

# 双光子 Jaynes-Cummings 模型中的压缩

顾 樵

(西北大学物理系)

1987年7月20日收到

## 提 要

本文利用推广的 Jaynes-Cummings 哈密顿量的第  $n$  个子空间的完备集研究二能级系统的双光子辐射的量子统计性质, 求出了场方差的一般表达式, 得到了任意初态的最佳压缩条件和最佳压缩量, 并分析了最佳压缩态的时间演化. 作为例子, 讨论了初态为热平衡分布的裸原子系统的压缩行为的时间演化, 显示了压缩对于温度、失谐量、耦合劲度等参量的依赖关系, 并给出了压缩条件的解析形式及数值曲线. 最后指出了上述压缩的物理图象.

## 一、引 言

众所周知, 处于压缩态的电磁场在某个正交分量上具有比真空起伏更小的量子噪声, 从而可能在光通讯、引力波检测等领域中获得应用<sup>[1]</sup>. 理论研究表明, 许多双光子哈密顿量都具有压缩效应<sup>[2-4]</sup>. 但是这些模型都没有考虑原子的作用, 更没有考虑原子与场的相互作用, 致使得到的结论与实际物理过程相差很远. 最近 Compagno 等人在研究双光子辐射的压缩时, 考虑了原子的作用. 但是他们只考虑了一种特殊的情况<sup>[5]</sup>.

描述二能级原子与单模场相互作用的一个很有用的模型是 Jaynes-Cummings 提出的哈密顿量

$$H_1 = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \sigma_z + \hbar g(a\sigma^+ + a^\dagger\sigma^-), \quad (1)$$

其中  $a$  和  $a^\dagger$  分别是单模场的湮灭和产生算符,  $\sigma_z$  和  $\sigma^\pm$  分别是二能级原子的反转算符和能级升、降算符,  $\omega$  是单模场的频率,  $\omega_0$  是原子的频率间隔,  $g$  是耦合劲度.

Jaynes-Cummings 利用(1)式的哈密顿量建立了辐射的量子理论的修饰态 (dressed state) 表述<sup>[6]</sup>. 最近几年对这个模型的研究更加深入. 特别是 Graham 等人研究了  $H_1$  中的量子混沌现象<sup>[7]</sup>; Allen 等人利用  $H_1$  的多模形式, 研究了多原子系统的集体自发辐射, 即超辐射<sup>[8,9]</sup>; 文献[10]利用  $H_1$  的多模、双跃迁形式研究了超辐射中的量子拍频效应, 预言了一种高分辨率光谱技术; 文献[11]利用  $H_1$  的时间演化算符, 研究单模激光的光子统计, 得到了单模激光可以出现反聚束效应<sup>[12]</sup>的新结论.

本文将(1)式的哈密顿量直接推广到双光子过程, 即用

$$H_2 = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \sigma_z + \hbar g(a^2\sigma^+ + a^{\dagger 2}\sigma^-) \quad (2)$$

来描述二能级原子与单模场的双光子相互作用。并利用  $H_2$  的第  $n$  个子空间的完备集证明了  $H_2$  中确实存在着压缩效应,进而就任意初态的最佳压缩及其时间演化、压缩对于温度等参量的依赖关系等问题进行了较详细的讨论。

## 二、场方差的一般表达式

先考虑  $H_2$  的本征值问题。假设  $H_2$  的本征态可以写成下面的线性组合:

$$|\phi\rangle = A|n, a\rangle + B|n+2, b\rangle, \quad (3)$$

其中  $n$  是光子数;  $a, b$  表示二能级原子的高、低能级;  $A, B$  是组合系数,它们满足下面的归一化条件:

$$|A|^2 + |B|^2 = 1. \quad (4)$$

$H_2$  的本征方程为

$$H_2|\phi\rangle = E|\phi\rangle, \quad (5)$$

其中  $E$  是本征值。将(2)及(3)式代入(5)式,然后两边分别向  $\langle n, a|, \langle n+2, b|$  投影,整理后得

$$\left[ \hbar\omega n + \frac{1}{2} \hbar\omega_0 - E \right] A + \hbar g \sqrt{(n+1)(n+2)} B = 0, \quad (6a)$$

$$\hbar g \sqrt{(n+1)(n+2)} A + \left[ \hbar\omega(n+2) - \frac{1}{2} \hbar\omega_0 - E \right] B = 0. \quad (6b)$$

