流 I_H 产生

$$H = I_H/2\pi\rho. \quad (4)$$

积分 (3b) 式得到 φ , 再由 (3a) 式, 我们有流过结的总电流

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\rho_0}^{\rho_1} j \rho d\rho \\ &= 2\pi \int_{\rho_0}^{\rho_1} \sin(\omega \ln \rho + \varphi_0) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (5)$$

从而极大电流

$$I_m = 2\pi\rho_0^2 \sqrt{a^2 + b^2} / (4 + w^2), \quad (6)$$

其中

$$a = k_1^2 [2 \sin(w \ln k_1 \rho_0) - w \cos(w \ln k_1 \rho_0)] - 2 \sin(w \ln \rho_0) + w \cos(w \ln \rho_0), \quad (7a)$$

$$b = k_1^2 [2 \cos(w \ln k_1 \rho_0) + w \sin(w \ln k_1 \rho_0)] - 2 \cos(w \ln \rho_0) - w \sin(w \ln \rho_0). \quad (7b)$$

在得到(6)式时,我们定义了 $w = I_H/2\pi$, 并且环的内半径为 ρ_0 , 外半径 $\rho_1 = k_1\rho_0$, 窄环带即是 $\rho_1 - \rho_0 = (k_1 - 1)\rho_0 \leq 1$ 的情形. 从(6)和(7)式,可以得到极大电流 I_m 与外磁场的 I_H 的准衍射图形. 如图 2 所示,所有极小都不为零,图形表现出准衍射特性. 这可以从(4)式看到外磁场在结中的分布是非均匀的,准衍射特性正是来源于此. 但随着 ρ_0 的增大,这种非均匀性减小,也就是极小向零靠近,渐变为通常的小结衍射图形(同时 $k_1\rho_0 - \rho_0$ 保持小于 1).

结平面上的电流分布由下式给出:

$$j = \sin(w \ln \rho + \varphi_0), \quad \varphi_0 = \tan^{-1}(b/a). \quad (8)$$

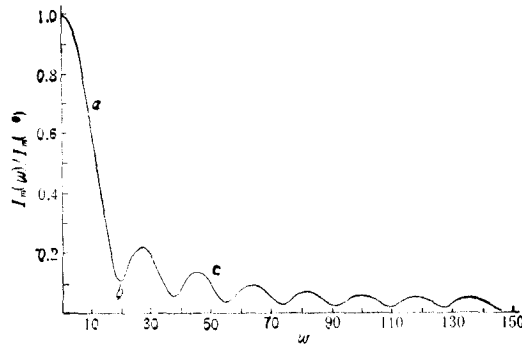


图 2 窄环带结准衍射图形 $\rho_0 = 1.2$; $k_1\rho_0 - \rho_0 = 0.5$

四、自场效应

本节讨论宽环带 $\rho_1 - \rho_0 > 1$ 的情形,此时隧道电流自身产生的磁场对结行为有显著的影响,自场不能忽略. 对于环域结,我们能控制的外部条件,是通过处在 Z 轴上导线的电流 I_H 和提供给隧道结的总电流 I . 在这样的物理条件下,我们要求解方程(3),此时, φ 满足的边界条件为

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} = H|_{\rho_0} = I_H/2\pi\rho_0, \quad (9a)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|_{\rho_1} = H|_{\rho_1} = (I_H + I)/2\pi\rho_1. \quad (9b)$$

由于尚不能求出方程(3)的解析形式的解,只好求助于数值计算. 但是在给出的边界

条件(9)式都无法对(3)式进行数值求解.通常,对方程求数值解要求给出 $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|_{\rho_0}$ 和 $\varphi_0 = \varphi(\rho_0)$. 于是,我们只好选取某个 φ_0 ,连同条件(4)式求解方程(3),得到某个 $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|_{\rho_1}$ 的值.它若不满足方程(5),则这一过程将继续下去(给定 I_H 和 I 条件下),直到选取到合适的 φ_0 ,解方程(3)后得到符合(5)式的 $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|_{\rho_1}$,就算获得了一个需要的解.

