

# 圆对称环域 Josephson 隧道结的 静态特性 (II)\*

## 自场方程解的稳定性

王 炜 姚希贤

(南京大学物理系)

1986年12月26日收到; 1987年9月29日收到修改稿

### 提 要

本文根据圆对称环域 Josephson 隧道结的序参数位相差作微小变化时, 结自由能泛函的一级变分为零、二级变分的符号来确定解的稳定性。如所对应的解的自由能的二级变分为正, 则解是稳定的。反之解是不稳定的。求符号的问题又可以化为求本征值的问题。对于给定外磁场和流过结的电流下, 自场方程存在着稳定的、不稳定的和亚稳态的解。

### 一、引 言

在文献[1]中, 我们讨论了圆对称环域 Josephson 隧道结的静态特性。特别是在文献[2]中, 对宽环带结的情形, 用数值计算求解了 Josephson 方程。本文将讨论解的稳定性问题。

圆对称环域隧道结的结构见文献[1]。通过 Josephson 隧道结的电流为  $I$ 。外磁场由电流  $I_H$  通过坐落在  $z$  轴上的导线提供。此时的 Josephson 方程为

$$j = \sin \varphi, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = H \quad (\rho_0 \leq \rho \leq \rho_1), \quad (2)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) = \sin \varphi. \quad (3)$$

其边界条件为

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = I_H / 2\pi\rho_0, \quad (4a)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_1} = (I + I_H) / 2\pi\rho_1. \quad (4b)$$

在导出边界条件时, 我们使用了无量纲变数下的安培环路定理。

\* 中国科学院科学基金资助的课题。

现在要讨论的问题是,在给定  $I$  和  $I_H$  时,满足边界条件(4a)和(4b)式,方程(3)的解是唯一的呢,还是有好几个解呢? 我们的计算表明,在一般情况下,这样的解不止一个. 由此必然发生如下的问题: 这些解是否都能在物理上实现. 要解决这个问题就要讨论解的稳定性.

在讨论 Josephson 隧道结的静态特性的工作中,如 Owen 和 Scalapino 的有关直线结的工作<sup>[3]</sup>, Vaglio 的有关方形结的工作<sup>[4]</sup>, 都没有涉及解的稳定性问题,对给定  $I_H$  和  $I$  下到底可能有几个解也未做详细的计算. 但在文献[5]中可以找到存在多个解的计算和解的稳定性讨论,文献[5]讨论的是没有外加磁场的圆域 Josephson 隧道结的情况. 可以期望,有多个解的存在以及有些解在物理上是不稳定的. 这一本质,在有外磁场的情况下也应该出现. 对这一问题的讨论,无论是从对 Josephson 隧道结的静态特性的理解上,还是一般地从事非线性物理的理解上都将是具有意义的.

## 二、多个解的存在性

如文献[2]所述,从物理上能控制的量是通过 Josephson 隧道结的总电流  $I$ , 和通过坐落在  $z$  轴上的导线的电流  $I_H$  所产生的外磁场. 这就是说,要结合边界条件(4a)和(4b)式来求解方程(3). 对方程(3)我们未能找到解析形式的解,在数值求解过程中只好设定  $\varphi(\rho = \rho_0) = \varphi_0$  和  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} = I_H/2\pi\rho_0$ , 然后求解方程(3). 任意设定  $\varphi_0$  求得的解  $\varphi(\rho)$  未必一定在  $\rho = \rho_1$  时满足边界条件(4b)式. 所以只好试探地取各个  $\varphi_0$  的值,也即改变  $\varphi_0$  值以求得满足条件(4b)式的解. 实际的做法是这样,取定

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = I_H/2\pi\rho_0,$$

并在区间  $(0, 2\pi)$  中取  $\varphi_0$  的各种试探值,求解方程(3),得到一组依赖于参数  $\varphi_0$  的解  $\varphi(\rho, \varphi_0)$ , 对应于这组解的每一个,都可得到相应的值  $\left. \frac{\partial \varphi(\rho, \varphi_0)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_1}$ . 根据(4b)式,即可求得对应的  $I$ ,

$$I(\varphi_0) = 2\pi\rho_1 \left. \frac{\partial \varphi(\rho, \varphi_0)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_1} - I_H. \quad (5)$$