这是关于  $A, B$  的线性齐次方程组,它有非零解的必要充分条件是系数行列式为零,即

$$\begin{vmatrix} \hbar\omega n + \frac{1}{2} \hbar\omega_0 - E & \hbar g \sqrt{(n+1)(n+2)} \\ \hbar g \sqrt{(n+1)(n+2)} & \hbar\omega(n+2) - \frac{1}{2} \hbar\omega_0 - E \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

解这个久期方程,得到本征值

$$E_n^\pm = \hbar\omega(n+1) \pm \hbar Q_n, \quad (8)$$

其中

$$Q_n = \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2(n+1)(n+2)} \quad (9)$$

是双光子辐射的 Rabi 频率,  $\Delta = 2\omega - \omega_0$  是失谐量。将(8)式代入(6)式,并利用(4)式得到

$$A^+ = \sin\theta_n, \quad B^+ = \cos\theta_n; \quad (10a)$$

$$A^- = \cos\theta_n, \quad B^- = -\sin\theta_n, \quad (10b)$$

其中  $\theta_n$  由下式定义(见图1):

$$\tan 2\theta_n = \frac{g \sqrt{(n+1)(n+2)}}{\frac{\Delta}{2}} \quad (0 \leq 2\theta \leq \pi). \quad (11)$$

将(10a), (10b)式分别代入(3)式得到

$$|\phi_n^+\rangle = \sin\theta_n|n, a\rangle + \cos\theta_n|n+2, b\rangle, \quad (12a)$$

$$|\phi_n^-\rangle = \cos\theta_n|n, a\rangle - \sin\theta_n|n+2, b\rangle. \quad (12b)$$

这两个态称为双光子修饰态.

容易证明, 这两个态是正交归一的, 但它们是欠完备的, 因为没有包含基态 $|0, b\rangle$ . 引入

$$|\phi_g\rangle \equiv |0, b\rangle \quad (12c)$$

作为  $H_2$  的一个基矢, 它的本征方程为

$$H_2|\phi_g\rangle = E_g|\phi_g\rangle, \quad (13)$$

其中  $E_g = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0$ . 显然  $|\phi_g\rangle$  与  $|\phi_n^\pm\rangle$  都是正交的, 而且它们是完备的, 即

$$|\phi_n^+\rangle\langle\phi_n^+| + |\phi_n^-\rangle\langle\phi_n^-| + |\phi_g\rangle\langle\phi_g| = 1. \quad (14)$$

需要说明, (14)式没有涉及对  $n$  的求和, 这表示我们的处理是对于  $H_2$  的第  $n$  个子空间而言的.

现在我们考虑由二能级原子与单模场所组成的系统. 假定初始  $t=0$  时刻该系统处在  $H_2$  的第  $n$  个子空间内的任意态  $|\Phi_n(0)\rangle$ , 则可以用完备集  $\{|\phi_i^n\rangle\}$  (其中  $|\phi_i^n\rangle$  代表 (14)式中的任一个本征态) 将  $|\Phi_n(0)\rangle$  展开, 即用 (14)式左乘  $|\Phi_n(0)\rangle$  得到

$$|\Phi_n(0)\rangle = \alpha_n|\phi_n^+\rangle + \beta_n|\phi_n^-\rangle + \gamma_n|\phi_g\rangle \quad (15)$$

其中

$$\alpha_n = \langle\phi_n^+|\Phi_n(0)\rangle, \quad \beta_n = \langle\phi_n^-|\Phi_n(0)\rangle, \quad \gamma_n = \langle\phi_g|\Phi_n(0)\rangle \quad (16)$$

