

可逆保面积映象同周期分歧的解析研究

汪 秉 宏¹⁾

(应用物理及计算数学研究所)

1987 年 1 月 8 日收到

提 要

从可逆保面积映象偶周期轨道线性 Jacobi 矩阵的一般结构, 讨论了对称周期轨道的两种分歧行为. 给出可逆保面积映象的同周期分歧条件及区分三种同周期分歧类型的解析判据. 以 De Vogelaere 映象的实例说明了解析方法的应用.

一、引 言

不可积哈密顿体系的动力学性质可以通过研究其周期轨道的分歧行为得到^[1,2]. 当表征不可积扰动的参数增长而使周期轨道失稳时, 可以分岔出一条二倍其周期轨道的稳定轨道, 这是人们熟知的倍周期分歧方式^[3,4]. 倍周期分歧序列具有普适的渐近标度行为, 哈密顿体系可以通过倍周期分歧从有序运动发展为相空间中大规模的混沌^[2,4,5].

但是倍周期分歧并不是周期轨道失稳时的唯一分歧方式. 倍周期分歧点相应于周期轨道的线性 Jacobi 矩阵的本征值为 -1 . 当本征值为 1 , 则将发生同周期分歧, 这完全是有可能的^[6]. 周期 n 轨道的同周期分歧共有三种类型:

A 型: 周期 n 轨道在失稳侧分岔出两条新的椭圆型周期 n 轨道.

B 型: 周期 n 轨道的失稳是由于在稳定侧吸收两条双曲型周期 n 轨道.

C 型: 椭圆型周期 n 轨道与双曲型周期 n 轨道在分歧点发生“碰撞”, 然后交换稳定性.

对于哈密顿体系或保面积映象, 同周期分歧的上述三种类型显然都与不动点指数的守恒原则相符^[4].

同周期分歧也是哈密顿体系中常见的分歧现象. 例如文献[7]研究了驻波场中的粒子和保守 Duffing 振子这两个哈密顿体系, 它们的分歧树图及 Poincaré 截面上的映射流向图显示了周期 1、周期 2 及周期 8 等轨道的 A 型同周期分歧. Chirikov-Taylor 标准映象^[8]是一个具有丰富同周期分歧现象的可逆保面积映象. 最近王光瑞等人对标准映象的若干偶周期轨道的同周期分歧作了数值计算^[8]. 同周期分歧也并不仅仅局限于哈密顿体系. 耗散系中也存在着广泛的同周期分歧(或称劈裂). 例如耗散标准映象的周期 2 吸引子存在 A 型同周期分歧^[9]. 受驱阻尼摆方程这一类耗散系通向混沌的倍周期分歧树

1) 永久通讯地址: 中国科学技术大学近代物理系, 合肥.

是以周期 1 吸引子的劈裂为先导的^[10]. 耗散系的同周期分歧可以在非线性电路的实验中观测到^[11]. 由此可见, 同周期分歧现象是很普遍的.

本文将研究: 哪一类哈密顿体系将会发生某一周期轨道的同周期分歧? 所产生的同周期分歧属于何种类型? 具有空间反射和时间反演对称性的自由度为 2 的自治哈密顿体系或自由度为 1 的含时哈密顿体系都可用 Poincaré 截面上的可逆保面积映象来描写. De Vogelaere 映象(以下简称 DV 映象)

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= -y_n + f(x_n, \lambda), \\y_{n+1} &= x_n - f(x_{n+1}, \lambda)\end{aligned}\quad (1)$$

是一类代表性很广的可逆保面积映象, 其中 λ 是表征不可积性的参数, x 轴是它的主对称线^[12]. 那么可以问: 什么样的函数 $f(x, \lambda)$ 所生成的 DV 映象将产生周期 n 轨道的同周期分歧? 如何用解析方法判别它们的分歧类型?

二、可逆保面积映象的两种分歧行为

定理: 设 T 是以 x 轴为主对称线的可逆保面积映象, 它有以 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ 为初始点的周期 $2k$ 轨道, 则映象 T 关于这一轨道的线性 Jacobi 矩阵具有如下的结构:

$$L^{(2k)}(\mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{r}_{2k}}{\partial \mathbf{r}_0} = \frac{\partial (x_{2k}, y_{2k})}{\partial (x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} 1 + 2L_{12}^{(k)}L_{11}^{(k)} & 2L_{12}^{(k)}L_{22}^{(k)} \\ 2L_{11}^{(k)}L_{21}^{(k)} & 1 + 2L_{12}^{(k)}L_{21}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中 $L_{ij}^{(k)}(i, j = 1, 2)$ 是从 $\mathbf{r}_0$ 出发的 k 次 T 映象的线性 Jacobi 矩阵元.

$$L^{(k)}(\mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{r}_0} = \frac{\partial (x_k, y_k)}{\partial (x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} L_{11}^{(k)} & L_{12}^{(k)} \\ L_{21}^{(k)} & L_{22}^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