实际上的算法是这样:在给定 I_H 后,使 φ_0 在 $[0, 2\pi]$ 之间选值,得出 I 依赖于 φ_0 的关系.这样得到的所有的 I 值是静态下可能具有的 I 的全体.极值超流 I_m 自然也就求出.在本文中,我们只给出极值电流 I_m 依赖于 I_H 的关系.

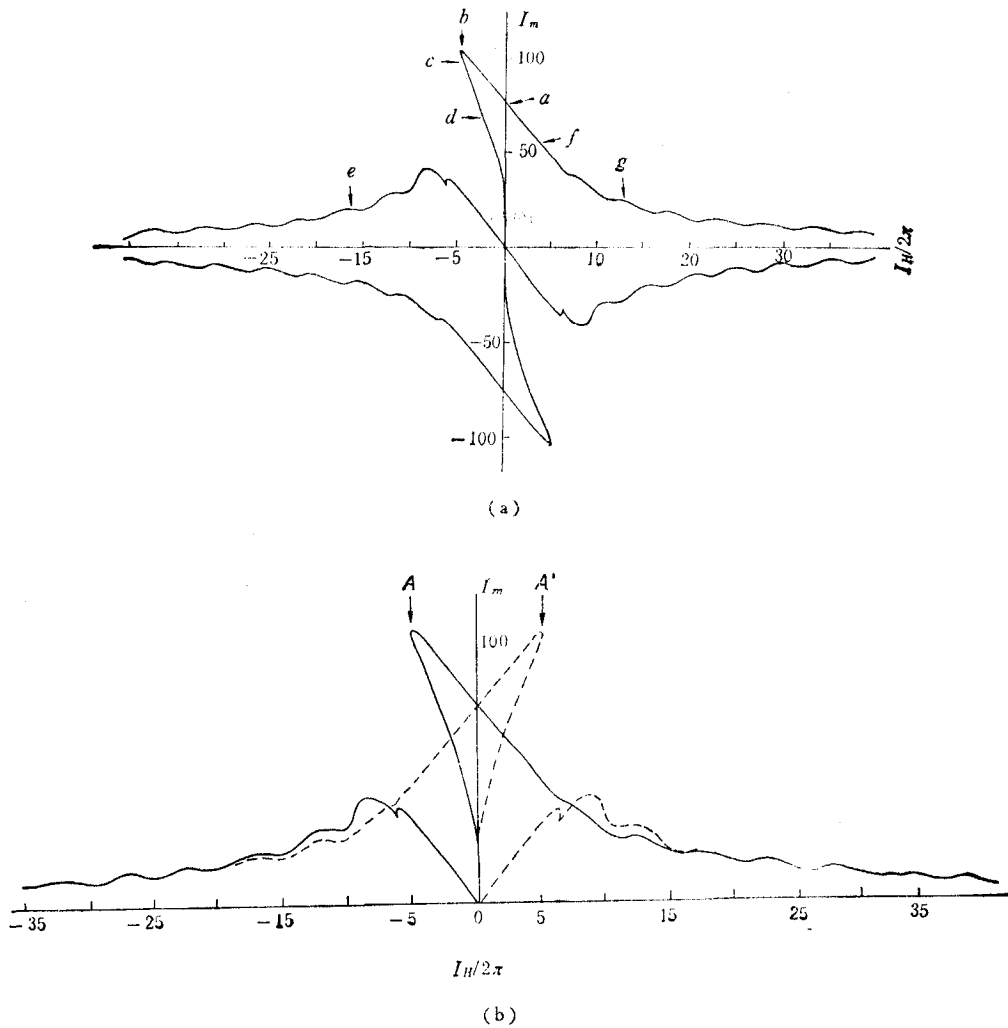


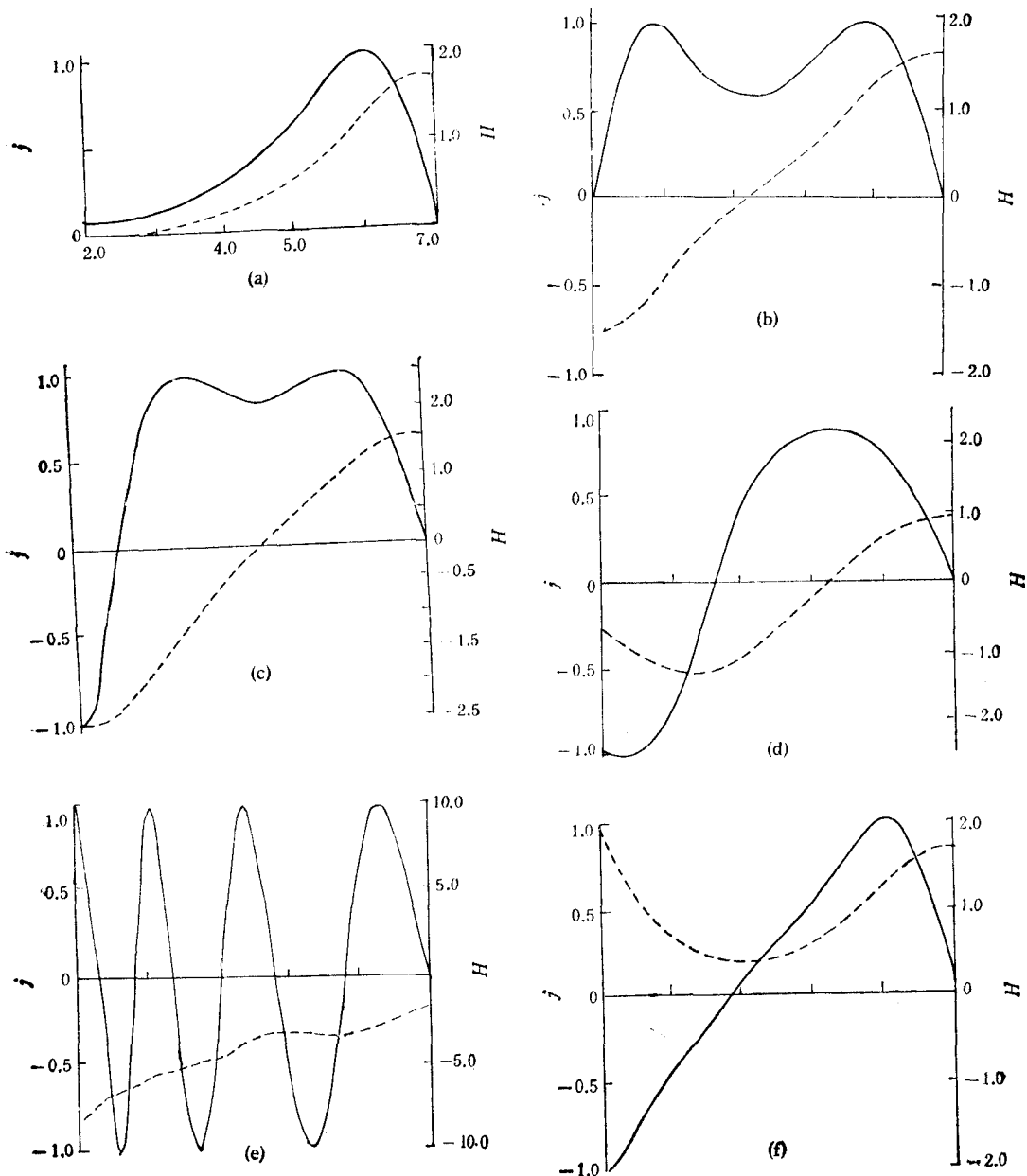
图3 极值电流与外磁场的关系曲线 $\rho_0 = 2.0$; $\rho_1 = 7.0$

在给定 I_H 和求出 I_m 后,则此时的结中电流密度和磁场分布,即可由(1)和(2)式给出

$$i(\rho) = \sin \varphi(\rho), \quad (10a)$$

$$H(\rho) = \frac{\partial \varphi(\rho)}{\partial \rho}. \quad (10b)$$

我们对 $\rho_0 = 2$, $\rho_1 - \rho_0 = 5$ 的环域结进行了详细计算, 极值电流 I_m 依赖于 I_H 的关系见图 3(a), 从图 3(a) 中可以看出, 当 $|I_H| < 5.2 \times 2\pi$ 时, 存在有四个极值电流; 而当 $|I_H| > 5.2 \times 2\pi$ 时, 只存在两个极值电流. 绝对值 $|I_m|$ 依赖于 I_H 的关系见图 3(b). 图 3(b) 中虚线对应于图 3(a) 中 I_m 为负值的那部分曲线, 而实线对应于图 3(a) 中 I_m 为正值的那部分曲线, 两者加在一起后就组成为 $|I_m|$ 依赖于 I_H 的整体曲线. 对此整体曲



