

非线性有限束光声效应理论*

杜 功 焕

(南京大学声学研究所)

1987 年 4 月 27 日收到

提 要

当一束受正弦调制的激光入射于光声腔中的固体样品上时,由于非线性的光声效应,在光声腔中不仅能接收到基频成份的声信号,还能接收到其二次谐波成份.本文提出一个非线性热波束方程及其相应的非线性边界条件.借助于逐步近似法在光源为高斯径向分布的情形下,求解这一方程.利用 Hankel 变换获得这一方程的一级与二级近似解.

解析结果表明,二次谐波的热波束仍然维持高斯径向分布,而其高斯半径比基频成份小.分析还表明,二次谐波的振幅不仅与线性热参数,而且与非线性热参数有关.后者或许能提供样品的更多的有意义的信息.

综合其各种特点,可以预期将能研究出一种新的非线性光声技术.

一、引 言

光声效应的研究发展很快,并已广泛应用于固体样品亚表面层的成像技术与无损检测^[1-3].但迄今为止,除了文献[4]最近报道的非线性光热成像的实验工作外,光声效应的大量研究还只限于线性的理论模型^[5],即认为样品中的热扩散率是一与温度无关的常数,而实际上这只是在温度变化幅度不大时才是正确的.由于在实际的光声效应的研究和应用中所采用的激光源功率并不低,因此由热扩散率随温度变化而导致的非线性光声现象是不容忽视的.本文就有限束的光声效应中的一些非线性现象与特性作些理论探讨.

二、样品中非线性热扩散方程及其行波解

光声效应的一般原理可用图 1 表示.一束受正弦调制的光束经过小的气腔入射于—对光不透明的样品上.光在其表面被吸收而转化为热波,并在样品中传播.样品中的二维热扩散方程如下:

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$ 为用柱坐标时的拉普拉斯算符. (1) 式中 $\alpha_s = \frac{\kappa_s}{\rho_s c_s}$ 为

* 国家自然科学基金资助的课题.

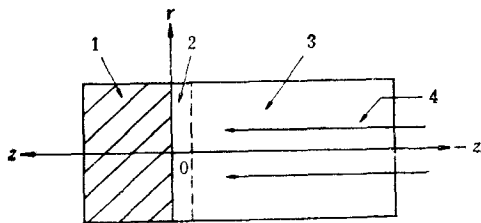


图 1

1 为样品; 2 为边界层; 3 为气腔; 4 为光束

样品的热扩散率, κ_s , ρ_s 与 c_s 分别为样品的热导率、密度与比热. 一般, 这一热扩散率并非为常数而是温度的函数, 且可表示为 $\alpha_s = \alpha_{s0}(1 + \Delta\alpha_s T)$, 其中 α_{s0} 即为通常的线性热扩散率, 而 $\Delta\alpha_s$ 可称为非线性热扩散率比. 将此式代入 (1) 式, 就可得一非线性热扩散方程

$$\frac{1}{\alpha_{s0}} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \nabla_{\perp}^2 T = \frac{\Delta\alpha_s}{\alpha_{s0}} T \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2)$$

其中 $\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$ 代表一径向的拉普拉斯算符. 假定有一束经过角频率 ω 调制的

单色光入射于样品表面, 其光强可表示为 $I = \frac{1}{2} I_0(r)(1 + \cos \omega t)$, 其中 $I_0(r)$ 表示光强沿径向有一分布. 对于激光入射, 认为这一径向分布遵循高斯函数是合理的, 即可表示为 $I_0(r) = I_0 \exp(-r^2/a^2)$. 这里 I_0 是代表光点中心处的光强度, 而 a 称为高斯半径, 可以用它来描述射在样品表面处的光点大小. 设 β 为样品对光的吸收系数, 假定在样品表面入射光被全部吸收 (对于一种不透明样品是可以这样认为的), 因而在表面处 $z = 0$ 产生的热源密度可表示为 $Q(z) = \frac{1}{2} \beta I_0(r)(1 + \cos \omega t)$, 或表示为 $\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\beta}{2\kappa_s} \times I_0(r)(1 + \cos \omega t)$. 考虑到热扩散率的非线性并且我们只对时间 t 有关的成份感兴趣, 则方程 (2) 的边界条件便可表示为

