

# 关于超纲链方法中无规相近似的讨论

汪 克 林

(中国科学技术大学基础物理中心)

1987 年 6 月 15 日收到

## 提 要

应用超纲链方法讨论均匀费密子系统的多体效应时常用无规近似和选取原始波函数为费密球分布的波函数。本文讨论这种做法的适用性，给出其适用范围与势的性质和密度的关系。

## 一、引 言

本文对超纲链方法的无规近似进行讨论。我们提的问题是采用某种近似，用图形的语言来说就是略去了一些图形，在一定条件下这些图形的作用是可以忽略的。但当条件变化时，它们的作用会逐渐变得重要，该近似方法就不再适用。于是我们会问可否用改变原始波函数的办法使近似方法继续可用？换句话说，就是用改变原始波函数的办法去补偿那些略去的图形的贡献。

为确定及简单计，以一个均匀的费密子系统作具体例子讨论，但原则上所有的结论都适用于别的系统。得到的结论是：(1) 系统的密度小到一定程度时用自由系统的波函数作原始波函数得不到最低的能量；(2) 得出这个临界的密度值和作用势的定量关系；(3) 讨论过程启发我们如何找寻适当的原始波函数以扩大近似方法的适用范围。

## 二、相互作用势

如图 1，势取如下的形式：

$$V(R) = A \frac{e^{-\alpha R}}{R} - B \frac{e^{-\beta R}}{R}, \quad (1)$$

其中  $A, B, \alpha, \beta$  是参量。当  $R$  趋于零时，排斥力为主，故  $A > B > 0$ 。由势在  $R_0$  为极小，可得

$$(\alpha - \beta)R_0 = \ln A(\alpha R_0 + 1) - \ln B(\beta R_0 + 1) \quad (2)$$

及 
$$\alpha > \beta > 0. \quad (3)$$

对相互作用势作傅氏变换，得

$$V_q = n_0 \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} V(\mathbf{R}) d\mathbf{R}$$

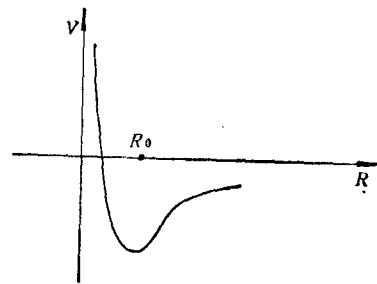


图 1

$$= 4\pi n_0 \left( \frac{A}{q^2 + \alpha^2} - \frac{B}{q^2 + \beta^2} \right), \quad (4)$$

其中  $n_0$  是系统的密度.

### 三、基态按费密子数平均的能量

在这一节里简略重述文献[1]中的若干要点及导出一些讨论需要的结果. 用  $\Phi_0$  表示原始波函数,  $\Psi_0$  表示 Jastrow 波函数. 它们的关系是

$$\Psi_0 = \prod_{i < j} f(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \Phi_0, \quad (5)$$

$f$  是关联因子,  $A$  是费密子总数. 引入  $b_{ij}$  如下:

$$|f_{ij}|^2 = 1 + b_{ij}. \quad (6)$$

引入算符  $a$ , 它在态  $|x\rangle$  及  $|y\rangle$  之间的矩阵元示于图 2(a) 中.  $\rho$  及  $1 - \rho$  表示粒子及空穴算符.

$$\rho = \sum |h\rangle \langle h|, \quad (7)$$

$$1 - \rho = \sum |p\rangle \langle p|, \quad (8)$$

其中  $|h\rangle$  是系统基态的单费密子态;  $|p\rangle$  是激发的单费密子态;  $S^{(0)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  表示粒子-空穴激发

$$S^{(0)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \mathbf{x}_2 | (1 - \rho) | \mathbf{x}_1 \rangle \langle \mathbf{x}_1 | \rho | \mathbf{x}_2 \rangle. \quad (9)$$