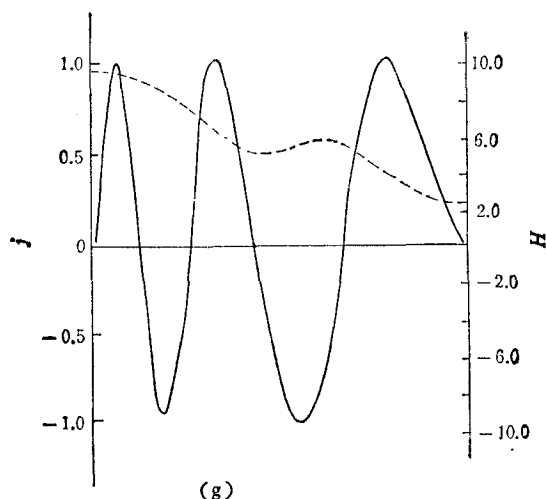


图4 结中电流密度、磁场分布 $\rho_0 = 2.0$; $\rho_1 = 7.0$, 其中图 (a)—(g) 分别对应图 3(a) 中 a—g 点; 实线为电流密度; 虚线为磁场; 横坐标从 ρ_0 到 ρ_1

线我们可以画出它的包络线, 包络线代表临界电流值依赖于 I_H 的关系. 这也就是实验上测得的给定 I_H 下能通过环域 Josephson 隧道结的最大超流. 图 3(b) 上的 A 点对应于临界电流值中的最大者, 它所对应的 I_H 为 $-5.15 \times 2\pi$, 把它记作 $-I_{HA}$.

从图 3(b) 所示的最大超流依赖于外磁场的关系来看, 它和一维直线结的行为在外形上颇不相同. 直线结的最大超流发生在外磁场为零的情形. 但是对环域结而言, 外磁场为零所对应的临界电流并非最大, 最大的临界电流发生在有磁场的情形, 它所对应的外磁场为 I_{HA} .

现在讨论有关电流密度和磁场在环域结中的分布情况. 图 4 是电流密度和磁场分布图. 图 4(a) 是外磁场为零时, 电流密度和磁场在环域结中的分布情况, 实线代表电流密度, 虚线代表磁场强度(下同). 图 4(b)—(g) 是外磁场不为零时的电流密度和磁场的分布, 外加磁场的大小由 I_H 给出. 此外, 在图 4 中给出的电流密度和磁场分布图的相应位置在图 3(a) 中已标出, 以资对照. 最后指出, 图 4(b)—(e) 的外加磁场为负. 图 4(f) 和 (g) 外加磁场为正.

下面对图 4 作必要的分析, 并和直线结的结果进行对比和讨论.

(1) 图 4(a) 是在外磁场为零时的电流分布图. 在直线结的情形中我们没能找到与此相应的电流分布情况.

(2) 对宽环带结加负的外磁场, 当外磁场的绝对值逐渐增大时, 通过结的临界电流逐渐增大, 其电流分布图的演变过程见图 4(b)—(d), 图 4(b) 对应于通过结的临界电流为最大.

我们还对其他环宽, 如 $\rho_1 - \rho_0 = 10, 8$ 等进行了计算, 在此就不再给出. 结果在定性上是相同的, 差别只是在量的方面.