为展开系数, 它们满足归一化条件

$$|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 + |\gamma_n|^2 = 1. \quad (17)$$

由于  $H_2$  不含时间, 则任意  $t$  时刻系统的状态为

$$|\Phi_n(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_2t\right)|\Phi_n(0)\rangle. \quad (18)$$

将 (15)式代入 (18)式, 并利用  $H_2$  的本征方程 (5), 得到

$$|\Phi_n(t)\rangle = \alpha_n|\phi_n^+\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^+t} + \beta_n|\phi_n^-\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^-t} + \gamma_n|\phi_g\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_g t}. \quad (19)$$

现在我们计算光场的两个正交分量

$$x = a^+ + a, \quad (20a)$$

$$p = i(a^+ - a). \quad (20b)$$

在态  $|\Phi_n(t)\rangle$  中的方差

$$\langle\Delta x_n(t)\rangle^2 = \langle x_n^2(t)\rangle - \langle x_n(t)\rangle^2, \quad (21a)$$

$$\langle\Delta p_n(t)\rangle^2 = \langle p_n^2(t)\rangle - \langle p_n(t)\rangle^2. \quad (21b)$$

计算中发现: 对于任意的  $n$ ,  $\langle\Phi_n(t)|a|\Phi_n(t)\rangle$  及其复共轭均为零;  $\langle\Phi_n(t)|a^2|\Phi_n(t)\rangle$  及其复共轭仅在  $n=0$  时有非零值;  $\langle\Phi_n(t)|aa^+|\Phi_n(t)\rangle$  及其复共轭对于任意的  $n$  均不为零. 因此必须按  $n=0$ ,  $n>1$  两种情况写出方差的表达式, 即

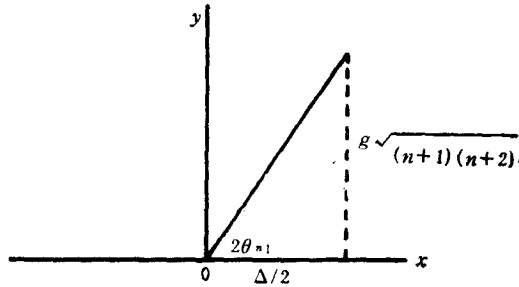


图 1  $\theta_n$  的定义图

$$\begin{aligned}
\left( \begin{array}{l} \langle \Delta x_0(t) \rangle^2 \\ \langle \Delta p_0(t) \rangle^2 \end{array} \right) &= |\gamma_0|^2 + |\alpha_0 \sin \theta_0 e^{-\frac{i}{\hbar} E_0^+ t} + \beta_0 \cos \theta_0 e^{-\frac{i}{\hbar} E_0^- t}|^2 \\
&+ 5 |\alpha_0 \cos \theta_0 e^{-\frac{i}{\hbar} E_0^+ t} - \beta_0 \sin \theta_0 e^{-\frac{i}{\hbar} E_0^- t}|^2 \\
&\pm \sqrt{2} [\gamma_0 e^{-\frac{i}{\hbar} E_0^+ t} (\alpha_0^* \cos \theta_0 e^{\frac{i}{\hbar} E_0^+ t} - \beta_0^* \sin \theta_0 e^{\frac{i}{\hbar} E_0^- t}) \\
&+ \text{c.c.}] \quad (n=0), \tag{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Delta x_n(t) \rangle^2 = \langle \Delta p_n(t) \rangle^2 &= (2n+1) |\alpha_n \sin \theta_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^+ t} + \beta_n \cos \theta_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^- t}|^2 \\
&+ (2n+5) |\alpha_n \cos \theta_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^+ t} - \beta_n \sin \theta_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^- t}|^2 \\
&+ |\gamma_n|^2 \quad (n > 0). \tag{23}
\end{aligned}$$

至此,得到了全部方差的一般的解析表达式.