证明: T 的逆是 $T^{-1} = STS$, 其中 $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 从 T 的可逆性可以得到 T^k 的可逆性:

$$(T^k)^{-1} = ST^kS. \quad (4)$$

从 T 的保面积性亦可得到 T^k 的保面积性:

$$\det L^{(k)}(\mathbf{r}_0) = L_{11}^{(k)}L_{22}^{(k)} - L_{12}^{(k)}L_{21}^{(k)} = 1. \quad (5)$$

周期 $2k$ 轨道的线性 Jacobi 矩阵为

$$L^{(2k)}(\mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{r}_{2k}}{\partial \mathbf{r}_0} = \frac{\partial \mathbf{r}_{2k}}{\partial \mathbf{r}_k} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{r}_0} = L^{(k)}(\mathbf{r}_k)L^{(k)}(\mathbf{r}_0). \quad (6)$$

由可逆性(4)式可得

$$L^{(k)}(\mathbf{r}_k) = \frac{\partial \mathbf{r}_{2k}}{\partial \mathbf{r}_k} = \frac{\partial (T^k \mathbf{r}_k)}{\partial \mathbf{r}_k} = \frac{\partial (S(T^k)^{-1} S \mathbf{r}_k)}{\partial \mathbf{r}_k} = S \frac{\partial ((T^k)^{-1} \mathbf{r}_k)}{\partial \mathbf{r}_k} S, \quad (7)$$

其中

$$\frac{\partial ((T^k)^{-1} \mathbf{r}_k)}{\partial \mathbf{r}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{r}_k} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{r}_0} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} L_{22}^{(k)} & -L_{12}^{(k)} \\ -L_{21}^{(k)} & L_{11}^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

因而有

$$L^{(k)}(r_k) = \begin{pmatrix} L_{12}^{(k)} & L_{11}^{(k)} \\ L_{21}^{(k)} & L_{22}^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

把(9)式代入(6)式并利用保面积性(5)式即可得到所要证明的(2)式. 定理证毕.

从(2)式可知, 当映象 T 的参数 λ 变化到某一阈值 λ_c 使得

$$L_{12}^{(k)} L_{21}^{(k)} \Big|_{\lambda_c} = -1, \quad \frac{d(L_{12}^{(k)} L_{21}^{(k)})}{d\lambda} \Big|_{\lambda_c} < 0, \quad (10)$$

则 $L^{(2k)}$ 的本征值为 -1 , λ_c 是周期 $2k$ 轨道的倍周期分歧失稳点. 保面积关系(5)式意味着 $L_{11}^{(k)} L_{22}^{(k)} = 0$, 因此只有两种情况: (I) $L_{11}^{(k)} = 0$, $L_{22}^{(k)} \neq 0$, 则 $L^{(2k)}$ 的本征矢量为 $(1, 0)$, 分歧方向将与对称线 x 轴平行. (II) $L_{22}^{(k)} = 0$, $L_{11}^{(k)} \neq 0$, 则 $L^{(2k)}$ 的本征矢量为 $(0, 1)$, 分歧方向垂直于对称线 x 轴. 现在考虑通过对称线的对称周期 $2k$ 轨道. 设 r_0, r_k 是这条轨道位于对称线 x 轴上的两点, 则由(9)式可得

$$L_{11}^{(k)}(r_k) = L_{22}^{(k)}(r_0), \quad L_{22}^{(k)}(r_k) = L_{11}^{(k)}(r_0). \quad (11)$$

因此对称线上的两个周期 $2k$ 不动点, 当其一沿着对称线方向分歧时, 另一必然是垂直于对称线方向分歧. 所以, 在倍周期分歧至累积点(混沌始端)的整个过程中, 始终有两个椭圆型不动点落在对称线 x 轴上. 这就是说由对称周期轨道经倍周期分歧所产生的椭圆型周期轨道仍然是对称的. 所以, 倍周期分歧方式不可能产生周期轨道的对称性破缺. 这是可逆保面积映象倍周期分歧的一个显著规律. 这个结论在文献[4]中是作为一种观察提出的, 我们在这里给予了严格的证明.

