第37卷 第5期
1988年5月

物理学报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 37, No. 5
May, 1988

稳态自洽密度分布的三参量解族

沈文达
（上海科学技术大学物理系）

朱莳通
（中国高等科学技术中心（世界实验室）理论物理中心；中国科学院上海光学精密机械研究所）

1987年5月26日收到

提　　要

本文利用严格的解析方法求得了激光等离子体中稳态自洽密度分布的三参量解族. 讨论几种特殊情况，指出 Lee 等人给出的平台型密度分布只是其中的一种特殊情况.

一、引　言

在激光核聚变和激光等离子体相互作用的研究中，激光等离子体中的场结构和密度分布的具体形式具有十分重要的物理意义. 在最近10年中，对于激光等离子体中由有质动力引起的密度分布修正，已经进行了广泛的研究[1-5]，特别是对于其中的稀疏平台型结构，其物理图象及解析关系已有比较清楚的了解. 我们可以由入射光强度唯一地决定等离子体的场强和密度分布. 由于激光与等离子体相互作用是一个随时间演化的过程，在有质动力作用下准稳态稀疏平台型结构的形成及其特征应由时间和入射光强度两个参量来描述[6,7]. 这种两参量的场结构和密度分布更真实地反映了实验中观察到的现象. 本文的解析分析表明，激光等离子体中稳态的场结构和密度分布应由3个参量来描述，而 Lee 等人的稳态平台型结构只是特殊边条件 $A_l = 0$ 和 $\left.\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_l = 0$ 的结果.

二、基本方程及其自洽通解

当激光法向入射到等离子体时，在有质动力作用下的稳态密度分布可以由如下方程描述：

$$\frac{\partial (VN)}{\partial \xi} = 0 \text{ 或 } VN = N_s, \tag{1}$$

$$V\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}\frac{\partial |A|^2}{\partial \xi}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + (1 - N)A = 0, \tag{3}$$

其中 $V=v/c_s$，$N=n/n_c$，$A=eE/m\omega v_e$，$\xi=kx$，电子热速度 $v_e=(T_e/m)^{1/2}$，声速 $c_s=(zT_e/M)^{1/2}$，v 为等离子体流速，n 为等离子体密度，n_c 为临界密度，$m(M)$ 为电子(离子)质量，z 为电荷态，e 和 T_e 为电子的电荷和温度，ω 和 k 为入射光的频率和波数，E 为电场强度．这里采用一维等温模型．

把方程(1)代入方程(2)，得到

$$\left(V-\frac{1}{V}\right)\frac{\partial V}{\partial\xi}=-\frac{1}{4}\frac{\partial|A|^2}{\partial\xi}. \tag{4}$$

方程(3)及其共轭方程分别乘以 A^* 和 A，并把所得方程相加，可以得到

$$\frac{\partial^2|A|^2}{\partial\xi^2}-2\left|\frac{\partial A}{\partial\xi}\right|^2+2(1-N)|A|^2=0. \tag{5}$$

方程(3)及其共轭方程分别乘以 $\frac{\partial A^*}{\partial\xi}$ 和 $\frac{\partial A}{\partial\xi}$，并把所得方程相加，可以得到

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left|\frac{\partial A}{\partial\xi}\right|^2-(1-N)\frac{\partial|A|^2}{\partial\xi}=0. \tag{6}$$

积分(4)式，并由声点的条件 $V=1$，$N=N_s$，$|A|=|A_s|$ 和 $\left|\frac{\partial A}{\partial\xi}\right|=\left|\frac{\partial A}{\partial\xi}\right|_s$，得到

$$|A|^2=|A_s|^2-2(V^2-2\ln V-1), \tag{7}$$

$$|A|^2=|A_s|^2-2\left(\frac{N_s^2}{N^2}-2\ln N_s+2\ln N-1\right). \tag{8}$$

积分(6)式，得到

$$\left|\frac{\partial A}{\partial\xi}\right|^2=2(V^2-2\ln V-1)-4N_s\left(V+\frac{1}{V}-2\right)+\left|\frac{\partial A}{\partial\xi}\right|_s^2. \tag{9}$$