### 三、初态压缩

现在考察  $H_t$  的压缩效应. (23) 式表明, 对于  $n > 0$  的任意态  $|\Phi_n(t)\rangle$ , 不存在压缩. 在态  $|\Phi_0(t)\rangle$  中是否有压缩? 我们先考察初态情况 ( $t=0$ ), 并假定展开系数  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  均为实数. 这时(22)式变为

$$\begin{aligned}
\left( \begin{array}{l} \langle \Delta x_0(0) \rangle^2 \\ \langle \Delta p_0(0) \rangle^2 \end{array} \right) &= \gamma_0^2 + (\alpha_0 \sin \theta_0 + \beta_0 \cos \theta_0)^2 + 5(\alpha_0 \cos \theta_0 - \beta_0 \sin \theta_0)^2 \\
&\pm 2\sqrt{2} \gamma_0 (\alpha_0 \cos \theta_0 - \beta_0 \sin \theta_0)^2. \tag{24}
\end{aligned}$$

由(24)式出发可以讨论这样的问题:  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$  取何值时, 方差最小. 为此, 对(24)式使用拉格朗日乘数法, 并注意到(17)式变为

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1, \tag{25}$$

可得到下面的方程组:

$$2 \cos \theta_0 \left( 2\alpha_0 \cos \theta_0 - 2\beta_0 \sin \theta_0 \pm \frac{\gamma_0}{\sqrt{2}} \right) + \lambda \alpha_0 = 0, \tag{26a}$$

$$-2 \sin \theta_0 \left( 2\alpha_0 \cos \theta_0 - 2\beta_0 \sin \theta_0 \pm \frac{\gamma_0}{\sqrt{2}} \right) + \lambda \beta_0 = 0, \tag{26b}$$

$$\pm \sqrt{2} \left( 2\alpha_0 \cos \theta_0 - 2\beta_0 \sin \theta_0 \pm \frac{\gamma_0}{\sqrt{2}} \right) + (2\lambda - 1) \gamma_0 = 0, \tag{26c}$$

其中  $\lambda$  为拉格朗日乘子. 将(26)与(25)式联立消去  $\lambda$  可得

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}} \cos \theta_0, & \alpha_0 &= -\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}} \cos \theta_0, \\
\beta_0 &= -\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}} \sin \theta_0, & \beta_0 &= \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}} \sin \theta_0, \\
\gamma_0 &= \mp \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{6}}; & \gamma_0 &= \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{6}}. \tag{27}
\end{aligned}$$

将(27)式的任一组值代入(24)式, 即得

$$\langle \Delta x_0(0) \rangle_m^2 = \langle \Delta p_0(0) \rangle_m^2 = 3 - \sqrt{6} \approx 0.55. \quad (28)$$

最佳方差小于 1, 这表示在态  $|\Phi_0(0)\rangle$  中确实有压缩存在. (27) 式是最佳压缩条件, 它与  $\theta_0$  有关; (28) 式是最佳压缩量, 它与  $\theta_0$  无关. 另外, 从上面的过程可以看出, 对  $x, p$  两个分量的压缩的讨论是类似的, 因此下面只考虑  $x$  分量的压缩.

#### 四、压缩的时间演化

现在考察初始时刻的最佳压缩态如何随时间演化. 仍考虑展开系数为实数的情况, 这时(22)式中的  $\langle \Delta x_0(t) \rangle^2$  约化为

$$\begin{aligned} \langle \Delta x_0(t) \rangle^2 = & 1 + 4(\alpha_0 \cos \theta_0 - \beta_0 \sin \theta_0)^2 + 8\alpha_0\beta_0 \sin 2\theta_0 \sin^2 Q_0 t \\ & + 2\sqrt{2} r_2 [\alpha_0 \cos \theta_0 \cos(\delta + Q_0)t - \beta_0 \sin \theta_0 \cos(\delta - Q_0)t], \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$\delta = \omega + \omega_0/2. \quad (30)$$