周期 $2k$ 轨道的另一种可能的失稳方式发生于:

$$L_{12}^{(k)} L_{21}^{(k)} \Big|_{\lambda_c} = 0, \quad \frac{d(L_{12}^{(k)} L_{21}^{(k)})}{d\lambda} \Big|_{\lambda_c} > 0. \quad (12)$$

这时 $L^{(2k)}$ 的本征值为 1 , 因此 λ_c 是周期 $2k$ 轨道的同周期分歧失稳点. 也有两种情况: (I) $L_{11}^{(k)} = 0$, $L_{22}^{(k)} \neq 0$, 则 $L^{(2k)}$ 的本征矢量为 $(1, 0)$, 同周期分歧是沿着对称线 x 轴发生的. (II) $L_{22}^{(k)} = 0$, $L_{11}^{(k)} \neq 0$, 这时 $L^{(2k)}$ 的本征矢量为 $(0, 1)$, 分歧方向垂直于对称线 x 轴. 从(9)式又可得到

$$L_{12}^{(k)}(r_k) = L_{12}^{(k)}(r_0), \quad L_{21}^{(k)}(r_k) = L_{21}^{(k)}(r_0). \quad (13)$$

这表明对称周期 $2k$ 轨道的处在对称线上的两点 r_0 和 r_k 的同周期分歧的方向是相同的, 这与倍周期分歧形成明显的对照. 如果是情况(I)的A型同周期分歧, 那么分歧后将会有四个椭圆型周期 $2k$ 不动点位于对称线上. 这种类型的同周期分歧可以使一颗倍周期分歧树在周期 $2k$ 这一级发生一次“劈裂”, 但这种劈裂仍然保持在对称线 x 轴与参数 λ 轴所张的平面内. 如果是情况(II)的A型同周期分歧, 那么分歧后对称线上不再存在椭圆型不动点, 分岔出来的两条椭圆型周期 $2k$ 轨道都将不再通过对称线, 是非对称周期轨道. 这是周期轨道的对称性破缺. 对称性破缺不仅使倍周期分歧树在周期 $2k$ 这一级发生劈裂, 而且使劈裂的方向垂直于 x 轴与 λ 轴所张平面, 使倍周期分歧树发展成为一个真正的三维空间的树.

可逆保面积映象和哈密顿体系的一般的周期 n 轨道的同周期分歧条件可由(12)式推广得到. 周期 n 轨道的线性 Jacobi 矩阵的迹 $\text{Tr} L^{(n)}$ 作为不可积性参数 λ 的函数在 $\lambda = \lambda_c$ 处连续可微, 并有

$$[\text{Tr}L^{(n)}]_{\lambda_c} = 2, \quad 0 < \left| \left[\frac{d\text{Tr}L^{(n)}}{d\lambda} \right]_{\lambda_c} \right| < \infty, \quad (14)$$

则 λ_c 是同周期分歧点. 若 $[d\text{Tr}L^{(n)}/d\lambda]_{\lambda_c} > 0$, 称 λ_c 为同周期分歧失稳点. 若 $[d\text{Tr}L^{(n)}/d\lambda]_{\lambda_c} < 0$, 称 λ_c 为同周期分歧获稳点. 若 $[d\text{Tr}L^{(n)}/d\lambda]_{\lambda_c} = 0$, 这是同周期分歧的临界情况, 其稳定性转变须由二阶导数 $\left[\frac{d^2\text{Tr}L^{(n)}}{d\lambda^2} \right]_{\lambda_c}$ 确定.

上述条件所确定的同周期分歧点 λ_c 与周期 n 轨道的切分歧点 λ_t 和周期 n/m 轨道 ($m = 2, 3, 4, \dots, n$ 可被 m 整除) 进行 m 倍周期分歧产生周期 n 轨道的稳定性窗口起始点 λ_m 是严格区别的. 这是因为周期 n 轨道只能存在于切分歧点 λ_t 和多倍周期分歧点 λ_m 之一侧, 而在另一侧不存在, 因此 $\text{Tr}L^{(n)}$ 在这些分歧点处不是左右连续可微的, 只是单侧连续可微. 不考虑分歧树的弥合情形, 则有 $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_m + 0} \frac{d\text{Tr}L^{(n)}}{d\lambda}$ 为有限值, $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_t + 0} \frac{d\text{Tr}L^{(n)}}{d\lambda}$ 是无穷导数, 而左导数是根本不存在的.

至于所发生的同周期分歧属于何种类型, 仅仅考虑线性化 Jacobi 矩阵是不够的, 必须在分歧点邻域对周期轨道作高级 Taylor 展开, 亦即考虑原周期轨道与邻近同周期轨道的相互作用. 对于二维保面积映象, 假设与周期 n 轨道的不动点 (x_0, y_0) 偏离为 $(\delta x_0, \delta y_0)$ 的点是同周期轨道的不动点, 则有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix} &= \frac{\partial(x_n, y_n)}{\partial(x_0, y_0)} \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x_n}{\partial x_0^2} & \frac{\partial^2 x_n}{\partial x_0 \partial y_0} & \frac{\partial^2 x_n}{\partial y_0^2} \\ \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_0^2} & \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_0 \partial y_0} & \frac{\partial^2 y_n}{\partial y_0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\delta x_0)^2 \\ 2\delta x_0 \delta y_0 \\ (\delta y_0)^2 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 x_n}{\partial x_0^3} & \frac{\partial^3 x_n}{\partial x_0^2 \partial y_0} & \frac{\partial^3 x_n}{\partial x_0 \partial y_0^2} & \frac{\partial^3 x_n}{\partial y_0^3} \\ \frac{\partial^3 y_n}{\partial x_0^3} & \frac{\partial^3 y_n}{\partial x_0^2 \partial y_0} & \frac{\partial^3 y_n}{\partial x_0 \partial y_0^2} & \frac{\partial^3 y_n}{\partial y_0^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\delta x_0)^3 \\ 3(\delta x_0)^2 \delta y_0 \\ 3\delta x_0 (\delta y_0)^2 \\ (\delta y_0)^3 \end{pmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