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\beta I_0(r)}{2\kappa_{s0}} (1 - \Delta\alpha_s T) \cos(\omega t). \quad (3)$$

为了解方程 (2), 逐步近似法是一合理的选择. 设解具有如下形式:

$$T = T_1 + T_2 + \dots, \quad (4)$$

其中 T_1 与 T_2 分别代表第一级与第二级近似解. 将 (4) 式代入方程 (2), 可以分别得到描述一级近似与二级近似解的两个方程如下:

$$\frac{1}{\alpha_{s0}} \frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - \nabla_{\perp}^2 T_1 = 0 \quad (5a)$$

与

$$\frac{1}{\alpha_{s0}} \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - \nabla_{\perp}^2 T_2 = \frac{\Delta\alpha_s}{\alpha_{s0}} T_1 \frac{\partial T_1}{\partial t}. \quad (5b)$$

同它们对应的边界条件可分别表示为

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\beta I_0(r)}{2\kappa_{s0}} \exp(j\omega t) \quad (6a)$$

与

$$\left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=0} = - \frac{\beta I_0(r)}{2\kappa_{s0}} \Delta\alpha_s T_1 \exp(j\omega t). \quad (6b)$$

为简单起见, 我们假定样品不是非常薄, 即样品的热扩散长度远小于其厚度. 对一般固体样品, 当调制角频率在千赫到兆赫范围内, 其热扩散长度处于百微米到微米量级. 这条件一般是容易满足的. 因此, 可以认为在样品表面处产生的热波不能波及到样品的另一端, 即可以认为在样品中仅有热行波的传播.

可以知道, 对于热波与时间有关的部份的解具有简谐形式, 即 $T_i \sim \exp(j\omega_i t)$. 这里下标 $i = 1, 2$, 而 $\omega_1 = \omega$ 与 $\omega_2 = 2\omega$. 如果再引入如下符号: $c_{si} = \bar{c}_{si}/(1-i)$, 而 $\bar{c}_{si} = \sqrt{2\alpha_{s0}\omega_i}$ 是与 ω_i 对应的热波传播速度, 则 (5a) 与 (5b) 式可分别化为

$$\frac{1}{c_{s1}^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - \nabla_{\perp}^2 T_1 = 0 \quad (7a)$$

与

$$\frac{1}{c_{s2}^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - \nabla_{\perp}^2 T_2 = \frac{\Delta\alpha_s}{\alpha_{s0}} T_1 \frac{\partial T_1}{\partial t}. \quad (7b)$$

(7a) 与 (7b) 式具有一般波动方程的形式.

现在引入一些新的无量纲变量, 并对上面方程进行座标变换. 设 $\xi = r/a$, $\tau_{si} = \omega_i \left(t - \frac{z}{c_{si}} \right)$ 以及 $\sigma_{si} = \eta_{si} z$, 其中 τ_{si} 代表一推迟时间, 而 $\eta_{si} = \frac{-2c_{si}}{\omega_i a^2}$. 作座标变换, $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial t} = \omega_i \frac{\partial}{\partial \tau_{si}}$ 以及 $\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\omega_i}{c_{si}} \frac{\partial}{\partial \tau_{si}} + \eta_{si} \frac{\partial}{\partial \sigma_{si}}$, 并将这些变换代入 (7a) 与 (7b) 式, 便可得到以无量纲变量形式表示的热波方程. 即为

$$4 \frac{\partial^2 T_1}{\partial \tau_{s1} \partial \sigma_{s1}} + \nabla_{\perp}^2 T_1 + \left(\frac{4}{k_{s1}^2 a^2} \right) \frac{\partial^2 T_1}{\partial \sigma_{s1}^2} = 0 \quad (8a)$$

与

$$4 \frac{\partial^2 T_2}{\partial \tau_{s2} \partial \sigma_{s2}} + \nabla_{\perp}^2 T_2 + \left(\frac{4}{k_{s2}^2 a^2} \right) \frac{\partial^2 T_2}{\partial \sigma_{s2}^2} = \frac{\Delta\alpha_s c_{s2}}{\alpha_{s0} \eta_{s2}} T_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau_{s1}}. \quad (8b)$$

这里 $k_{si} = \frac{\omega_i}{c_{si}}$.