把(4)，(7)和(9)式代入(5)式，可以得到制约速度的微分方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}+\frac{1}{2}P(V)\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)^2=\frac{1}{2}Q(V)\qquad(V\neq1), \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)^2=\frac{1}{4}(1-N_s)|A_s|^2-\frac{1}{4}\left|\frac{\partial A}{\partial\xi}\right|_s^2\qquad(V=1), \tag{11}$$

其中

$$P(V)=2\left(1+\frac{1}{V^2}\right)\left(V-\frac{1}{V}\right)^{-1}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}Q(V)=\Big\{&\left(1-\frac{N_s}{V}\right)[|A_s|^2-2(V^2-2\ln V-1)]-2(V^2-2\ln V-1)\\&+4N_s\left(V+\frac{1}{V}-2\right)-\left|\frac{\partial A}{\partial\xi}\right|_s^2\Big\}\left(V-\frac{1}{V}\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{13}$$

令 $\frac{\partial V}{\partial\xi}=y^{1/2}$，方程(10)简化成

$$\frac{dy}{dV}+P(V)y=Q(V) \tag{14}$$

方程(14)的解具有如下形式：

$$y=\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)^2=e^{-\int P(V)dV}\left[\int Q(V)e^{\int P(V)dV}dV+c\right]$$

$$-\left(\frac{V}{V^2-1}\right)^2\left\{\left[|A_s|^2+4-8N_s-\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s^2\right]\left(\frac{V^2}{2}-\ln V\right)\right.$$
$$-V^4-4(\ln V)^2+4V^2\ln V-N_s\left(V+\frac{1}{V}\right)(|A_s|^2+4\ln V)$$
$$\left.+2N_sV^3-2\frac{N_s}{V}+c\right\}, \tag{15}$$

其中 c 为积分常数. 当 $V=1$ 时,由方程(15)应得出方程(11)的结果,于是定得

$$c=\frac{1}{2}\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s^2-\frac{1}{2}|A_s|^2-1+4N_s+2N_s|A_s|^2. \tag{16}$$

因此,(15)式可以写成

$$y^{1/2}=\frac{\partial V}{\partial \xi}=\pm\left|\frac{V}{V^2-1}\right|\left\{\left[\frac{|A_s|^2}{2}-(V^2-2\ln V-1)-\frac{1}{2}\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s^2\right]\right.$$
$$\times(V^2-2\ln V-1)-2N_s\left(V-\frac{1}{V}-2\right)$$
$$\left.\times\left[\frac{|A_s|^2}{2}-(V^2-2\ln V-1)\right]\right\}^{1/2}. \tag{17}$$

上式等号右边正负号的选择依赖于等离子体流的方向.

由 (17) 式可以看到,只要给定 $|A_s|^2$, $\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s^2$ 和 N_s 3 个参量,就可以通过直接积分(17)式,得到速度的空间分布. 再由(1)式,可以求得相应的密度分布,而由 (7) 式可以求得有质动力的相应分布.

由(17)和(1)式,可以导出等离子体的局域密度标度长度

$$kL=\left|N\Big/\left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)\right|=\left|1-\frac{N_s^2}{N^2}\right|\left\{\left[\frac{|A_s|^2}{2}-\left(\frac{N_s^2}{N^2}-2\ln N_s+2\ln N-1\right)\right.\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s^2\right]\left(\frac{N_s^2}{N^2}-2\ln N_s+2\ln N-1\right)$$
$$\left.-2N_s\left(\frac{N_s}{N}+\frac{N}{N_s}-2\right)\left[\frac{|A_s|^2}{2}-\left(\frac{N_s^2}{N^2}-2\ln N_s+2\ln N-1\right)\right]\right\}^{1/2}. \tag{18}$$

由(18)式和给定的 3 个参量,可以求得稳态等离子体中任一点的密度标度长度.

三、几种特殊情况

上节导出了由 3 个参量决定的稳态分布的自洽通解. 对于特定的边界条件,可以得到一些特解.