截取到某一级, 可以得到 $\delta x_0, \delta y_0$ 的二元高次方程组. 所有的高阶 Jacobi 矩阵元都可以从运动微分方程或映象方程计算得到. 展开参数是对分歧点的偏离 $\lambda - \lambda_c$, 保留贡献最大的项所得到的 (15) 式的解将给出同周期轨道的不动点 $(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0)$ 的位置. 如果在分歧点的不稳侧, 即周期 n 轨道是双曲型时有两个同周期轨道的实解, 则同周期分歧是 A 型. 反之, 如果在分歧点的稳定侧, 亦即周期 n 轨道为椭圆型不动点有两个同周期轨道的实解, 则为 B 型同周期分歧. 如果在分歧点的两侧都有一个同周期轨道的解, 这是 C 型同周期分歧.

三、DV 映象同周期分歧类型的解析判别

按照第二节中所述方法, 可以对 DV 映象 (1) 式产生周期 n 轨道的同周期分歧条件及分歧类型的判别进行解析的讨论. 现在把 DV 映象的周期 1 至周期 4 轨道的同周期分歧

的分析结果罗列于下.

为表述简洁, 引进符号:

$$\begin{aligned} F_n &= f'(x_n) = \partial f(x_n, \lambda) / \partial x_n, \\ F'_n &= f''(x_n) = \partial^2 f(x_n, \lambda) / \partial x_n^2, \dots, \\ F_n^{(k)} &= f^{(k+1)}(x_n) = \partial^{k+1} f(x_n, \lambda) / \partial x_n^{k+1}. \end{aligned} \quad (16)$$

周期 1 不动点: $x_0 = f(x_0, \lambda)$, $y_0 = 0$,

同周期分歧条件:

$$R_0(\lambda_c) = 0, \quad 0 < \left| \frac{dR_0}{d\lambda} \right|_{\lambda_c} < \infty. \quad (17)$$

分歧类型的判别:

$$\begin{cases} R_1 \neq 0 & \text{C 型 } \delta x_0 = -2\varepsilon/R_1, \delta y_0 = 0; \\ R_1 = 0 & \begin{cases} R_2 < 0 \text{ A 型} \\ R_2 > 0 \text{ B 型} \end{cases} \delta x_0 = \pm \sqrt{\frac{-6\varepsilon}{R_2}}, \delta y_0 = 0; \\ & \begin{cases} R_3 \neq 0 \text{ C 型 } \delta x_0 = -\left(\frac{4! \varepsilon}{R_3}\right)^{1/3}, \delta y_0 = 0; \\ R_3 = 0 & \begin{cases} R_4 < 0 \text{ A 型} \\ R_4 > 0 \text{ B 型} \end{cases} \delta x_0 = \pm \left(\frac{-5! \varepsilon}{R_4}\right)^{1/4}, \delta y_0 = 0; \\ & \begin{cases} R_5 \neq 0 \text{ C 型}; \\ R_5 = 0 \dots \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad (18)$$

其中

$$\varepsilon = (1 - \lambda_c) \left| \frac{dR_0}{d\lambda} \right|_{\lambda_c} \quad (19)$$

为一阶小量. 各判别函数为

$$\begin{aligned} R_0 &= F_0 - 1, \\ R_1 &= R'_0(x_0) = F'_0, \\ R_2 &= R'_1(x_0) = F'_0', \\ &\dots\dots\dots \\ R_n &= R'_{n-1}(x_0) = F_0^{(n)}. \end{aligned} \quad (20)$$

同周期轨道的解 $\delta y_0 = 0$ 表明 DV 映象的周期 1 轨道的同周期分歧只可能沿对称线 x 轴方向发生.