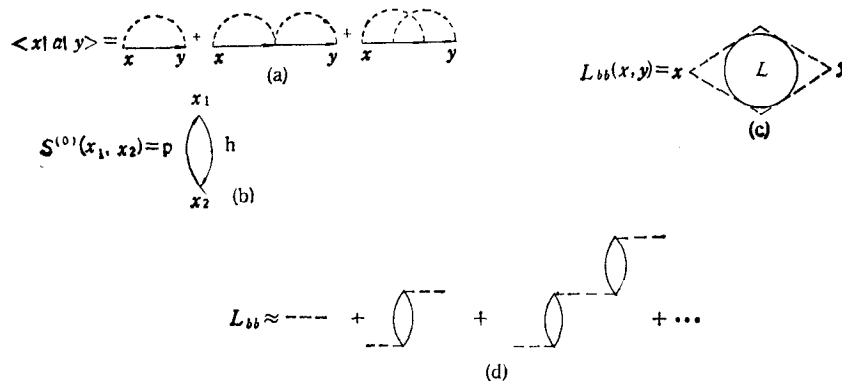


图 2 实线表示电子和空穴; 虚线表示  $b$

它的图形示于图 2(b) 中.

$L_{bb}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  的图见图 2(c). 在无规相近似下是图 2(d). 对于均匀的费密子系统,  $L_{bb}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  只是  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  的函数, 并可变换到单变量的动量空间中去. 由图 2(d) 可得

$$L_{bb}(q) = b_q + S_q^{(0)} b_q L_{bb}(q), \quad (10)$$

其中  $b_q$ ,  $S_q^{(0)}$  是  $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  及  $S^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  的傅氏变换.

在无规相近似下, 系统的基态按费密子数平均的能量表示为

$$\frac{E}{A} = E_1 + \frac{1}{2A} \sum_q \left\{ \frac{q^2}{4m} \left[ \frac{b_q}{1 - S_q^{(0)} b_q} - b_q \right] + V_q \left[ \frac{S_q^{(0)}}{1 - S_q^{(0)} b_q} - 1 \right] \right\}, \quad (11)$$

其中  $V_q$  由 (4) 式给出 ( $\hbar = 1$ ),  $E_1$  表示与  $b_q$ ,  $S_q^{(0)}$  和  $V_q$  无关的部分,  $b_q$  由对  $E/A$  的变分来定, 即由

$$\frac{\partial}{\partial b_q} \left( \frac{E}{A} \right) = 0,$$

得 
$$1 - S_q^{(0)} b_q = \left( 1 + \frac{4\pi V_q S_q^{(0)^2}{q^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

将 (12) 式代入 (11) 式, 得

$$\frac{E}{A} = E_1 + \frac{1}{(2\pi)^3 n_0} \left\{ \frac{q^4}{4m} \frac{1}{S_q^{(0)}} [B^{-1}(q) + B(q) - 2] + V_q q^2 [S_q^{(0)} B^{-1}(q) - 1] \right\} dq, \quad (13)$$

其中 
$$B(q) \equiv \left( 1 + \frac{4\pi V_q S_q^{(0)^2}{q^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

#### 四、原始波函数的讨论

先计算原始波函数为费密球分布的情形

$$\langle \mathbf{x} | \rho | \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{K < K_F} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{K} \quad (15)$$

及

$$\begin{aligned} S^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \langle \mathbf{x} | \rho | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y} | (1 - \rho) | \mathbf{x} \rangle \\ &= \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{2\pi^2 R^2} \left( \frac{\sin K_F R}{R} - K_F \cos K_F R \right) - \frac{1}{4\pi^4 R^4} \left( \frac{\sin K_F R}{R} - K_F \cos K_F R \right)^2, \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ . 相应的  $S_q^{(0)}$  可求出如下:

$$S_q^{(0)} = \begin{cases} \frac{3q}{4K_F} - \frac{q^3}{16K_F} & q < 2K_F, \\ 1 & q \geq 2K_F. \end{cases} \quad (17a)$$

$$(17b)$$

其次考虑一个原始波函数, 它对应于对费密球分布有一个无限小的偏离的情形, 并仍然符合均匀系统的要求, 如图 3 所示.

$$0 \leq K \leq K_F - \Delta, \quad K_F \leq K \leq K_F + \Delta. \quad (18)$$

由于费密子数恒定, 应有

$$\frac{4\pi}{3} (K_F + \Delta)^3 - \frac{4\pi}{3} K_F^3 = \frac{4\pi}{3} K_F^3 - \frac{4\pi}{3} (K_F - \Delta)^3. \quad (19)$$