为了看出流过结的电流为极值电流时, 当 $\Delta\rho$ 变化(相应的 $\rho_0 = 2$), 而发生的电流分布的演变过程, 我们在图 5(a)—(d) 中画出外磁场为零的电流密度分布. 为了比较, 在图 5(e) 中画出了窄环带结 $\Delta\rho = 0.8$ 的电流分布. 此外, 还在图 6(a)—(d) 中画出极值电流

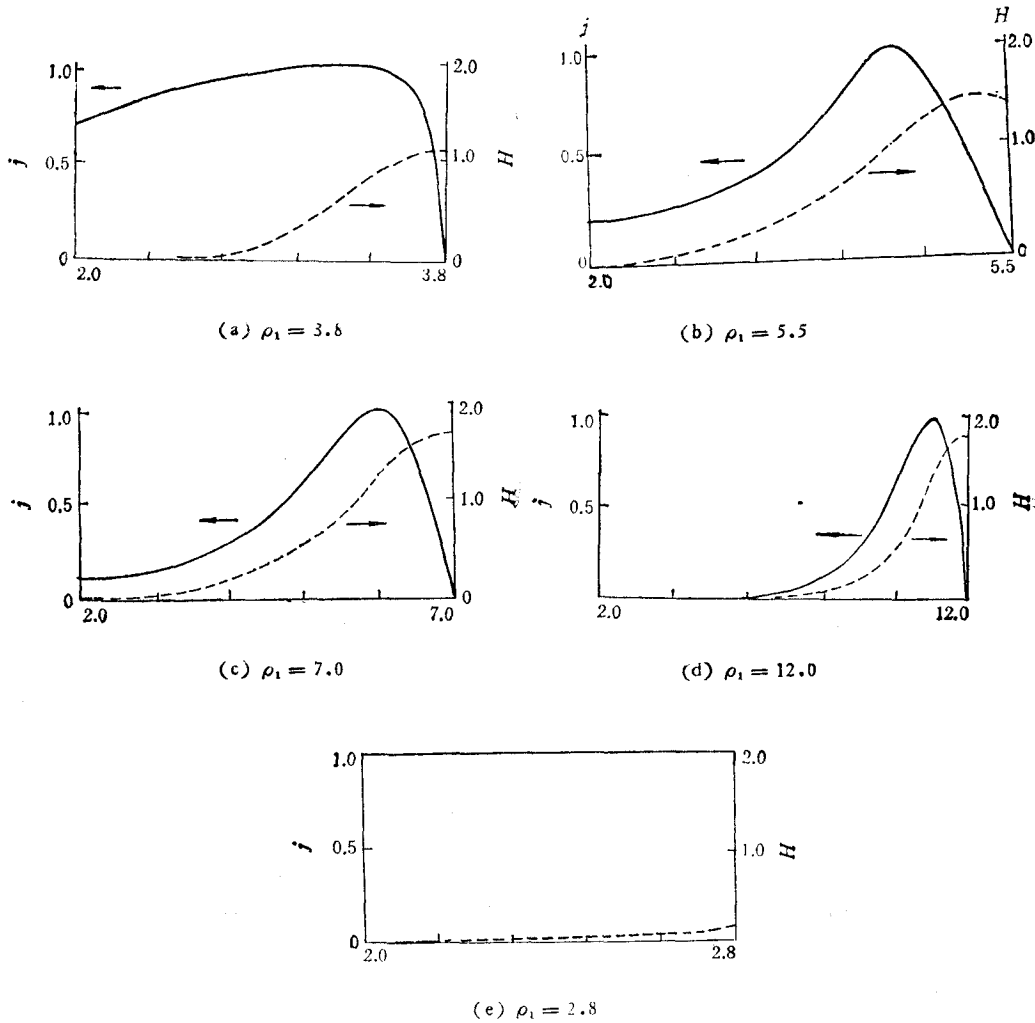


图 5 外磁场为零的不同环带宽度结的电流和磁场分布 ρ_0 均为 2.0; 实线为电流密度; 虚线为磁场; 横坐标从 ρ_0 到 ρ_1

为最大时的电流、磁场分布情况。对这里所计算的结果,我们指出一点,在窄环域结 $\Delta\rho=0.8$ 时,电流分布是均匀的,随着带宽的增大,电流密度越来越偏离均匀分布,而当 $\Delta\rho=10$ 时,电流密度存在一个几乎为零的区域。

图 7(a) 是极值电流为最大时,极值电流与结的宽度 $\Delta\rho$ 的关系。图 7(b) 是外磁场为零时的极值电流与结的宽度 $\Delta\rho$ 的关系。与直线结不同的是 I_m 随带宽 $\Delta\rho$ 的增大而不断增大,并不象直线结那样趋向于一个饱和值。这是因为环结具有二维特性。(若将极值电流与环结面积 $\pi(\rho_1^2 - \rho_0^2)$ 作此图,亦将有一饱和值。)