先对方程 (8a) 求解. 设 $T_1 = \bar{T}_1(\xi, \sigma_{s1}) \exp(j\tau_{s1})$, (8a) 式变为

$$4j \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \sigma_{s1}} + \nabla_{\perp}^2 \bar{T}_1 + \left(\frac{4}{k_{s1}^2 a^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial \sigma_{s1}^2} = 0. \quad (9)$$

对该方程进行 Hankel 变换, 并利用边界条件 (6a) 式, 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial z} = & - \exp(j\tau_{s1}) \int_0^\infty \frac{\beta}{2\kappa_{s0}} I_0(\xi') \xi' d\xi' \int_0^\infty \\ & \cdot \exp \left\{ j \frac{k_{s1}^2 a^2}{2} \left[1 - \left(1 + \frac{s^2}{k_{s1}^2 a^2} \right)^{1/2} \right] \sigma_{s1} \right\} J_0(\xi' s) J_0(\xi s) s ds, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 J_0 代表零阶贝塞耳函数. 显然从 (10) 式是难以解析求解的. 如果我们进一步假设 $|k_{s1} a| \gg 1$, 这个条件一般不难满足. 例如当角频率 ω 大于千赫以上时, k_{s1} 绝对值一般可处在 10^6m^{-1} 以上. 在这种称为抛物线近似条件下 (10) 式可简化为

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{-\beta}{\kappa_{s0}\sigma_{s1}j} \exp \left[j\omega_1 \left(t - \frac{z}{c_{s1}} \right) \right] \int_0^\infty I_0(\xi') \cdot \exp \left(j \frac{\xi^2 + \xi'^2}{\sigma_{s1}} \right) J_0 \left(\frac{2\xi\xi'}{\sigma_{s1}} \right) \xi' d\xi'. \quad (11)$$

如将 $I_0(\xi') = I_0 \exp(-\xi'^2)$ 关系代入, 则 (11) 式可积得

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial z} = & \left(-\frac{\beta I_0}{2\kappa_{s0}} \right) \frac{\sqrt{(2 + \bar{\sigma}_{s1})^2 + \bar{\sigma}_{s1}^2}}{1 + (1 + \bar{\sigma}_{s1})^2} \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha_{s0}}} z \right) \\ & \cdot \exp \left[-\frac{(2 + \bar{\sigma}_{s1})}{1 + (1 + \bar{\sigma}_{s1})^2} \xi^2 \right] \exp \left[j \left(\omega t - \frac{\omega}{c_{s1}} z \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\bar{\sigma}_{s1}}{1 + (1 + \bar{\sigma}_{s1})^2} \xi^2 + \tan^{-1} \left(\frac{\bar{\sigma}_{s1}}{2 + \bar{\sigma}_{s1}} \right) - \frac{\pi}{4} \right) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\bar{\sigma}_{s1} = z / \left(\frac{\omega a^2}{2c_{s1}} \right)$. 显然, 假如我们感兴趣的仅是离表面很近处, 或亚表面范围的热波, 则可以假定 $\bar{\sigma}_{s1} \ll 1$, 于是 (12) 式可取近似以致求得如下解析形式的行波解:

$$\begin{aligned} T_1 = & -\frac{\beta I_0}{2\kappa_{s0}} \sqrt{\frac{\alpha_{s0}}{\omega}} \exp(-\xi^2) \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha_{s0}}} z \right) \\ & \cdot \exp \left[j \left(\omega t - \frac{\omega}{c_{s1}} z - \pi/4 \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