(29) 式的得到利用了(8), (9) 及(17)式. 将初态的最佳压缩条件(27)式代入(29)式得到最佳压缩量

$$\begin{aligned} \langle \Delta x_0(t) \rangle_m^2 = & 1 + \frac{2}{3} (3 - \sqrt{6}) (1 - \sin^2 2\theta_0 \sin^2 Q_0 t) \\ & - \frac{\sqrt{6}}{3} [\cos^2 \theta_0 \cos(\delta + Q_0)t + \sin^2 \theta_0 \cos(\delta - Q_0)t]. \end{aligned} \quad (31)$$

(31) 式显示了初态的最佳压缩随时间的演化. 显然当  $t = 0$  时, (31) 式给出(28)式最佳压缩量. 我们看到, 任意  $t$  时刻的最佳压缩量与  $\theta_0$  有关. 对于下面几个特例, (31) 式约化为简单的形式:

1.  $\theta_0 = \pi/4$  (共振)

$$f_1(t) = 1 + \frac{2}{3} (3 - \sqrt{6}) \cos^2 gt - \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \omega_0 t \cos gt. \quad (32a)$$

2.  $\theta_0 = 0$  (弱耦合, 正失谐)

$$f_2(t) = 1 + \frac{2}{3} (3 - \sqrt{6}) - \frac{\sqrt{6}}{3} \cos 2\omega t. \quad (32b)$$

3.  $\theta_0 = \pi/2$  (弱耦合, 负失谐)

$$f_3(t) = 1 + \frac{2}{3} (3 - \sqrt{6}) - \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \omega_0 t. \quad (32c)$$

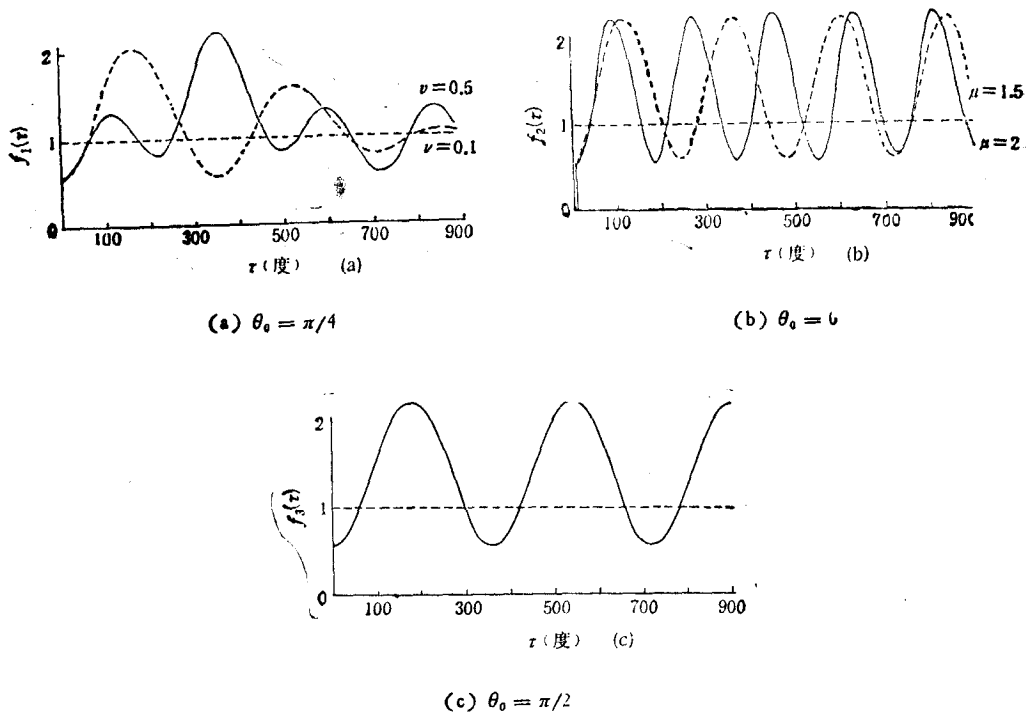
(32) 式中的  $f_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 分别代表上述三种情况下的最佳压缩量  $\langle \Delta x_0(t) \rangle_m^2$ . 弱耦合指  $g \approx 0$ ; 共振及正、负失谐分别指  $\Delta = 0, \Delta > 0, \Delta < 0$ . 引入无量纲参量