周期 2 轨道为: $x_0 = f[f(x_0)]$, $x_1 = f(x_0)$, $y_0 = y_1 = 0$. 其同周期分歧的条件, 类型判别仍由(17), (18)和(19)式表示, 只是判别函数分别换为

$$\begin{aligned} R_0 &= F_0 F_1 - 1, \\ R_1 &= R'_0(x_0)|_{R_0=0} = \frac{1}{F_0} (F'_0 + F_0^3 F'_1), \\ R_2 &= R'_1(x_0)|_{R_0=R_1=0} = \frac{1}{F_0^2} [F_0 F_0'' + F_0^2 F_1' - 3(F_0')^2], \\ R_3 &= R'_2(x_0)|_{R_0=R_1=R_2=0} \\ &= \frac{1}{F_0^3} [F_0^3 F_0''' + F_0^2 F_1'' - 10 F_0 F_0' F_0'' + 15(F_0')^3], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_4 &= R_3'(x_0)|_{R_0=R_1=R_2=R_3=0} \\
 &= \frac{1}{F_0^4} [F_0^3 F_0^{(4)} + F_0^2 F_1^{(4)} - 15 F_0^2 F_0' F_0'' + 105 F_0 (F_0')^2 F_0' \\
 &\quad - 10 F_0^2 (F_0'')^2 - 105 (F_0')^4],
 \end{aligned}$$

等等. 同周期分歧的方向亦与 x 轴平行.

对称周期 3 轨道为

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 2f[f(x_0)] - f(x_0), \quad y_0 = 0, \\
 x_1 &= x_2 = f(x_0), \quad y_1 = -y_2 = x_0 - f[f(x_0)].
 \end{aligned}$$

其线性 Jacobi 矩阵为

$$L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 - (2F_1 + 1)G & (2F_1 + 1)(1 - 2F_1) \\ (2F_0 F_1 + F_0 - 1)G & 1 - (2F_1 + 1)G \end{pmatrix}, \quad (22)$$

其中 $G = 1 + F_0 - 2F_0 F_1$. 必须分两种情况讨论同周期分歧.

1) 当 $\lambda = \lambda_c$ 时, $G = 0$, 但 $2F_1 + 1 \neq 0$. 这时的同周期分歧的方向与对称线 x 轴平行. 同周期分歧类型的判别亦由(17)–(19)式表示, 只是判别函数分别取作:

$$\begin{aligned}
 R_0 &= -G(x_0) = 2F_0 F_1 - F_0 - 1, \\
 R_1 &= -(2F_1 + 1)G'(x_0)|_{R_0=0} = \frac{2F_0 + 1}{F_0^2} (F_0' + 2F_0^2 F_1'), \\
 R_2 &= -(2F_1 + 1)G''(x_0)|_{R_0=R_1=0} \\
 &= \frac{2F_0 + 1}{F_0^2} [F_0'' + 2F_0^2 F_1'' - 12F_0^2 (F_1')^2], \\
 R_3 &= -(2F_1 + 1)G'''(x_0)|_{R_0=R_1=R_2=0} \\
 &= \frac{2F_0 + 1}{F_0^3} [F_0''' + 2F_0^2 F_1''' - 40F_0^2 F_1' F_1'' + 120F_0^2 (F_1')^3], \\
 R_4 &= -(2F_1 + 1)G^{(4)}(x_0)|_{R_0=R_1=R_2=R_3=0} = \dots\dots\dots. \quad (23)
 \end{aligned}$$

2) 当 $\lambda = \lambda_c$ 时, $2F_1 + 1 = 0$, 而 $G = 2F_0 + 1 \neq 0$. 这时的同周期分歧的方向垂直于对称线 x 轴, 其同周期分歧条件及分歧类型的判别结果为

同周期分歧条件: 当 $\lambda = \lambda_c$,

$$2F_1 + 1 = 0, \quad G = 2F_0 + 1 \neq 0, \quad 0 < \left| \frac{dF_1}{d\lambda} \right| < \infty. \quad (24)$$

分歧类型的判别为

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} F_1' \neq 0 & \text{B 型 (1)} \\ F_1' = 0 & \begin{cases} GF_1'' > 0 & \text{A 型} \\ GF_1'' < 0 & \text{B 型} \end{cases} & (2) \\ &\begin{cases} F_1''' \neq 0 & \text{B 型 (3)} \\ F_1''' = 0 & \begin{cases} GF_1^{(4)} > 0 & \text{A 型} \\ GF_1^{(4)} < 0 & \text{B 型} \end{cases} & (4) \\ &\begin{cases} F_1^{(5)} \neq 0 & \text{B 型 (5)} \\ F_1^{(5)} = 0 & \dots\dots\dots \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad (25)
 \end{aligned}$$

其中(1), (2), (3), …… 分别表示各种情形的邻近同周期轨道 (非对称周期 3 轨道) 的解:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \delta x_0 = -\frac{\varepsilon}{GF_1'}, \quad \delta y_0 = \pm \frac{(-\varepsilon)^{1/2}}{F_1'}; \\
 (2) \quad & \delta x_0 = 0, \quad \delta y_0 = \pm \left(\frac{3\varepsilon}{GF_1'}\right)^{1/2}; \\
 (3) \quad & \delta x_0 = \frac{1}{G} \left(\frac{3\varepsilon^2}{F_1'''}\right)^{1/3}, \quad \delta y_0 = \pm \left[\frac{-3 \times 4! \varepsilon}{(F_1''')^2}\right]^{1/6}; \\
 (4) \quad & \delta x_0 = 0, \quad \delta y_0 = \pm \left(\frac{5! \varepsilon}{2GF_1^{(4)}}\right)^{1/4}; \\
 (5) \quad & \delta x_0 = \frac{1}{G} \left(\frac{5! \varepsilon^3}{9F_1^{(5)}}\right)^{1/3}, \quad \delta y_0 = \pm \left[\frac{-3 \times (5!)^2 \varepsilon}{(F_1^{(5)})^2}\right]^{1/10};
 \end{aligned} \tag{26}$$