从 (13) 式可清楚看到, 此时热波的幅度仍然维持径向的高斯分布. 此时, 就与无限扩张的平面热波的结果一样. 假定热波束的高斯半径 a 趋于无限, 则 (13) 式就可简化到一维平面热行波的结果^[6]. 现在把基频成份的热波解 (13) 式代入 (8b) 式, 在抛物线近似下得到描述二级近似解的热行波方程如下:

$$-4 \frac{\partial^2 T_2}{\partial \tau_{s2} \partial \sigma_{s2}} - \nabla_{\perp}^2 T_2 = F(\xi, \sigma_{s2}), \quad (14)$$

其中

$$F(\xi, \sigma_{s2}) = F_0 \exp(-2\xi^2) \exp \left[(1 - \sqrt{2}) \frac{\omega}{\mu_{s2} c_{s2}} \sigma_{s2} \right], \quad F_0 = \frac{\beta^2 I_0^2}{8\kappa_{s0}^2} \Delta \alpha_s a^2.$$

根据 (6b) 式, 其相应的边界条件可写成

$$\left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\beta^2 I_0^2}{8\kappa_{s0}^2} \Delta \alpha_s \sqrt{\frac{\alpha_{s0}}{\omega}} \exp(-2\xi^2) \exp \left[2j \left(\omega t - \frac{\pi}{8} \right) \right]. \quad (15)$$

从以上二式可以看到, 实际上产生二次谐波成份的源不仅来自方程 (14) 等号右边的源项, 这源项将在热波的传播过程中起作用, 而且还来自边界条件 (15) 式, 即来自边界表面本身的光热非线性转换. 后者相当于在界面处会伴随基频热波源而滋生出二次谐波的热波源 (光的调制认为是严格简谐的).

求解方程可得

$$T_2 = T_{21} + T_{22}, \quad (16)$$

其中

$$T_{21} = j \sqrt{2} \left(\frac{\beta^2 I_0^2}{16\kappa_{s0}^2} \right) \frac{\Delta \alpha_s \alpha_{s0}}{\omega} \exp[-2(1-j)\xi^2] \exp(j\tau_{s2}) \quad (17)$$

与

$$T_{s2} = \frac{1}{2} \exp(i\tau_{s2}) \int_0^{\sigma_{s2}} d\sigma'_{s2} \int_0^\infty \frac{F(\xi', \sigma'_{s2})}{\sigma_{s2} - \sigma'_{s2}} \times \exp\left(j \frac{\xi' + \xi'^2}{\sigma_{s2} - \sigma'_{s2}}\right) J_0\left(\frac{2\xi\xi'}{\sigma_{s2} - \sigma'_{s2}}\right) \xi' d\xi'. \quad (18)$$

把(14)式中的 F 代入, (18) 式便可积出, 于是二次谐波解就可最后求得为

$$T_s = \frac{1}{16} \left(\frac{\beta^2 I_0}{\kappa_{s0} \omega} \Delta\alpha_s \alpha_{s0} \right) \exp(-2\xi^2) \left[\sqrt{2} \exp(2\xi^2 j) - \frac{(1+j)}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\alpha_{s0}}} z \right] \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{\alpha_{s0}}} z\right) \exp\left[2\omega j \left(t - \frac{z}{c_{s2}}\right)\right]. \quad (19)$$

从(19)式可以看出, 由于非线性效应引起的二次谐波束成份仍然遵循径向高斯分布, 并且其高斯半径是基频成份的 $\sqrt{2}$ 分之一. 这表明, 二次谐波的波束宽度比基频成份小 $\sqrt{2}$ 倍, 即波束变窄了. 此外, 二次谐波的幅度与入射光强 I_0 的平方成正比, 并且除了与样品的线性热扩散率 α_{s0} 有关外, 还与其非线性热扩散率比 $\Delta\alpha_s$ 有关. 这些热波束的非线性特性将对光声效应的实际应用提供一有意义的信息.