$$\tau = \omega_0 t, \quad (33a)$$

$$\mu = 2\omega/\omega_0, \quad (33b)$$

$$\nu = g/\omega_0. \quad (33c)$$

(32) 式可以改写为

图2 压缩的时间演化  $f_i(\tau) < 1$  表示压缩存在

$$f_1(\tau) = 1 + \frac{2}{3} (3 - \sqrt{6}) \cos^2 \nu\tau - \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \nu\tau \cos \tau, \quad (34a)$$

$$f_2(\tau) = 1 + \frac{2}{3} (3 - \sqrt{6}) - \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \mu\tau, \quad (34b)$$

$$f_3(\tau) = 1 + \frac{2}{3} (3 - \sqrt{6}) - \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \tau. \quad (34c)$$

由(34)式作出最佳压缩量随时间参量  $\tau$  变化的曲线(见图2)。可以看出, 压缩呈现周期性的振荡行为。在一个周期中, 压缩行为总比初态差。这同超辐射中的压缩是不同的<sup>[14]</sup>。

## 五、压缩对温度的依赖性

作为一个例子, 下面讨论裸原子系统的压缩, 并由此引入压缩对于温度的依赖性。对于初始处于热平衡分布的裸原子系统, 态矢量可以表为

$$|\Phi_0(0)\rangle = r_a|0, a\rangle + r_b|0, b\rangle, \quad (35)$$

其中  $r_a, r_b$  分别表示高、低能级的原子的注入速率<sup>[13]</sup>。它们服从下面的玻耳兹曼分布:

$$r_a/r_b = \exp(-\hbar\omega_0/kT), \quad (36)$$

其中  $T$  是系统的绝对温度,  $k$  是玻耳兹曼常数。将(35)式用  $H_0$  在第 0 个子空间的完备集  $\{|\phi_n^0\rangle\}$  展开, 即用  $n=0$  的(14)式左乘(35)式两边, 并利用  $n=0$  的(12)式可以得到

$$|\Phi_0(0)\rangle = r_a \sin \theta_0 |\phi_0^+\rangle + r_a \cos \theta_0 |\phi_0^-\rangle + r_b |\phi_g\rangle. \quad (37)$$

用  $H_2$  的时间演化算子  $\exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_2 t\right)$  作用(37)式等号两边, 得到任意  $t$  时刻的态矢量

$$|\Phi_0(t)\rangle = r_a \sin \theta_0 |\phi_0^+\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_0^+ t} + r_a \cos \theta_0 |\phi_0^-\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_0^- t} + r_b |\phi_g\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_g t}. \quad (38)$$

(38)式与  $n=0$  的(19)式比较, 可见

$$\alpha_0 = r_a \sin \theta_0, \quad (39a)$$

$$\beta_0 = r_a \cos \theta_0, \quad (39b)$$

$$\gamma_0 = r_b. \quad (39c)$$

将(39)式代入场方差的一般表达式(29)得到

$$\langle \Delta x_0(t) \rangle^2 = 1 + (2r_a \sin 2\theta_0 \cdot \sin Q_0 t)^2 - 2\sqrt{2} r_a r_b \sin 2\theta_0 \cdot \sin \delta t \cdot \sin Q_0 t. \quad (40)$$

此式显示了压缩对于时间  $t$ 、温度  $T$ 、失谐量  $\Delta$ 、耦合劲度  $g$  的依赖性。压缩条件  $\langle \Delta x_0(t) \rangle^2 < 1$  可以具体化为

$$r_a/r_b < \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \delta t}{\sin 2\theta_0 \cdot \sin Q_0 t}. \quad (41)$$