不难看出,在诸如 (7), (8), (17) 和 (18) 式中 N 和 V 不能等于零,否则 $\ln N$ 和 $\ln V$ 会发散. 因而速度将被限制在一个极小值 V_2 和一个极大值之间. 如果在 (7),(9), (17) 和 (13) 式中取 $V=V_2$, $|A|^2=|A_2|^2$ 和 $\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|^2=\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_2^2$, 则得到

$$|A_2|^2=|A_s|^2-2(V_2^2-2\ln V_2-1), \tag{19}$$

$$\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_2^2 = 2(V_2^2 - 2\ln V_2 - 1) - 4N_s\left(V_2 + \frac{1}{V_2} - 2\right) + \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s^2, \tag{20}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_2 = \pm \frac{V_2}{2|V_2 - 1|}\left[|A_2|^2\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_2^2 - |A_s|^2\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s^2\right]^{1/2}, \tag{21}$$

$$Q(V_2) = \left[(1 - N_2)|A_2|^2 - \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_2^2\right]\left(V_2 - \frac{1}{V_2}\right)^{-1}, \tag{22}$$

V_2 为极小值的条件要求

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \xi}\right|_2 = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}\right|_2 = \frac{1}{2}Q(V_2) - \frac{1}{2}P(V_2)\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_2^2 = \frac{1}{2}Q(V_2) \geqslant 0.$$

这意味着

$$|A_2|^2\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_2^2 = |A_s|^2\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s^2, \tag{23}$$

$$(1 - N_2)|A_2|^2 - \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_2^2 \leqslant 0. \tag{24}$$

相似地，如果在 (7), (9), (17) 和 (13) 式中取 $V = V_1$, $|A| = |A_1|$ 和 $\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|^2 = \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_1^2$, 则可以得到

$$|A_1|^2 = |A_s|^2 - 2(V_1^2 - 2\ln V_1 - 1), \tag{25}$$

$$\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_1^2 = 2(V_1^2 - 2\ln V_1 - 1) - 4N_s\left(V_1 + \frac{1}{V_1} - 2\right) + \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s^2, \tag{26}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_1 = \pm \frac{V_1}{2|V_1^2 - 1|}\left[|A_1|^2\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_1^2 - |A_s|^2\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s^2\right]^{1/2}, \tag{27}$$

$$Q(V_1) = \left[(1 - N_1)|A_1|^2 - \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_1^2\right]\left(V_1 - \frac{1}{V_1}\right)^{-1}, \tag{28}$$

V_1 为极大值的条件要求

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \xi}\right|_1 = 0, \tag{29}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}\right|_1 = \frac{1}{2}Q(V_1) - \frac{1}{2}P(V_1)\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_1^2 = \frac{1}{2}Q(V_1) \leqslant 0. \tag{30}$$

这意味着

$$|A_1|^2\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_1^2 = |A_s|^2\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s^2, \tag{31}$$

$$(1 - N_1)|A_1|^2 - \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_1^2 \leqslant 0. \tag{32}$$

我们现在有 (19), (20), (23), (25), (26), (31) 和

$$N_1V_1 = N_2V_2 = N_s \tag{33}$$

8 个方程，总共有 11 个待定的物理量: $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_s|$, $\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_1$, $\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_2$, $\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s$, N_1, N_2,

N_s，V_1 和 V_2。因此，如果给定其中 3 个量，就可以得到一组特解。然而，这 3 个量的取值受到下列条件的制约：

$$|A_1|^2 \geqslant 0, \tag{34}$$

$$|A_2|^2 \geqslant 0, \tag{35}$$

$$\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_1^2 \geqslant 0, \tag{36}$$

$$\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_2^2 \geqslant 0, \tag{37}$$

$$(1-N_1)|A_1|^2 \leqslant \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_1^2, \tag{38}$$

$$(1-N_2)|A_2|^2 \leqslant \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_2^2, \tag{39}$$

$$(1-N_s)|A_s|^2 \geqslant \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s^2. \tag{40}$$