略去  $\Delta^3$  以上的项, 有

$$\Delta_1 = \Delta - \frac{2\Delta^2}{K_F}. \quad (20)$$

算出这种情形相应的量

$$\langle \mathbf{x} | \rho | \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ \int_{K < K_F - \Delta} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{K} + \int_{K_F \leq K \leq K_F + \Delta_1} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{K} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 R^2} \left\{ \frac{\sin(K_F - \Delta)R}{R} - (K_F - \Delta) \cos(K_F - \Delta)R + \frac{\sin(K_F + \Delta_1)R}{R} - (K_F + \Delta_1) \cos(K_F + \Delta_1)R - \frac{\sin K_F R}{R} + K_F \cos K_F R \right\}, \quad (21a)$$

$$\langle \mathbf{y} | (1 - \rho) | \mathbf{x} \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \langle \mathbf{y} | \rho | \mathbf{x} \rangle, \quad (21b)$$

$$S^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \langle \mathbf{x} | \rho | \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x} | \rho | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y} | \rho | \mathbf{x} \rangle. \quad (22)$$

为了区别,第二种情形的  $S^{(0)}$  加一个撇号.

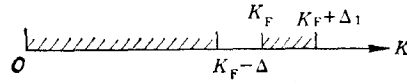


图 3

现在把  $S^{(0)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  变换到  $S_q^{(0)}$ , 一般的标准方法<sup>[2]</sup>是在对  $\mathbf{K}$  积分前直接对  $S^{(0)}$  作傅氏变换. 再对  $\mathbf{R}$  及  $\mathbf{K}$  积分, 其中用到两个球的重叠的几何考虑. 在第二种情形里如果也这样作, 几何考虑太繁复, 因此我们发展了一个新的计算方法, 其详细情形见附录, 以下列出计算的结果:

$$S_q^{(0)} = A(q) - C(q), \quad (23)$$

$$A(q) = \frac{1}{n_0} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{1}{2\pi^2 R^2} \left\{ \frac{\sin(K_F - \Delta)R}{R} - (K_F - \Delta) \cos(K_F - \Delta)R + \frac{\sin(K_F + \Delta_1)R}{R} - (K_F + \Delta_1) \cos(K_F + \Delta_1)R - \frac{\sin K_F R}{R} + K_F \cos K_F R \right\} d\mathbf{R} = 1 + O(\Delta^3), \quad (24)$$

$$C(q) = \frac{1}{n_0} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} \left\{ \frac{\sin(K_F - \Delta)R}{R} - (K_F - \Delta) \cos(K_F - \Delta)R + \frac{\sin(K_F + \Delta_1)R}{R} - (K_F + \Delta_1) \cos(K_F + \Delta_1)R - \frac{\sin K_F R}{R} + K_F \cos K_F R \right\} \frac{1}{4\pi^4 R^4} d\mathbf{R}. \quad (25)$$

将(25)式的积分按附录中的方法积出, 得

$$S_q^{(0)} = 1 \quad q \geq 2(K_F + \Delta_1), \quad (26a)$$

$$S_q^{(0)} = \frac{3}{4} \frac{q}{K_F} - \frac{q^3}{16K_F^3} + \left( \frac{3}{2} \frac{q}{K_F^2} - \frac{3}{K_F} \right) \Delta + \left( \frac{3}{K_F^2} - \frac{9}{4} \frac{q}{K_F^3} \right) \Delta^2 \quad 2(K_F + \Delta_1) \geq q > 2K_F + \Delta_1, \quad (26b)$$

$$S_q^{(0)} = -\frac{3}{4} \frac{q}{K_F} + \frac{1}{16} \frac{q^3}{K_F^3} - \frac{3}{2} \frac{\Delta^2}{qK_F} \quad 2K_F + \Delta_1 \geq q > 2K_F, \quad (26c)$$

$$S_q^{(0)} = 1 - \frac{3}{2} \frac{\Delta^2}{qK_F} \quad 2K_F \geq q > 2K_F - \Delta + \Delta_1, \quad (26d)$$

$$S_q^{(0)} = -1 + \frac{3}{2} \frac{q}{K_F} - \frac{1}{8} \frac{q^3}{K_F^3} + \left( \frac{9}{2} \frac{1}{qK_F} - \frac{3}{2} \frac{q}{K_F^3} \right) \Delta^2 \quad 2K_F - \Delta + \Delta_1 > q \geq 2K_F - \Delta, \quad (26e)$$