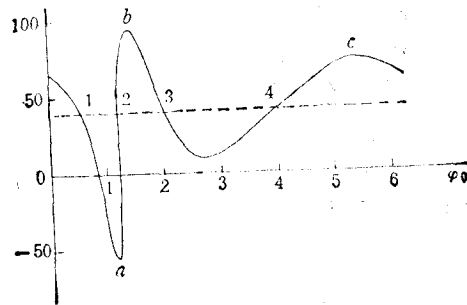


图 1

图 1 就是在  $\rho_0 = 2$ ,  $\rho_1 = 7$  和  $I_H/2\pi = -3.0\pi$ , 得到的  $I(\varphi_0)$  依赖于  $\varphi_0$  的关系. 由于  $\varphi_0$  和  $\varphi_0 + 2\pi$  在物理上是等价的, 所以有  $I(\varphi_0 = 0) = I(\varphi_0 = 2\pi)$ , 这在图 1 中也可明显地看出.

如果我们给定流过环域隧道结的电流为  $I$ , 例如取  $I = 40.0$ , 从图 1 即可看出, 对应的解不是一个, 而是四个. 这种存在多个解的现象在我们对宽环带结的计算中是具有普遍性的.

### 三、解的稳定性条件

上节中的计算表明, 满足条件(4a)和(4b)式, 方程(3)存在有多个解. 这些解是否在物理上都可以实现的呢? 这就取决于解的稳定性. 为此, 我们写出圆对称环域结的自由能泛函  $F$

$$F = 2\pi \int_{\rho_0}^{\rho_1} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)^2 - \cos \varphi \right\} \rho d\rho. \quad (6)$$

(6) 式等号右边积分中的第一项是磁场能密度, 第二项是 Josephson 隧道结耦合能密度, 两项相加并对环域进行面积分即为自由能泛函.

对自由能泛函  $F$  求变分(由于  $\rho$  是唯一的自变量, 以后把  $\partial/\partial\rho$  写成  $d/d\rho$ ), 可得

$$\begin{aligned} \delta F = 2\pi \int_{\rho_0}^{\rho_1} \left\{ \left( \frac{d\varphi}{d\rho} \right) \left( \frac{d}{d\rho} \delta\varphi \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{d\rho} \delta\varphi \right)^2 + \sin \varphi \delta\varphi \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cos \varphi (\delta\varphi)^2 \right\} \rho d\rho. \end{aligned} \quad (7)$$

显然, 对函数变分  $\delta\varphi$  在边界上提出适当要求, 即在边界上  $\delta\varphi = 0$ , 从泛函  $F$  的一级变分  $\delta F = 0$ , 即可求出环域结中函数  $\varphi$  所满足的方程, 它就是方程(3). 泛函  $F$  的二级变分为

$$\delta^2 F = 2\pi \int_{\rho_0}^{\rho_1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d}{d\rho} (\delta\varphi) \right)^2 + \frac{1}{2} \cos \varphi (\delta\varphi)^2 \right] \rho d\rho. \quad (8)$$

显然  $\cos \varphi$  是已知函数, 是由方程(3)联立条件(4a)和(4b)式所求得解  $\varphi$  的余弦函数. 令

$$\delta\varphi = \varepsilon \eta(\rho),$$

其中  $\varepsilon$  为任意小的正数, (8)式可写为

$$E(\eta) = \frac{\delta^2 F}{\pi \varepsilon^2} = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \left[ \left( \frac{d\eta}{d\rho} \right)^2 + \cos \varphi \eta^2 \right] \rho d\rho. \quad (9)$$

这样解的稳定性问题, 归结为二级变分  $\delta^2 F$  的恒正性问题. 也就是说, 对任意函数  $\eta(\rho)$ , 若  $\delta^2 F$  恒大于零, 则解是稳定的, 否则解是不稳定的.

根据以上的讨论, 只要我们能够求出(9)式右边积分的极小值  $E_{\min}$ , 则稳定性问题就得到解决: 若  $E_{\min} > 0$ , 则二级变分  $\delta^2 F$  必然恒正, 解是稳定的; 若  $E_{\min} < 0$ , 则  $\delta^2 F$  不是恒正的, 解是不稳定的.

求(9)式等号右边积分的极小值  $E_0$ , 实际上仍然是一个变分问题. 由于它的特殊形式, 我们可以把它化为二阶线性方程的本征值问题. 为此对  $\eta(\rho)$  进行变分, 得

$$\begin{aligned} \delta E(\eta) &= 2 \int_{\rho_0}^{\rho_1} \left[ \left( \frac{d\eta}{d\rho} \right) \left( \frac{d}{d\rho} \delta\eta \right) + \cos\varphi\eta\delta\eta \right] \rho d\rho \\ &= 2 \int_{\rho_0}^{\rho_1} \left[ -\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\eta}{d\rho} \right) + \rho \cos\varphi\eta \right] \delta\eta \cdot d\rho. \end{aligned} \quad (10)$$

在边界上我们已经用了下述条件  $\rho: \frac{d\eta}{d\rho} \delta\eta|_{\rho=\rho_0} = \rho \frac{d\eta}{d\rho} \delta\eta|_{\rho=\rho_1} = 0$ . (11)

此外,就(9)式右边积分的形式来看,是无法求得极小值的,因为我们用  $A\eta$  替代  $\eta$ , 其值即变为原值的  $A^2$  倍. 所以应附加条件  $\int_{\rho_0}^{\rho_1} \eta^2 \rho d\rho = \text{常数} = 1$ . (12)

(12)式为本征值问题中的归一化条件,这在量子力学的变分问题中是司空见惯的. 变分(12)式得到

$$2 \int_{\rho_0}^{\rho_1} \eta \delta\eta \rho d\rho = 0. \quad (13)$$

对(13)式乘以拉氏不定乘子  $(-E)$ , 然后与(10)式相加,由极值条件可得

$$-\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\eta}{d\rho} \right) + \rho \cos\varphi\eta = E\rho\eta. \quad (14)$$

这就是求(9)式极值而引出的本征值问题. 由于  $\eta(\rho)$  正比于  $\delta\varphi(\rho)$ , 它在边界  $\rho = \rho_0$  和  $\rho_1$  处应满足对  $\delta\varphi(\rho)$  提出的要求. 设此本征值问题所具有的最小的本征值  $E_{\min}$ , 对应的本征函数为  $\eta_{\min}(\rho)$ , 则

$$E(\eta_{\min}) = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \left[ \left( \frac{d\eta_{\min}}{d\rho} \right)^2 + \cos\varphi\eta_{\min}^2 \right] \rho d\rho = E_{\min} \int_{\rho_0}^{\rho_1} \eta_{\min}^2 \rho d\rho = E_{\min}. \quad (15)$$

对任意的  $\eta(\rho)$ , 有  $E_{\min} \leq E[\eta(\rho)]$ . (16)

总之,由上面的讨论我们知道,当上述本征值问题中的  $E_{\min} > 0$  时,解是稳定的,否则解是不稳定的.

#### 四、解的稳定性计算

在第二节中,在条件(4a)和(4b)式下,已解出方程(3)的  $\varphi(\rho)$ . 如  $\rho_0 = 2.0, \rho_1 = 7.0, I_H/2\pi = -3.0, I = 40.0$ , 可以求得四个解  $\varphi_i(\rho) (i = 1, 2, 3, 4)$ . 相应地也有四个  $\cos\varphi_i(\rho)$ . 由于求得的是数值解,把  $\cos\varphi_i(\rho)$  代入(14)式后,也只能用数值计算求解本征值方程(14). 解的稳定性要求计算出相应于每个解  $\varphi_i(\rho) (i = 1, 2, 3, 4)$  的最小本征值  $E_{\min}$ , 这仍然相当困难. 如果注意到,我们只需求出  $E_{\min}$  的正负,并不在乎  $E_{\min}$  的精确值,求解过程是可以简化的.

由斯特姆-刘维型本征值问题的性质可知<sup>[5]</sup>, 本征值问题存在无限多个本征值及相应的本征函数,这些本征值若按从小到大排列为  $E_0 (E_0 = E_{\min}), E_1, E_2, \dots$ , 则相应的本征函数在区间  $[\rho_0, \rho_1]$  中的节点个数正好依次增加. 对  $E_{\min}$  而言,相应的本征函数在区间  $[\rho_0, \rho_1]$  内无节点,节点处在边界上. 这就是说,在不要求归一化本征函数的条件下,当求解下述问题时:

$$-\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\eta}{d\rho} \right) + \rho \cos\varphi\eta = E_{\min}\rho\eta, \quad (17)$$

$$\eta(\rho_0) = 0, \quad \frac{d}{d\rho} \eta(\rho_0) = c \quad (\text{任意}) \quad (18)$$

求得的解  $\eta(\rho)$  必然有  $\eta(\rho_1) = 0$ . (19)

因为方程(17)是线性齐次方程,归一化条件要求有一个确定的  $c$ , 而放弃归一化条件意味着  $c$  可以任意. 不失一般性,我们仍可取  $c > 0$ , 当(17)式中取  $E > E_{\min}$  代替  $E_{\min}$  时, 此时在条件(18)式下求解方程(17)时, 节点必然向区间内移动, 从而在  $E$  变到  $E_1$  时有

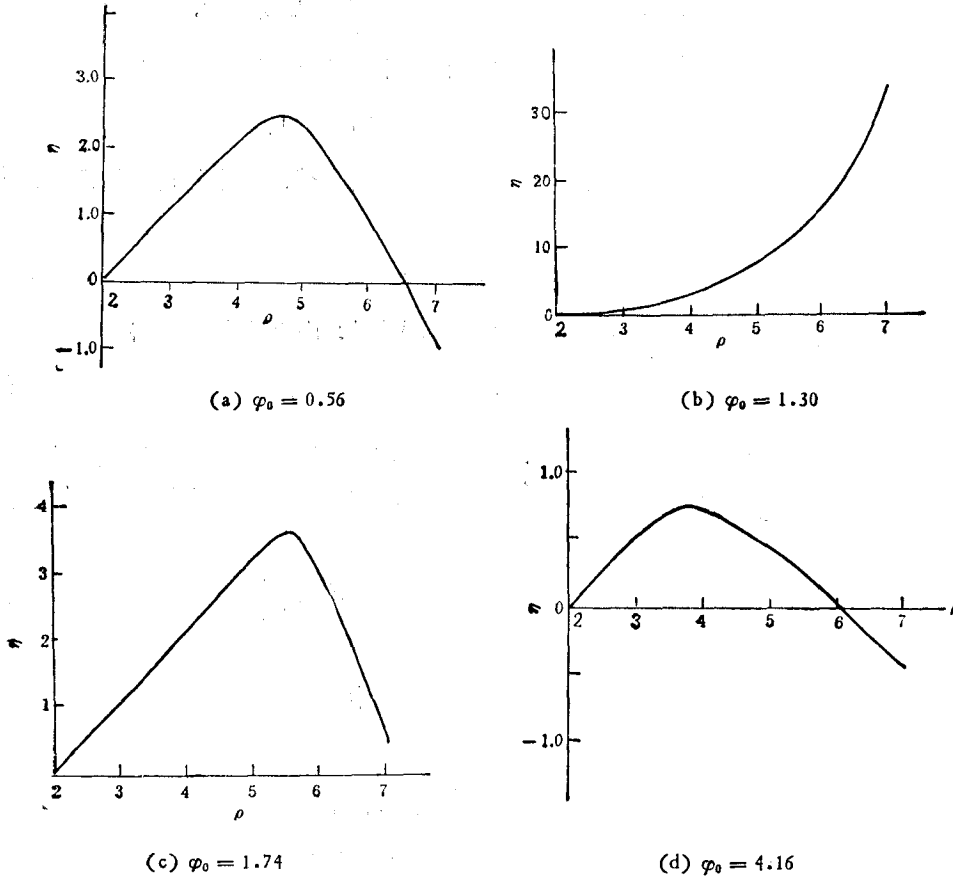


图2 对应于不同  $\varphi_0$  的  $\eta$  曲线  $\rho_0 = 2.0$ ;  $\rho_1 = 7.0$ ;  $l_H/2\pi = -3.0$ ;  $l = 40.0$ ;  
图(a), (b), (c), (d) 对应于图1中的1, 2, 3, 4

$\eta(\rho_1) = 0$ , 并在区间  $[\rho_0, \rho_1]$  中存在一个节点. 但当取  $E < E_{\min}$  代替  $E_{\min}$  时, 在条件(18)式下求解方程时, 一直到  $\rho = \rho_1$ , 显然  $\eta(\rho)$  都不为零, 即

$$\eta(\rho) > 0, \forall \rho \in [\rho_0, \rho_1]. \quad (20)$$

上面的论证也能以逆的方式来表述. 如取某个确定的  $E$ , 在条件(18)式下求解方程(17), 若解满足(20)式, 则最小的本征值  $E_{\min} > E$ , 反之, 若解在某个  $\rho < \rho_1$ , 就有  $\eta(\rho) = 0$ , 则  $E_{\min} < E$ . 这样, 为了确定  $E_{\min}$  的正负, 只要取某个确定的  $E = 0$ , 取代(17)式中的  $E_{\min}$ . 在此情况下, 用初始条件(18)式求解(17)式, 解得  $\eta(\rho)$  满足(20)式, 则  $E_{\min} > 0$ ; 否则在某个  $\rho < \rho_1$ , 就发生  $\eta(\rho) = 0$ , 则  $E_{\min} < 0$ . 这就是我们用以确定  $E_{\min}$  究竟是正还是负的计算方法. 这也是我们用以确定解的稳定性与否的方法.