对于这些约束条件，讨论如下几种特殊情况。

1. (34)—(40)式中所有不等式均成立

这时，有质动力势和密度分布由满足 (34)—(40) 不等式条件的三参量解族决定。例如，已知 $N_1 = 0.04$，$V_1 = 2.5$ 和 $V_2 = 0.15$ 3 个参量，可以求得其余 8 个量，它们分别为

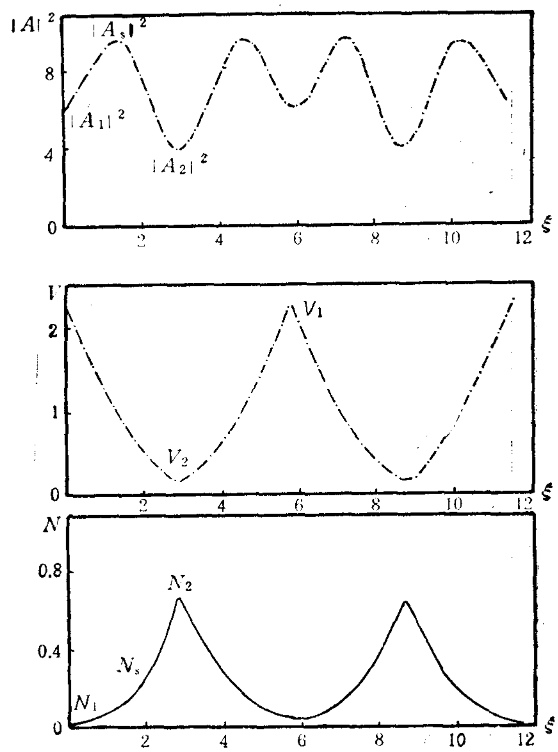

图 1　$(1-N_2)|A_2|^2<\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_2^2$，$(1-N_s)|A_s|^2>\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s^2$ 和 $(1-N_1)|A_1|^2<\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_1^2$ 情况下的 $|A|^2$，V 和 N 的空间分布

$N_i = 0.6667$, $N_s = 0.1$, $|A_s|^2 = 9.5672$, $|A_1|^2 = 6.1498$, $|A_2|^2 = 3.9337$, $\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_1^2 = 6.8348$, $\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_2^2 = 6.6594$ 和 $\left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s^2 = 2.9524$. 其速度 V, 密度 N 和 $|A|^2$ 的空间分布示于图 1.

由图 1 可以看到，这类结构的速度和密度分布具有呈等振幅等周期振荡的特点，V_1 和 V_2 分别为速度的极大值和极小值，而 N_1 和 N_2 分别为密度的极小值和极大值. $|A|^2$ 的空间分布具有不同的特点，$|A_s|^2$ 为其极大值，而 $|A_1|^2$ 和 $|A_2|^2$ 为其两个极小值，它们的大小并不相等，因而 $|A|^2$ 的空间分布呈两个极小值交替相间的驻波. 如果以 N_1 和 N_2 的平均密度代替等振幅等周期振荡的密度分布，则利用 WKB 近似，可以建立入射场振幅 $|A_0|$ 与平均场振幅 $|\bar{A}|$ 之间的联系

$$|\bar{A}| \equiv [2|A_s| - |A_1| - |A_2|]/2 = 2|A_0| \Big/ \left[1 - \frac{1}{2}(N_1 + N_2)\right]^{1/4}. \quad (41)$$

2. $(1 - N_2)|A_2|^2 = \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_2^2$

这类结构由于多了一个方程，实际上只需要两个已知量. 然而，由于

$$N_2 = \left[1 - \frac{|A_s|^2}{2(V_2^2 - 2\ln V_2 - 1)}\left(1 - \frac{4V_2\left(V_2 + \frac{1}{V_2} - 2\right)}{2(V_2^2 - 2\ln V_2 - 1)}\right)\right]^{-1}$$