我们还对不同的 ρ_0 进行了计算,计算结果表明与 $\rho_0 = 2$ 的结果只有量的差别,没有质的变化。可以期望,在 ρ_0, ρ_1 越来越大,但是 $\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = (\rho_1 - \rho_0)/\rho_0 \ll 1$ 时,环域结的静态行为,如同在上节中所述,将趋近于直线结的行为。

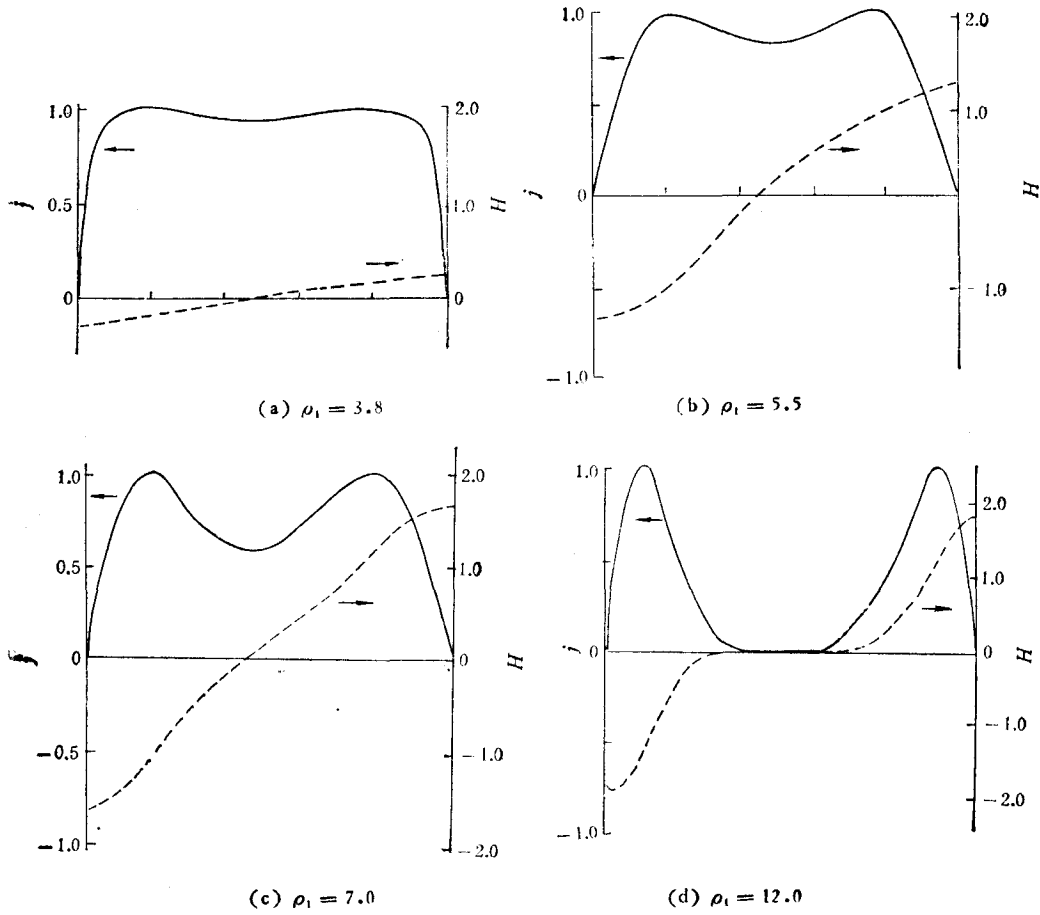
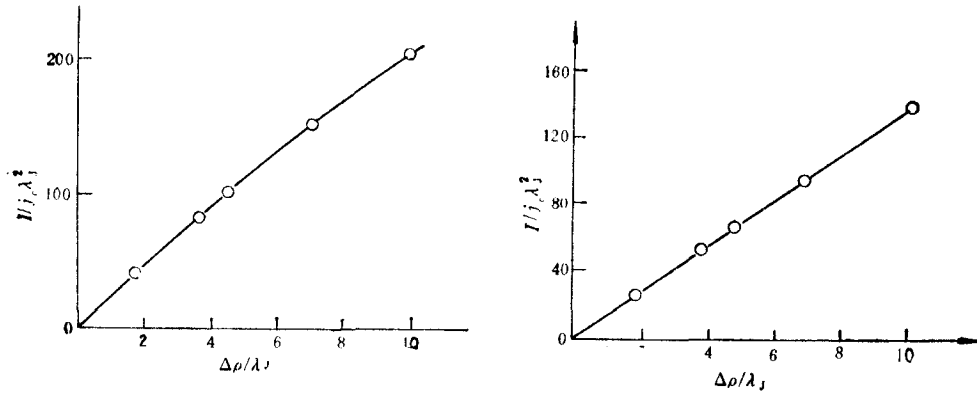