注意到(36)式中的玻耳兹曼因子  $\exp(-\hbar\omega_0/kT)$  要小于 1, (41)式实际上应表示为

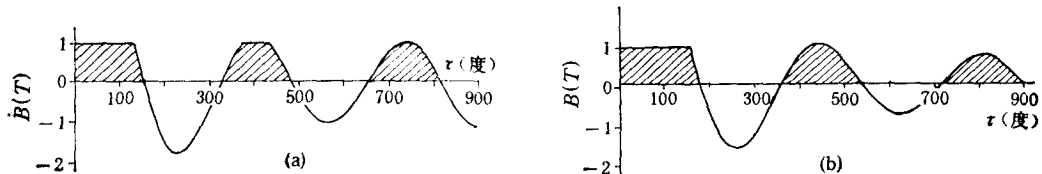
$$\exp(-\hbar\omega_0/kT) < \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \delta t}{\sin 2\theta_0 \cdot \sin Q_0 t} < 1. \quad (42)$$

(42)式就是压缩条件的解析形式。为了便于数值计算, 考虑下面几个特殊情况下的(42)式:

1.  $\theta_0 = \pi/2$  (共振)

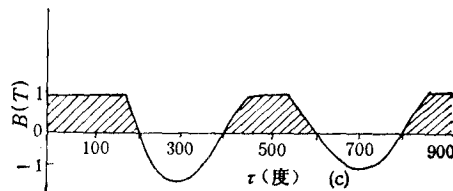
$$\exp(-\hbar\omega_0/kT) < \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \tau}{\sin \nu \tau} < 1. \quad (43a)$$

2.  $\Delta = g$  (正失谐)



(a)  $\Delta = 0$

(b)  $\Delta = g$



(c)  $\Delta = -g$

图3 压缩对温度的依赖 阴影区表示压缩存在, 参数  $\nu = 0.1$

$$\exp(-\hbar\omega_0/kT) < \frac{\sin(1+\nu)\tau}{\sin(\sqrt{2\nu}\tau)} < 1. \quad (43b)$$

3.  $\Delta = -g$  (负失谐)

$$\exp(-\hbar\omega_0/kT) < \frac{\sin(1-\nu)\tau}{\sin(\sqrt{2\nu}\tau)} < 1. \quad (43c)$$

(43)式中的  $\tau, \nu$  仍由(33)式定义. 由(43)式作出玻耳兹曼因子与时间参量  $\tau$  的关系曲线(如图3所示). 纵轴  $B(T)$  代表玻耳兹曼因子, 参数  $\nu = 0.1$ , 阴影区内表示压缩存在. 阴影区间断出现, 这说明并非在任意时刻, 任意温度下, 均有压缩出现.

## 六、结 束 语

作为本文的结束, 需要谈及文献[5]的处理. 不久前 Compagno 等人研究了与本文的  $H_2$  类似的哈密顿量(他们称为双光子 Dicke 哈密顿量)的压缩. 但是他们所给出的场方差的一般表达式, 只是本文的(22)式在  $\alpha_0 = 0, \nu = 0$  情况下的特例. 事实上在本文的(24)式中令  $\alpha_0 = 0$ , 再使用拉格朗日乘法, 并与约化的归一化条件  $\beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1$  联立, 即得到文献[5]的主要结果

$$\langle \Delta x_0(0)_{\beta_0} \rangle_m^2 = 2 - \cos 2\theta_0 - \sqrt{(1 - \cos 2\theta_0)(2 - \cos 2\theta_0)}. \quad (44)$$

类似地, 在(24)式中令  $\beta_0 = 0$ , 再使用拉格朗日乘法, 并与约化的归一化条件  $\alpha_0^2 + \gamma_0^2 = 1$  联立, 还可以得到另一个特殊的结果

$$\langle \Delta x_0(0)_{\alpha_0} \rangle_m^2 = 2 + \cos 2\theta_0 - \sqrt{(1 + \cos 2\theta_0)(2 + \cos 2\theta_0)}. \quad (45)$$