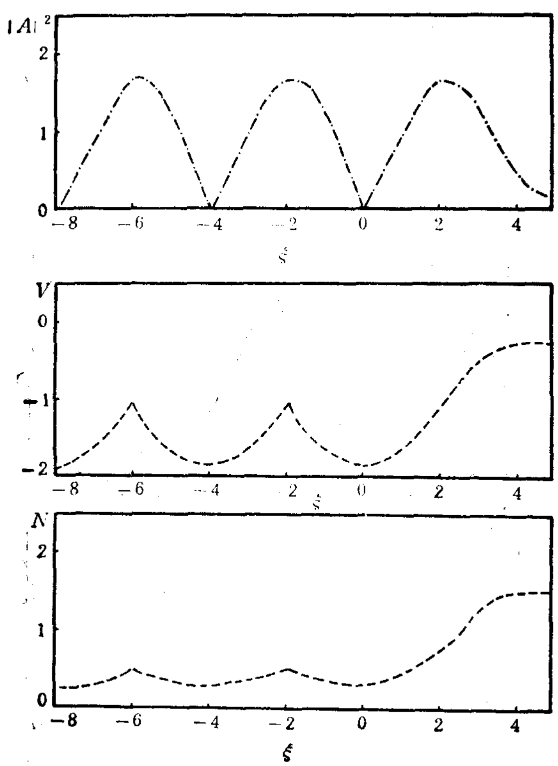

图 2 $(1 - N_2)|A_2|^2 = \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_2^2$ 时的 $|A|^2$, V 和 N 的空间分布

和

$$4V_2\left(V_2+\frac{1}{V_2}-2\right)\leqslant 2(V_2^2-2\ln V_2-1),$$

因而其上平台密度 N_2 总是大于 1. 由 $(1-N_2)|A_2|^2=\left|\frac{\partial A}{\partial\xi}\right|_2^2$ 的要求，得到 $|A_2|^2=0$ 和 $\left|\frac{\partial A}{\partial\xi}\right|_2^2=0$. 于是，得到的实际上是一参量解族，这也就是 Lee 等人给出的平台型结构[1].

为了对比，我们把 Lee 等人给出的速度、密度和 $|A|^2$ 的分布示于图 2，其入射光振幅 $|A_0|$ 与 $|A_s|$ 之间有如下关系[1].

$$|A_s|=\frac{2|A_0|}{\left[1-\frac{1}{2}(N_1+N_s)\right]^{1/4}}. \tag{42}$$

3. $(1-N_s)|A_s|^2=\left|\frac{\partial A}{\partial\xi}\right|_s^2$ 　(43)

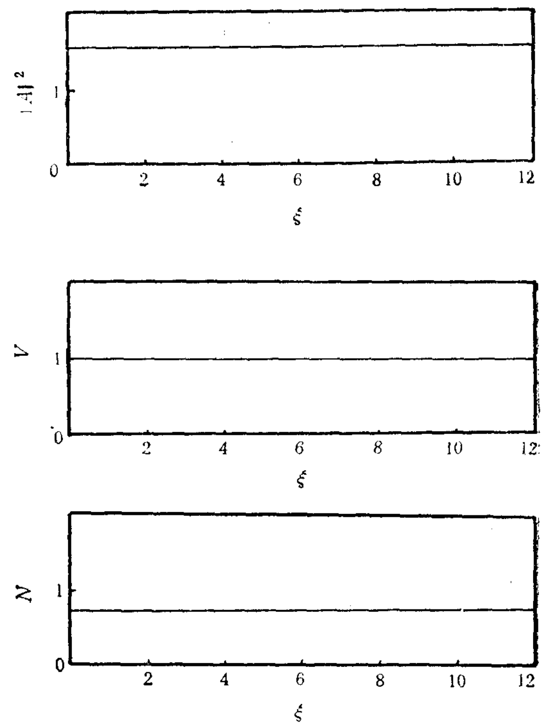

图 3　$(1-N_s)|A_s|^2=\left|\frac{\partial A}{\partial\xi}\right|_s^2$ 时的 $|A|^2$，V 和 N 的空间分布