图6 极值电流为最大时,不同环带宽度结的电流密度和磁场在结中的分布



(a) 极值电流为最大时,其值与结尺寸关系

(b) 外磁场为零时,极值电流与结尺寸关系

图7 ρ_0 为 2.0

五、结 束 语

对于二维圆对称环域 Josephson 隧道结的静态特性,在环带宽度较小的情形下,可

以不考虑自场的影响,由于外磁场在结内的非均匀性,解析地给出了极大电流与外磁场的准衍射图形。对自场影响的自场方程的数值计算结果表明,极大电流的最大值稍偏离外磁场为零的位置。这表明若向大结(宽环带结)过渡,结果是自洽的。

当结的宽度较大时,由于自场的影响,外磁场对流过结的超流临界值的影响,与小结特性显著不同。本文从自场方程出发,对不同尺寸的圆对称环域结的静态特性进行详细的数值计算。结果表明,由于结的二维特性和非对称的外磁场,使得极大临界电流不在外磁场为零的位置,而是在有限的外磁场之中,并且所有极小临界电流都不为零。由自场方程决定的解具有多值性,对于多值性的讨论和解的稳定性讨论,我们将在另文中给出。

参 考 文 献

- { 1 } J. Geicke, *Phys. Lett.*, **82A**(1984), 207; J. Geicke, *Physica*, **4D**(1982), 197.
- { 2 } B. D. Josephson, *Phys. Lett.*, **1**(1962), 251.
- { 3 } A. Barone and G. Paterno, *Physics and Applications of the Josephson effect*, Wiley, New York, (1982).
- { 4 } 孙元善、姚希贤, *低温物理*, **7**(1985), 99.
- { 5 } C. S. Owen and D. J. Scalapino, *Phys. Rev.*, **164**(1967), 538.
- { 6 } L. Solymar, *Superconductive Tunnelling and Applications*, Chapman and Hall, London, (1972), p. 188.
- { 7 } A. Barone, W. J. Johnson and R. Vaglio, *J. Appl. Phys.*, **46**(1975), 3628; R. Vaglio, *J. Low Temp. Phys.*, **25**(1976), 299; A. Barone, F. Esposito, K. K. Likharev, V. K. Semenov, B. N. Todorov and R. Vaglio, *J. Appl. Phys.*, **53**(1982), 5802.

STATIC CHARACTERISTICS OF CIRCULAR SYMMETRIC ANNULAR JOSEPHSON JUNCTION (I)

THE QUASI-DIFFRACTION CHARACTERISTIC AND THE SELF-FIELD EFFECTS

WANG WEI YAO XI-XIAN

(Department of Physics, Nanjing University)

ABSTRACT

The static Josephson effects in the circular symmetric annular junctions are discussed in this paper. When the annular widths are smaller than λ_J , analytic solutions of magnetic field dependence of the maximum Josephson current I_m are obtained. Because the external magnetic field is nonuniform distributed in the junctions, the minima of I_m are not equal to zero. These results exhibit a quasi-diffraction characteristic. When the annular widths are larger than λ_J , the numerical solutions of the self-field equations are obtained, which show the magnetic field dependence of the maximum Josephson current I_m and the current distribution. Due to the 2-dimensional character, the points of maximum of I_m are not on the axis where the external field is equal to zero in the plot of I_m vs. I_H .