显然, 文献[5]的处理实际上只是考虑了  $H_2$  的第 0 个子空间的两个基矢  $|\phi_0^>$ ,  $|\phi_0^<$ , 没有引入基矢  $|\phi_0^>$ , 不能构成完备集, 因此不能讨论任意初态的压缩, 更不能论及由此引起的其他问题. 本文利用  $H_2$  在第 0 个子空间的完备集  $\{|\phi_0^i>\}$  得到了普遍情况下的场方差表达式, 因而可以讨论任意初态的压缩及其时间演化, 并可以针对物理上最常见的初态自然地引出压缩的温度依赖性. 相比之下, 本文的处理更一般, 与实际的物理过程更接近.

最后应该指出上述压缩的物理图象. 如上所述, 压缩只出现在光子数  $n = 0$  的过程. 众所周知,  $n = 0$  对应自发辐射,  $n > 0$  对应受激辐射. 我们的结论意味着, 对于二能级原子的双光子辐射来说, 在自发的双光子辐射中可以出现压缩, 在受激的双光子辐射中不能出现压缩. 这恰好从一个新的角度证明了人们熟知的结论: 双光子激光不存在压缩<sup>[15,16]</sup>.

曾与 L. Mandel, K. Rubin 两位教授做过多次有益的讨论, 作者在此致谢.

## 参 考 文 献

- [1] D. F. Walls, *Nature*, **306**(1983), 141.
- [2] H. J. Carmichael, *J. Phys. A*, **17**(1984), 469.
- [3] M. Walinsky, *Opt. Comm.*, **55**(1985), 138.

- [ 4 ] H. P. Yuen *et al.*, *Opt. Comm.*, **59**(1986), 155.
- [ 5 ] G. Compagno *et al.*, *Opt. Comm.*, **57**(1986), 415.
- [ 6 ] E. T. Jaynes *et al.*, *Proc. IEEE*, **51**(1963), 89.
- [ 7 ] R. Graham *et al.*, *Phys. Lett.*, **A101**(1984), 61.
- [ 8 ] L. Allen *et al.*, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, John Wiley, New York, (1975), p. 174.
- [ 9 ] 顾 樵, *中国激光*, **13**(1986), 739.
- [10] Q. Gu, *Bulletin of the APS*, **30**(1985), 1830; 顾 樵, *中国激光*, **14**(1987), 589.
- [11] 顾 樵, *中国激光*, 待发表.
- [12] 顾 樵, *量子电子学*, **4**(1987), 107.
- [13] M. Sargent III *et al.*, *激光物理学*, 科学出版社(1982), 307 页
- [14] Q. Gu, IQEC' 87, *Advance Program*, p. 72; 顾 樵, *中国激光*, **15**(1988), 173.
- [15] M. D. Reid *et al.*, *Phys. Rev.*, **A28** (1983), 332.
- [16] L. A. Lugiato *et al.*, *Opt. Comm.*, **41**(1982), 374.

## SQUEEZING IN A TWO-PHOTON JAYNES-CUMMINGS MODEL

GU QIAO

(Department of Physics, Northwest University, Xian)

### ABSTRACT

The quantum statistical properties of two-photon radiation from two-level atomic system are investigated by using complete set in the  $n$ th subspace of generalized Jaynes-Cummings hamiltonian, and the general expression for field variance is obtained. The conditions for optimum squeezing as well as the optimum squeezed quantity are found out for an arbitrary initial state, and the time evolution of the optimum squeezed state is then analysed. As an example, the squeezing in an initial state with bare atomic system in thermal equilibrium is discussed, which demonstrates the dependence of squeezing on several parameters, such as, temperature, detuning, coupling strength. The conditions for squeezing are given analytically and numerically. Finally, the physical picture of the squeezing is pointed out.