其中的 ε 是对分歧点 λ_c 的偏离,

$$\varepsilon = -(2F_1 + 1)G = -2(2F_0 + 1)(\lambda - \lambda_c) \frac{dF_1}{d\lambda} \Big|_{\lambda_c}. \tag{27}$$

DV 映象的对称周期 4 轨道为

$$\begin{aligned}
 x_0 &= x_4, \quad x_1 = x_3, \\
 y_0 &= y_2 = y_4 = 0, \quad y_1 = -y_3.
 \end{aligned}$$

其线性 Jacobi 矩阵为

$$L^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 - 4F_1G & 4F_1(1 - 2F_1F_2) \\ 2(2F_0F_1 - 1)G & 1 - 4F_1G \end{pmatrix}, \tag{28}$$

其中 $G = F_0 + F_2 - 2F_0F_1F_2$, 亦有两种不同情况的同周期分歧.

1) 当 $\lambda = \lambda_c$ 时, $F_1 \approx 0$, $G = 0$. 这是对称周期 4 轨道沿着对称线 x 轴方向发生同周期分歧的情况. 其分歧条件及类型判别仍由(17), (18), (19)式给出, 各判别函数为

$$\begin{aligned}
 R_0 &= -G(x_0) = 2F_0F_1F_2 - F_0 - F_2; \\
 R_1 &= -4F_1G'(x_0)|_{R_0=0} = 4F_1F_2F_0^2 \left(\frac{F_0'}{F_0^3} + 2F_1' + \frac{F_2'}{F_2^3} \right); \\
 R_2 &= -4F_1G''(x_0)|_{R_0=R_1=0} \\
 &= 4F_1F_2F_0^3 \left[\frac{F_0''}{F_0^4} + 2F_1'' + \frac{F_2''}{F_2^4} - 3 \frac{(F_0')^2}{F_0^5} - 3 \frac{(F_2')^2}{F_2^5} \right]; \\
 R_3 &= -4F_1G'''(x_0)|_{R_0=R_1=R_2=0} \\
 &= 4F_1F_2F_0^4 \left[\frac{F_0'''}{F_0^5} + 2F_1''' + \frac{F_2'''}{F_2^5} - 10 \frac{F_0'F_0''}{F_0^6} - 10 \frac{F_2'F_2''}{F_2^6} \right. \\
 &\quad \left. + 15 \frac{(F_0')^3}{F_0^7} + 15 \frac{(F_2')^3}{F_2^7} \right]; \\
 R_4 &= -4F_1G^{(4)}(x_0)|_{R_0=R_1=R_2=R_3=0}; \\
 &\dots\dots
 \end{aligned} \tag{29}$$

2) 当 $\lambda = \lambda_c$ 有 $F_1 = 0$, $G \approx 0$. 这是对称周期 4 轨道垂直于对称线 x 轴方向发

生同周期分歧的情形,即发生对称性破缺的情形。

同周期分歧条件: 当 $\lambda = \lambda_c$,

$$F_1 = 0, \quad G = F_0 + F_1 \approx 0, \quad 0 < \left| \frac{dF_1}{d\lambda} \right| < \infty. \quad (30)$$

分歧类型的判别与(25)式相同,其中

$$\varepsilon = -4F_1G = -4G(\lambda - \lambda_c) \left. \frac{dF_1}{d\lambda} \right|_{\lambda_c} = -4(F_0 + F_1)(\lambda - \lambda_c) \left. \frac{dF_1}{d\lambda} \right|_{\lambda_c}. \quad (31)$$

邻近的同周期轨道的解为

$$\begin{aligned} (1) \quad & \delta x_0 = -\frac{\varepsilon}{4GF_2F_1'}, \quad \delta y_0 = \pm \sqrt{\frac{-\varepsilon}{2(F_2F_1')^2}}; \\ (2) \quad & \delta x_0 = 0, \quad \delta y_0 = \pm \left[\frac{3!\varepsilon}{4GF_1''} \right]^{1/2}; \\ (3) \quad & \delta x_0 = \frac{1}{2G} \left(\frac{3!\varepsilon^2}{4F_2F_1''} \right)^{1/3}, \quad \delta y_0 = \pm \left[\frac{-(3!)^2\varepsilon}{2(F_2F_1'')^2} \right]^{1/6}; \\ (4) \quad & \delta x_0 = 0, \quad \delta y_0 = \pm \left[\frac{5!\varepsilon}{4GF_1^{(4)}} \right]^{1/4}; \\ (5) \quad & \delta x_0 = \frac{1}{2G} \left(\frac{5!\varepsilon^3}{18F_2F_1^{(5)}} \right)^{1/5}, \quad \delta y_0 = \pm \left[\frac{-3 \times (5!)^2\varepsilon}{4(F_2F_1^{(5)})^2} \right]^{1/10}. \end{aligned} \quad (32)$$