在这种情况下，由 (25)，(26)，(31) 和 (43) 式，可以得到

$$|A_s|^2=\frac{4N_s\left(V_1+\frac{1}{V_1}-2\right)-2(V_1^2-2\ln V_1-1)}{N_s\left[1-\frac{4\left(V_1+\frac{1}{V_1}-2\right)}{2(V_1^2-2\ln V_1-1)}\right]}. \tag{44}$$

如果 $V_1>1$，则总有 $4\left(V_1+\frac{1}{V_1}-2\right)<2(V_1^2-2\ln V_1-1)$，而由(43)式 N_s 又必须小于或等于 1，于是导致 $|A_s|^2<0$，显然，这是不可能的. 因而，只可能有 $V_1=1$ 的情况. 同样的论证适用于 $V_2(\leqslant 1)$，这时，只需把(44)式中的 V_1 换成 V_2. 由

$$4\left(V_2+\frac{1}{V_2}-2\right)>2(V_2^2-2\ln V_2-1)$$

将导致 $|A_s|^2<0$，除非 $V_2=1$. 因而(44)式只在 $V_1=V_2=1$ 时才成立. 在这种情况下，给定 N_s 和 $|A_s|^2$ 两个量就可以求得其余各个量：$|A_1|^2=|A_2|^2=|A_s|^2$，$N_1=N_2=N_s$，$\left|\frac{\partial A}{\partial\xi}\right|_1^2=\left|\frac{\partial A}{\partial\xi}\right|_2^2=\left|\frac{\partial A}{\partial\xi}\right|_s^2$. 这是两参量解族，其解适用于描述密度小于临界密度的均

匀等离子体．入射光振幅 $|A_0|$ 与 $|A_s|$ 之间有如下关系：

$$|A_s| = A_0/(1 - N_s)^{1/4}. \tag{45}$$

图 3 示出了这类结构的速度、密度和 $|A|^2$ 的空间分布．可以看到，由于有质动力 $\frac{d|A|^2}{d\xi} \equiv 0$，所以速度和密度分布不受入射光场的影响．

还可以有其他一些特殊情况．这里主要是对 $|A_1|$，$|A_2|$ 和 $|A_s|$ 的极值情况进行讨论．如果把各种情况下的 $|A_0|$ 与 $|A_s|$ 等参量之间的关系代入 (18) 式，就可以求得所讨论情况的等离子体密度标度长度．

最后，我们必须指出，(41) 和 (42) 式给出的 $|A_0|$ 与 $|A_s|$ 等参量之间的关系只是近似的，因为稳态结构实际上不能匹配到真空边界．用准稳态的边界条件连接将改善其近似程度．在此，我们不予讨论．此外，$(1 - N_1)|A_1|^2 = \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_1^2$ 的情况导致与 $(1 - N_s)|A_s|^2 = \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|_s^2$ 同样的结果 ($V_1 = V_2 = 1$)，在此也不另列出．

参 考 文 献

[1] K. Lee *et al.*, *Phys. Fluids*, **20**(1977), 51.

[2] R. Fedosejevs, M. D. J. Burgess, G. D. Enright and M. C. Richardson, *Phys. Fluids*, **24**(1981), 537.

[3] 沈文达、朱莳通，光学学报，**4**(1984)，979.

[4] 朱莳通、沈文达，物理学报，**35**(1986)，882.

[5] K. Estabrook and W. L. Kruer, *Phys. Fluids*, **26**(1983), 1888; also see Ref. [1]

[6] 沈文达、朱莳通，光学学报，**7**(1987)，1002.

[7] 朱莳通、沈文达，科学通报，**32**(1987)，1268.

THREE-PARAMETER FAMILY OF SOLUTIONS FOR STEADY-STATE SELF-CONSISTENT DENSITY PROFILE

SHEN WEN-DA

(Department of Physics, Shanghai University of Science and Technology)

ZHU SHI-TONG

(Center of Theoretical Physics CCAST (World Laboratory); Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Exact analytic method is used to derive a threeparameter family of solutions for the steady-state selfconsistent density profile in a laser plasma. Several special cases are discussed, and the density profile of plateau structure given by Lee *et al.* is shown to be just one of these cases.