$$S_q^{(0)} = 1 + \left( -\frac{3}{K_F} + \frac{3}{2} \frac{q}{K_F^2} \right) \Delta + \left( \frac{3}{qK_F} + \frac{3}{K_F^2} - \frac{9}{4} \frac{q}{K_F^3} \right) \Delta^2$$

$$2K_F - \Delta \geq q > 2K_F - 2\Delta, \quad (26f)$$

$$S_q^{(0)} = \frac{3}{4} \frac{q}{K_F} - \frac{1}{16} \frac{q^3}{K_F^3} + \left( \frac{3}{qK_F} - \frac{3}{2} \frac{q}{K_F^2} \right) \Delta^2 \quad 2K_F - \Delta \geq q > \Delta_1 + \Delta, \quad (26g)$$

$$S_q^{(0)} = -\frac{3}{4} \frac{q}{K_F} + \frac{1}{16} \frac{q^3}{K_F^3} + \frac{6}{K_F} \Delta + \left( -\frac{3}{qK_F} - \frac{6}{K_F^3} \right) \Delta^2 \quad \Delta_1 + \Delta \geq q > \Delta, \quad (26h)$$

$$S_q^{(0)} = \frac{3}{4} \frac{q}{K_F} - \frac{1}{16} \frac{q^3}{K_F^3} + \left( \frac{3}{K_F} - \frac{3}{2} \frac{q}{K_F^2} \right) \Delta + \left( -\frac{3}{2} \frac{1}{qK_F} - \frac{3}{K_F^2} + \frac{3}{4} \frac{q}{K_F^3} \right) \Delta^2$$

$$\Delta \geq q > \Delta_1, \quad (26i)$$

$$S_q^{(0)} = \frac{9}{4} \frac{q}{K_F} - \frac{3}{16} \frac{q^3}{K_F^3} - \frac{3}{2} \frac{q}{K_F^2} \Delta^2 \quad \Delta_1 \geq q. \quad (26j)$$

现在用(13)式分别计算两种情形的基态能量。(13)式的第一项对两种情形都很易算出。第一种情形:

$$E_1 = \frac{1}{(2\pi)^3 n_0} = \frac{3K_F^2}{10m}, \quad (27)$$

其中用了  $n_0 = \frac{4}{3} \pi K_F^3$ 。对第二种情形:

$$E_1' = \frac{1}{(2\pi)^3 n_0} \left\{ \int_0^{K_F - \Delta} \frac{K^2}{2m} d\mathbf{K} + \int_{K_F}^{K_F + \Delta_1} \frac{K^2}{2m} d\mathbf{K} \right\} = \frac{3K_F^3}{10m} + \frac{3\Delta^2}{m}. \quad (28)$$

对于(13)式的第二项,考虑两种情形的差:

(1) 当  $q$  在区间(26a)式时,  $S_q^{(0)} = S_q^{(0)'} = 1$ , 两者无区别。

(2) 当  $q$  在(26b)–(26f)式的区间中时, 每个区间的长度  $\approx \Delta$ , 所以  $q$  的积分可用中值定理。  $S_q^{(0)}$  及  $S_q^{(0)'}$  的中间值有以下关系:

$$S_q^{(0)'} = S_q^{(0)} + O(\Delta^2). \quad (29)$$

所以(13)式的第二项对两者的差来说  $\approx O(\Delta^3)$ , 因而可不计这些区域。

(3) 对于(26h)–(26j)式的  $q$  的区域,  $q$  的量级  $\approx O(\Delta)$ , 积分的长度  $\approx O(\Delta)$ , 积分以后的值  $\approx O(\Delta^3)$ , 也可不予考虑。

(4) 剩下要考虑的是区间(26g)式。写出为

$$E_2 = \frac{1}{(2\pi)^3 n_0} \int_0^{2K_F} \left\{ \frac{q^4}{4m} \frac{1}{S_q^{(0)'} } [B^{-1}(q) + B(q) - 2] + V_q q^2 [S_q^{(0)'} B^{-1}(q) - 1] \right\} dq, \quad (30a)$$

$$E_2' = \frac{1}{(2\pi)^3 n_0} \int_0^{2K_F} \left\{ \frac{q^4}{2m} \frac{1}{S_q^{(0)'} } [B'^{-1}(q) + B'(q) - 2] + V_q q^2 [S_q^{(0)'} B'^{-1}(q) - 1] \right\} dq. \quad (30b)$$

在第二个式子的积分限中略去了  $\Delta$ 。由(26g)式与(17a)式得

$$S_q^{(0)'} = S_q^{(0)} + \frac{16K_F^2 - 3q^2}{2qK_F^3} \Delta^2, \quad (31)$$

$$\text{其中} \quad S_q^{(0)} = \frac{12qK_F^2 - q^4}{16K_F^3}. \quad (32)$$

$$\text{于是得} \quad [S_q^{(0)'}]^{-1} = [S_q^{(0)}]^{-1} - [S_q^{(0)}]^{-2} \cdot \frac{6K_F^2 - 3q^2}{2qK_F^3} \Delta^2. \quad (33)$$

将(31)与(32)式代入(14)式中,得

$$B'(q) = B(q) + \frac{2mV_q S_q^{(0)}(6K_F^2 - 3q^2)}{B(q)q^3 K_F^3} \Delta^2, \quad (34)$$

$$B'(q)^{-1} = B(q)^{-1} - \frac{2mV_q S_q^{(0)}(6K_F^2 - 3q^2)}{B(q)^2 q^3 K_F^3} \Delta^2. \quad (35)$$

以上两式的精确度都是到  $O(\Delta^2)$ . 将它们代入(30b)式,并保留到  $O(\Delta^2)$  项,得

$$E'_2 - E_2 = \frac{\Delta^2}{(2\pi)^3 n_0} \int_0^{K_F} \left\{ \frac{V_q(6K_F^2 - 3q^2)q}{2B(q)K_F^3} [1 - B(q)^{-2}] - \frac{q^3(6K_F^2 - 3q^2)}{8mS_q^{(0)2}K_F^3} [B(q)^{-1} + B(q) - 2] + \frac{V_q q(6K_F^2 - 3q^2)}{2B(q)K_F^3} - \frac{2mV_q^2 S_q^{(0)2}(6K_F^2 - 3q^2)}{B(q)^3 q K_F^3} \right\} dq. \quad (36)$$

现在考虑弱  $V_q$  的情形,即近似有

$$B(q) = \left( 1 + \frac{4mV_q S_q^{(0)2}}{q^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{2mV_q S_q^{(0)2}}{q^2}. \quad (37)$$

由  $S_q^{(0)} = \frac{3}{4} \frac{q}{K_F} - \frac{1}{16} \frac{q^3}{K_F^3}$ , 可以看出,当  $q \rightarrow 0$  时,  $S_q^{(0)} \approx O(q)$ ,  $S_q^{(0)2}/q^2$  有限. 所以当  $q \rightarrow 0$  时,(37)式并不出现奇异性. 在这种情况下,有

$$E'_2 - E_2 = \frac{\Delta^2}{(2\pi)^3 n_0} \int_0^{K_F} - \frac{q(6K_F^2 - 3q^2)}{K_F^3} \left( \frac{4\pi n_0 A}{q^2 + \alpha^2} - \frac{4\pi n_0 B}{q^2 + \beta^2} \right) dq. \quad (38)$$

将上式的积分积出,最后得  $E'_1 - E_1 = \frac{3}{m} \Delta^2$ , (39)

$$E'_2 - E_2 = \Delta^2 \frac{1}{2\pi^2 K_F} \left\{ A \left[ -6 + 3 \ln \left( 1 + \frac{4K_F^2}{\alpha^2} \right) + \frac{3\alpha^2}{2K_F^2} \ln \left( 1 + \frac{4K_F^2}{\alpha^2} \right) \right] - B \left[ -6 + 3 \ln \left( 1 + \frac{4K_F^2}{\beta^2} \right) + \frac{3\beta^2}{2K_F^2} \ln \left( 1 + \frac{4K_F^2}{\beta^2} \right) \right] \right\}. \quad (40)$$

由于  $A > B > 0$ , 所以当  $K_F$  足够小时,得

$$E' - E = E'_1 - E_1 + E'_2 - E_2 < 0. \quad (41)$$

至此,可以看出:(1)用计算基态能量来作为判据,看出在均匀费密系统密度足够低时,无规相近似并用自由系统的费密球分布作原始波函数不再有效. 这个结论和文献[1]中的讨论不同,但和格林函数的结论很相似;(2)虽然格林函数方法有类似的定性论断,但并无定量的判断. 从本文的讨论看,系统的密度小到什么程度需修改原始波函数是与相互作用的参量有明确的定量关系. 固然具体的数学表达式与势的模型有关,但本质的讨论一样;(3)从讨论中看到,用超纲链方法讨论还有一个好处. 即当密度小到一定程度时,无规相近似加上自由系统波函数作原始波函数虽已失效,但仍可用改变原始波函数的办法来补救,至少在一定范围内可望得到合理的结果.

## 附 录

1. 首先用简单的费密球分布来阐明计算方法. 这时有

$$S_q^{(0)} = \frac{1}{\omega_0} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} S^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{R} = \frac{1}{n_0} \iint e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} \frac{1}{2\pi^2 R^2} \left( \frac{\sin K_F R}{R} - K_F \cos K_F R \right) \delta(\mathbf{R}) d\mathbf{R}$$

$$- \int \frac{1}{4\pi^2 R^2} \left( \frac{\sin K_F R}{R} - K_F \cos K_F R \right)^2 e^{-iq \cdot R} d\mathbf{R}, \quad (\text{A.1})$$

其中  $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ . 上式等号右端第一项积出为 1. 第二项

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2 n_0} \int \frac{1}{R^2} \left( \frac{\sin K_F R}{R} - K_F \cos K_F R \right)^2 e^{-iq \cdot R} dR \\ &= \frac{6}{\pi q K_F^3} \int_0^\infty dR \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sin q R}{R^3} - \frac{1}{4R^3} [\sin(q + 2K_F)R + \sin(q - 2K_F)R] - \frac{K_F}{2R^4} [\cos(q - 2K_F)R \right. \\ & \quad \left. - \cos(q + 2K_F)R] + \frac{1}{2} \frac{K_F^2}{R^3} \sin q R + \frac{K_F^2}{4R^3} [\sin(q + 2K_F)R + \sin(q - 2K_F)R] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

对于上述积分的下限, 考察以下的极限过程:

$$\int_0^1 \frac{1}{R^4} \left( \frac{\sin K_F R}{R} - K_F \cos K_F R \right)^2 R \frac{2}{q} \sin q R dR \rightarrow \int_0^1 2R^2 dR \quad (\text{A.3})$$

所以积分的下限取值一定为零, 在求(A.2)式时只需考虑上限的取值. (A.2)式中的被积函数总取以下的函数形

$$\text{式:} \quad \int \frac{\sin AR}{K^{2n+1}} dR, \quad \int \frac{\cos BR}{K^{2n}} dR. \quad (\text{A.4})$$

利用积分公式

$$\int \frac{\sin x}{x^{2n+1}} dx = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)! x} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} (2k)!}{x^{2k}} \cos x + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} (2k+1)!}{x^{2k+1}} \sin x \right\} + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \text{si}(x), \quad (\text{A.5})$$

$$\int \frac{\cos x}{x^{2n}} dx = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)! x} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} (2k)!}{x^{2k}} \cos x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (2k+1)!}{x^{2k+1}} \sin x \right\} + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \text{si}(x). \quad (\text{A.6})$$

当  $|x| \rightarrow \infty$  时, 曲括号内的量趋于零. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\text{si}(x) \rightarrow 0$ . 但  $x \rightarrow -\infty$  时有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{si}(x) = -\pi. \quad (\text{A.7})$$

利用以上的分析. 当  $q \geq 2K_F$  时, (A.2)式中没有能给出  $\text{si}(-\infty)$  的项. 于是(A.1)式等号右端第二项为零, 仅有第一项, 故有

$$S_q^{(0)} = 1 \quad q \geq 2K_F. \quad (\text{A.8})$$

当  $q < 2K_F$  时,  $-\frac{1}{4R^3} \sin(q - 2K_F)R$ ,  $-\frac{K_F}{2R^4} \cos(q - 2K_F)R$  和  $\frac{K_F^2}{4R^3} \sin(q - 2K_F)R$  将给出  $\text{si}(-\infty)$ .

因此(A.2)式的计算中只需考虑它们.

$$\begin{aligned} & \frac{6}{\pi q K_F^3} \int_0^\infty dR \left\{ -\frac{1}{4R^3} \sin(q - 2K_F)R - \frac{K_F}{2R^4} \cos(q - 2K_F)R + \frac{K_F^2}{4R^3} \sin(q - 2K_F)R \right\} \\ &= 1 - \frac{3q}{4K_F} + \frac{q^3}{16K_F^3}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

最后得

$$S_q^{(0)} = \frac{3q}{4K_F} - \frac{q^3}{16K_F^3} \quad q < 2K_F. \quad (\text{A.10})$$

对于这样的例子本文的计算法似乎不显出优越性, 但对于文中的非费密子球分布就显出它既系统又简洁.

## 2. 非费密球分布

如正文所示,  $S_q^{(0)}$  表示如下:

$$S_q^{(0)} = \frac{1}{n_0} \int e^{-iq \cdot R} S^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{R} = A - B, \quad (\text{A.11})$$

$$A = 1, \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{6}{\pi q K_F^3} \int dR \left\{ -\frac{1}{4R^3} \sin(q - 2K_F)R - \frac{K_F}{2R^4} \cos(q - 2K_F)R + \frac{K_F^2}{4R^3} \sin(q - 2K_F)R - \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{4R^3} \sin(q - 2K_F + 2\Delta)R - \frac{K_F - \Delta}{2R^4} \cos(q - 2K_F + 2\Delta)R + \frac{(K_F - \Delta)^2}{4R^3} \sin(q - 2K_F + 2\Delta)R \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4R^3} \sin(q - 2K_F - 2\Delta)R - \frac{K_F + \Delta}{2R^4} \cos(q - 2K_F - 2\Delta)R \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(K_F + \Delta_i)^2}{4R^3} \sin(q - 2K_F - 2\Delta_i)R - \frac{1}{2R^2} (\sin(q - \Delta)R - \sin(q - 2K_F + \Delta)R) \\
& + \frac{K_F - \Delta}{2R^4} (\cos(q - 2K_F + \Delta)R + \cos(q - \Delta)R) \\
& + \frac{K_F}{2R^4} (\cos(q - 2K_F + \Delta)R - \cos(q - \Delta)R) \\
& - \frac{K_F(K_F - \Delta)}{2R^3} (\sin(q - \Delta)R + \sin(q - 2K_F + \Delta)R) \\
& - \frac{1}{2R^2} (\sin(q - \Delta_i)R - \sin(q - 2K_F - \Delta_i)R) \\
& + \frac{K_F + \Delta_i}{2R^4} (\cos(q - 2K_F - \Delta_i)R - \cos(q - \Delta_i)R) \\
& + \frac{K_F}{2R^4} (\cos(q - 2K_F - \Delta_i)R + \cos(q - \Delta_i)R) \\
& - \frac{K_F(K_F + \Delta_i)}{2R^3} (\sin(q - \Delta_i)R + \sin(q - 2K_F - \Delta_i)R) \\
& + \frac{1}{2R^2} (\sin(q - \Delta_i - \Delta)R - \sin(q - 2K_F - \Delta_i + \Delta)R) \\
& - \frac{K_F + \Delta_i}{2R^2} (\cos(q - 2K_F + \Delta - \Delta_i)R - \cos(q - \Delta - \Delta_i)R) \\
& - \frac{K_F - \Delta}{2R^4} (\cos(q - 2K_F + \Delta - \Delta_i)R + \cos(q - \Delta_i - \Delta)R) \\
& + \frac{(K_F - \Delta)(K_F + \Delta_i)}{2R^3} (\sin(q - \Delta_i - \Delta)R + \sin(q - 2K_F + \Delta - \Delta_i)R) \}. \quad (A.13)
\end{aligned}$$

对于这样多的项采用本文的计算并不复杂,按前面所讲,依次针对  $q$  的取值范围,挑出能给出  $\text{si}(-\infty)$  的项作积分,即得正文中的(26)式。

### 参 考 文 献

- [1] G. Ripka, *Phys. Rep.*, **56** (1979), 1.  
 [2] 例如见 A.L. Fetter, J. D. Walecka 著, 多粒子系统的量子理论(中译本), 科学出版社(1984), 200 页。

## DISCUSSION ON RANDOM PHASE APPROXIMATION OF HYPERNETTED CHAIN METHOD

WANG KE-LIN

(Centre of Fundamental Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

### ABSTRACT

In discussion of the many body effect of homogenous Fermion system with hypernetted chain method, RPA is always applied and original wave function is taken as a Fermi sphere distribution function. In this paper, the validity of this method is investigated and the relation between the valid range of this method and the properties of potential and density is obtained.