四、判别方法应用举例

例 1: 求产生周期 1 轨道的 A 型同周期分歧的 DV 映象的生成函数 $f(x, \lambda)$, 假设 $f(x)$ 是 x 的三次多项式. 平移坐标原点使 $x = 0$ 成为不动点, 即取 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, 问系数 a_1, a_2, a_3 应是可变参数 λ 的什么函数可使不动点 $x = 0$ 产生 A 型同周期分歧?

由于 $F_0 = f'(0) = a_1$, $F_0' = f''(0) = 2a_2$, $F_0'' = f'''(0) = 6a_3$, 产生 A 型同周期分歧的条件是当 $\lambda = \lambda_c$, 有 $F_0 = 1$, $\frac{dF_0}{d\lambda} > 0$, $F_0' \neq 0$ 及 $F_0'' < 0$, 亦即 $a_1(\lambda_c) = 1$, $da_1(\lambda)/d\lambda|_{\lambda_c} > 0$, $a_2(\lambda_c) = 0$, $a_3(\lambda_c) < 0$, 因此可选 $a_1 = \lambda$, $a_2 = \lambda - 1$, $a_3 = \lambda - 2$. 这就是说由 $f(x) = \lambda x + (\lambda - 1)x^2 + (\lambda - 2)x^3$ 所生成的 DV 映象的不动点 $x = 0$, 当 λ 增加到 $\lambda_c = 1$ 时将沿对称线 x 轴分岔出两个新的椭圆型不动点, 这是周期 1 轨道的 A 型同周期分歧。

类似的考虑可知由 $f(x) = \lambda x + (\lambda - 1)x^2 + \lambda x^3$ 所生成的 DV 映象, 其不动点 $x = 0$, 当 $\lambda = 1$ 将吸收对称线上另外两个双曲型不动点而失稳, 即发生 B 型同周期分歧。

例 2: 当取 $f(x) = x - \frac{k}{4\pi} \sin(2\pi x)$, 这是标准映象的 DV 映象形式. 它有对称周期 2 轨道 $x_0 = \frac{k}{8\pi} \sin(2\pi x_0)$, $x_1 = -x_0$, $y_0 = y_1 = 0$. 当 $k = 2\pi$ 时, $x_0 = \pm 1/4$,

$x_1 = \mp 1/4$, $R_0 = F_0 \cdot F_1 = \left[1 - \frac{k}{2} \cos(2\pi x_0)\right] \left[1 - \frac{k}{2} \cos(2\pi x_1)\right] = 1$, $dR_0/dk = \pi/4 > 0$. 因而将发生平行于 x 轴的同周期分歧. 又由于

$$R_1 = \frac{F'_0 + F_0 F'_1}{F_0} = \pi k \sin(2\pi x_0) + \left[1 - \frac{k}{2} \cos(2\pi x_0)\right]^3 \pi k \sin(2\pi x_1) = 0,$$

$$R_2 = \frac{1}{F_0^2} [F_0^2 F'_1 + F_0 F'_0 - 3(F'_0)^2] = -12\pi^4 < 0,$$

故知其分歧形式为 A 型. 当 $k > 2\pi$, 分岔出来的两条椭圆型周期 2 轨道为

$$x_0 = \pm \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{2\pi}{k}, \quad x_1 = \mp \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{2\pi}{k}, \quad y_0 = y_1 = 0.$$

上、下号各对应一条周期 2 轨道. 新的稳定周期 2 轨道当 $k = \sqrt{4\pi^2 + 4}$ 时将发生倍周期分歧失稳. 这与文献[8]的数值计算是一致的.

例 3: 由四次方非线性函数

$$f(x, \lambda) = 1 - (\lambda + b)x + (\lambda + b)x^2 - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)x^3 + \lambda x^4$$

所生成的 DV 映象, 其中 b 为待定常数, λ 为可变参数, 有与 λ 无关的对称周期 3 轨道为

$$r_0 = (0, 0), \quad r_1 = (1, 1), \quad r_2 = (1, -1).$$

由于

$$2F_1 + 1 = 4\lambda + 2b - 2,$$

$$G = 1 + F_0 - 2F_0 F_1 = 4\lambda^2 + 2(3b - 2)\lambda + 2b(b - 2) + 1,$$

因此当 $\lambda = (1 - b)/2$ 将, 使 $2F_1 + 1 = 0$, 这是垂直于 x 轴方向的同周期分歧情形, 周期 3 轨道将出现对称性破缺. 而当 $\lambda = \frac{2 - 3b \pm \sqrt{b(b + 4)}}{4}$, 将使 $G = 0$, 产生平行于 x 轴方向的同周期分歧. 改变待定常数 b , 可以得到不同类型的同周期分歧.