对于如图1所示的  $I$  与  $\varphi_0$  的关系, 我们对图中所标之点进行了其稳定性的计算, 其结果分别由图2和图3所示.

在图 1 中我们可以看到在  $I = 40.0$  时有四个解, 如前所述, 其  $\varphi_0$  分别对应于 0.56, 1.30, 1.74, 4.16. 从图 2 所对应的  $\eta$  和  $\rho$  的曲线可知,  $\varphi_0 = 0.56$  和  $\varphi_0 = 4.16$  是不稳定的,  $\varphi_0 = 1.30$  是稳定的, 而  $\varphi_0 = 1.74$  是亚稳的.

在图 3 中还给出了图 1 中  $a, b, c$  三点的稳定性图. 虽然它们对应的  $I$  不相同, 但可知图 3(c) 是不稳定的.

对结处在其他外磁场下的情形都可以作类似的讨论, 在此不再给出. 处于不同的  $\varphi_0$  下的给定  $I_H$  和  $I$  的结中电流分布也不相同<sup>[2]</sup>, 在此也不再给出.

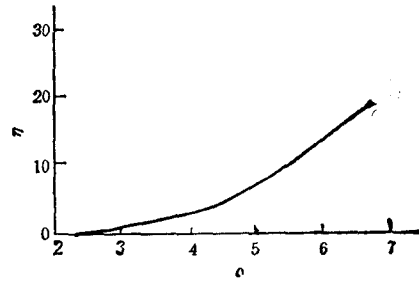
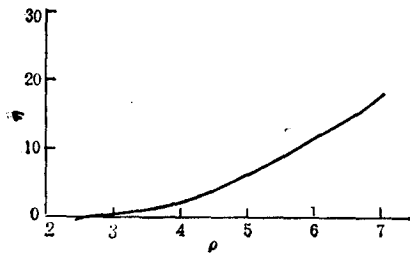
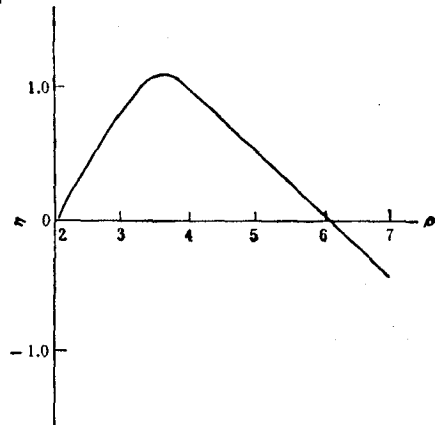
(a)  $\varphi_0 = 1.19$ (b)  $\varphi_0 = 1.39$ (c)  $\varphi_0 = 5.75$ 

图 3  $\eta$  与  $\rho$  的曲线  $\rho_0 = 2.0$ ;  $\rho_1 = 7.0$ ;  $I_H/2\pi = -3.0$ ; 图 (a), (b), (c) 对应于图 1 中的  $a, b, c$

### 参 考 文 献

- [1] 王炜, 姚希贤, 本刊本期.
- [2] C. S. Owen and D. J. Scalapino, *Phys. Rev.*, **164**(1967), 538.
- [3] R. Vaglio, *J. Low Temp. Phys.*, **25**(1976), 299.
- [4] 孙元善, 姚希贤, 低温物理, **7**(1985), 99.
- [5] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York (1953), p. 719.

## STATIC CHARACTERISTICS OF CIRCULAR SYMMETRIC ANNULAR JOSEPHSON JUNCTION (II)

### THE STABILITY OF THE SOLUTIONS OF THE SELF-FIELD EQUATIONS

WANG WEI YAO XI-XIAN

(Department of Physics, Nanjing University)

#### ABSTRACT

The stability of the solutions of the self-field equations for the circular symmetric annular Josephson junctions is analyzed in this paper. The stability of the solutions is determined by the signs of the second-order variation of the free energy with respect to the variation of the phase difference in the junctions. This criterion can then be transformed to an eigenvalue problem. The solutions may be stable, nonstable, or metastable for a given bias current.