三、光声腔中的热波与声场的二次谐波

由于样品表面的影响, 在充气的光声腔中也产生热波. 如果忽略气腔自身产生的非线性, 而认为气腔中的热波的二次谐波成份主要来自样品的非线性, 那么就可以写出在抛物线近似下的热波方程 $-4 \frac{\partial^2 T_{gi}}{\partial \tau_{gi} \partial \sigma_{gi}} - \nabla_{\perp}^2 T_{gi} = 0$ 以及其对应的边界条件 $T_{gi} = T_i$ (当 $z = 0$ 时). 这里下标 g 表示物理量是属于气体的. 求解这些方程可以获得气腔中的基频与二次谐波热波解. 由于我们主要是研究其二次谐波成份, 为了节省篇幅, 这里仅给出其二次谐波解为

$$T_{g2} = \frac{\sqrt{2}}{8} \Delta\alpha_s \alpha_{s0} \left(\frac{\beta^2 I_0}{\kappa_{s0} \omega} \right) \frac{\sqrt{\bar{\sigma}_{g2}^2 + (1 + \bar{\sigma}_{g2})^2}}{1 + (1 + \bar{\sigma}_{g2})^2} \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{\alpha_{g0}}} z\right) \exp\left[-\frac{4(1 + \bar{\sigma}_{g2})}{1 + (1 + 2\bar{\sigma}_{g2})^2} \xi^2\right] \exp\left[j\left(2\omega t - \frac{2\omega}{c_{g2}} z + \frac{4(1 + \bar{\sigma}_{g2})}{1 + (1 + 2\bar{\sigma}_{g2})^2} \xi^2 + \tan^{-1}\left(\frac{\bar{\sigma}_{g2}}{1 + \bar{\sigma}_{g2}}\right)\right)\right]. \quad (20)$$

与一维平面热波处理类似^[9], 可以估计在气腔中对于二次谐波, 热波只能在一厚度为 $2\pi\mu_{g2}$ 的薄层中起作用. 这里 $\mu_{g2} = \sqrt{\frac{\alpha_{g0}}{\omega}}$ 为二次谐波的热扩散长度. 对这一薄层的温度取空间平均, 并认为热波束的能量主要集中于高斯半径内, 而同时将径向坐标的积分上限取为无限以作近似这样可求得热波空间平均为

$$\bar{T}_{g2}(t) = \int_0^{2\pi\mu_{g2}} \frac{dz}{2\pi\mu_{g2}} \int_0^\infty T_{g2} \frac{2\pi r}{\pi a^2} dr = \phi_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2} \exp[j(\omega_2 t + \theta_2)]. \quad (21)$$

而式中

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \frac{\Delta\alpha_s\alpha_{s0}}{32\pi\mu_{g2}} \left(\frac{\beta^2 I_0^2}{\kappa_{s0}^2 \omega} \right), \\ \theta_2 &= \tan^{-1} \left(\frac{\bar{B}_2}{\bar{A}_2} \right), \\ \bar{A}_2 &= \int_0^{2\pi\mu_{g2}} f(z) \cos(g(z)) dz, \\ \bar{B}_2 &= \int_0^{2\pi\mu_{g2}} f(z) \sin(g(z)) dz,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{[1 + (1 + 2\bar{\sigma}_{g2})^2] \sqrt{(1 + \bar{\sigma}_{g2})^2 + \bar{\sigma}_{g2}^2}}{(1 + \bar{\sigma}_{g2}) [1 + (1 + \bar{\sigma}_{g2})^2]} \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{\alpha_{g0}}} z \right), \\ g(z) &= -\frac{2\omega}{c_{g2}} z + \tan^{-1} \left(\frac{1 + \bar{\sigma}_{g2}}{\bar{\sigma}_{g2}} \right) + \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

因为这一气体薄层经受周期性加热,从而产生周期性的膨胀与收缩,对气腔的其余部分起到一平均活塞源的作用. 如果认为这种膨胀与收缩的过程是绝热的,则从绝热理想气体定律可以求得气腔中的压强变化为

$$p_2 = p_{2A} \exp [i(\omega_2 t + \theta_2)].$$

而 $p_{2A} = \frac{2\pi\gamma P_0}{l_g T_0} \phi_{20}$, 其中 l_g 为气腔的深度, P_0 与 T_0 为气腔中的平均大气压强与温度, γ 为气体的比热比,而

$$\phi_{20} = \frac{\Delta\alpha_s\alpha_{s0}}{32\pi} \left(\frac{\beta^2 I_0^2}{\kappa_{s0}^2 \omega} \right) \sqrt{\bar{A}_2^2 + \bar{B}_2^2}.$$

四、结 论

一束调制的强激光通过气腔入射于待测固体样品表面时,由于光热的非线性在样品中除产生基频热波外,还会激发出其二次谐波成份.从而在气腔中接收到相应的声压.二次谐波声压的幅值与入射光强的平方成正比.此外,它不仅与样品的线性热学参数有关,还同其非线性热学参数有关.从后者或许还可以得到一些从线性热学参数那里得不到的关于材料的信息.这里还应提出的是,因为进入样品的二次谐波成份的波束要比基频窄,所以它对样品的检测具有更高的横向分辨率.此外,由于接收的是二次谐波而不是基频成份,因此气腔中原始的调制光束引起的背景基频光声信号也相对地被抑制,这对于提高光声检测信噪比或成像的对比度也是有利的.虽然二次谐波的光声信号总会比基频弱,但可以采取一些电子技术予以补偿.综合上述各点,显然利用非线性光声效应来进行成像或检测将显示出若干独特优点.非线性光声效应的研究和应用尚需进一步开展.我们正在进行这方面的实验.

本工作得到魏荣爵教授的鼓励和指导,张淑仪教授曾予以讨论并帮助.此外,当作者在美国田纳西大学物理系工作期间, M. A. Breazcale 教授曾对本课题予以启示.在此一并表示感谢.

参 考 文 献

- [1] A. Rosencweig, *Photoacoustics and Photoacoustic Spectroscopy*, John Wiley & Sons, (1980), 中译本光声学和光声谱学, 王耀俊等译, 科学出版社, (1986).
- [2] A. C. Tam, *Photoacoustics: Spectroscopy and Other Applications*, in *Ultrasensitive Laser Spectroscopy*, Academic Press Inc. (1983).
- [3] 张淑仪等, *物理学报*, **31**(1982), 704.
- [4] Y. N. Rajakarunayaka and H. K. Wickramasinghe, *Appl. Phys. Lett.*, **48**(1986), 218.
- [5] A. Rosencwaig and A. Gersho, *J. Appl. Phys.*, **47**(1976), 64.
- [6] Chen Li, Zhang Shu-yi and Wei Lan-hua, *Proceedings of International Workshop on Acoustic Nondestructive Evaluation*, November 4—10, (1985), D-1, Nanjing University.

NONLINEAR THEORY OF PHOTOACOUSTIC EFFECT OF RESTRICTED BEAM

DU GONG-HUAN

(*Institute of Acoustics, Nanjing University*)

ABSTRACT

When a chopped light impinges on a solid sample in an photoacoustic cell, an acoustic signal is produced not only with the fundamental but also with the second harmonic component because of the nonlinear photoacoustic effect. An equation of nonlinear thermal wave beam is presented with nonlinear boundary conditions and solved by using the perturbation approach method under the case that the light source has a Gaussian profile. The Hankel transformation is utilized to attain the first and second order approximation solutions of the equation.

The analytic results show that the thermal wave beam of second harmonic still maintains the Gaussian profile with a smaller Gaussian radius than that of the fundamental component and also the amplitude of the second harmonic relates with not only the linear but also the nonlinear thermal parameters which might be expected to provide more information from the sample than the linear one.

Basing on these results, a new nonlinear photoacoustic technique would be expected to develop.