例 4: 由五次方非线性函数

$$f(x, \lambda) = 1 + 2\left(2\lambda - b - \frac{1}{3}\right)x - \left(b + \frac{2}{3}\right)x^2 + (2b - \lambda)x^3 + (b - 2\lambda)x^4 - \lambda x^5$$

所生成的 DV 映象, 有对称周期 4 轨道为

$$r_0 = (0, 0), \quad r_1 = (1, 1), \quad r_2 = (-2, 0), \quad r_3 = (1, -1).$$

由于

$$F_0 = 2(2\lambda - b - 1/3), \quad F_1 = 2(-6\lambda + 3b - 2/3),$$

$$F_2 = 2(1 - 12\lambda - 3b) \text{ 及 } F'_1 = 22b - 50\lambda - \frac{4}{3},$$

当 $b = 38/27$, $\lambda = 16/27$, 有 $F_1 = F'_1 = 0$,

$$F'_1 = 36b - 114\lambda = -\frac{152}{9} < 0, \quad F_0 + F_2 = \frac{26}{9} - 18b < 0,$$

即满足 $GF'_1 = (F_0 + F_2)F'_1 > 0$ 的条件. 因此, 由

$$f(x) = 1 + 2\left(2\lambda - \frac{47}{27}\right)x - \frac{56}{27}x^2 + \left(\frac{76}{27} - \lambda\right)x^3 + 2\left(\frac{19}{27} - \lambda\right)x^4 - \lambda x^5$$

所生成的 DV 映象, 上述对称周期 4 轨道当 $\lambda = 16/27$ 时将发生垂直于对称线 x 轴方向的同周期分歧, 分歧类型是 A 型. 这是一个周期 4 轨道发生对称性破缺的可逆保面积映象的例子.

本文所提供的解析方法, 原则上可以讨论可逆保面积映象的任何周期轨道的同周期分歧. 对于一般的用微分方程描述的不可积哈密顿体系, 周期轨道的各阶 Jacobi 矩阵可以通过数值计算求得, 因而上讨论同周期分歧的方法也是适用的.

对郝柏林教授、陈式刚教授和王光琰同志启发性的讨论和热心的帮助谨致谢忱.

参 考 文 献

- [1] B. V. Chirikov, *Phys. Reports*, **52**(1979), 263.
- [2] J. M. Greene, *J. Math. Phys.*, **20**(1979), 1183.
- [3] P. Collet, J. P. Eckmann, H. Koch, *Physica*, **3D**(1981), 457.
- [4] J. M. Greene, R. S. Mackay, F. Vivaldi, M. J. Feigenbaum, *ibid.*, **3D** (1981), 468.
- [5] M. Widom, L. P. Kadanoff, *ibid.*, **5D**(1982), 287.
- [6] R. Rimmer, *J. Differential Equations*, **29**(1978), 329.
- [7] J. Bialek, G. Schmidt, Wang Bing-hong (汪秉宏), *Physica*, **14D**(1985), 265.
- [8] 王光琰, 保面积映象与混沌的最新进展, 第五届全国非平衡态统计物理会议报告, 贵阳, (1986); 刘军贤, 标准映象的周期分岔及其向混沌的过渡, 硕士论文, (1986).
- [9] G. Schmidt, Wang Bing-hong (汪秉宏), *Phys. Rev.*, **A32**(1985), 2994.
- [10] A. H. MacDonald, M. Plischke, *Phys. Rev.*, **B27**(1983), 201.
- [11] 秦光戎等, 具有非线性电感的 RLC 电路相空间行为的实验观察, 第五届全国非平衡态统计物理会议报告, 贵阳, (1986).
- [12] R. De Vogelaere, *Contributions to the Theory of Linear Oscillations*, Vol. IV. ed. S. Lefschetz, (1958), p. 53.

AN ANALYTICAL STUDY OF EQUAL PERIODIC BIFURCATIONS IN REVERSIBLE AREA PRESERVING MAPS

WANG BING-HONG¹⁾

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing)

ABSTRACT

In this paper, the general structure of linear Jacobian matrices of even periodic orbits for reversible area preserving maps is obtained and two kinds of bifurcation behaviour of symmetric periodic orbits are discussed from the above structure. We present the conditions and the analytical criterions which can distinguish three types for equal periodic bifurcations of reversible area preserving maps. The applications of this analytical method are illustrated with several examples of De Vogelaere map.

1) Permanent address: Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei.