

矩形波导中两层流体界面上的 非传播孤立波*

颜家壬 黄国翔 黄念宁

(湘潭大学物理系) (武汉大学物理系; 华中工学院物理系)

1987 年 4 月 27 日收到

提 要

本文用多重尺度微扰方法研究了矩形波导中二水平固壁间两层不可压无粘流体界面上重力-表面张力波的非线性调制, 将 Larraza 和 Putterman 的理论进行了推广, 并计入了表面张力, 得出了第一阶调制波满足非线性 Schrödinger 方程, 求出了非传播孤波解, 并对结果进行了讨论.

一、引 言

Benjamin 和 Feir 关于二维 Stokes 波的稳定性问题的研究^[1], 激起了人们对有限水深非线性调制理论的极大兴趣. 1972 年, Hasimoto 和 Ono 利用多重尺度法研究了二维等深度重力水波^[2]. 1974 年, Davey 和 Stewartson 将此推广到三维情形^[3]. 后来 Djordjevic 和 Redekopp 进一步考虑了表面张力效应^[4]. Ablowitz 和 Segur 综合了这方面的发展概况^[5]. 前不久, Wu Junru 等人在实验室发现了表面传播孤波^[6]. 随后, Larraza 和 Putterman 及 Miles 提出了非传播表面孤波的波导理论^[7,8]. 最近, 王本仁、魏荣爵等人进一步观察了槽的尺寸对孤波形状的影响, 仔细测量了孤波横向运动波形, 给出了与实验相当符合的孤波表面位移的近似公式^[9]. 本文研究矩形波导中二水平固壁间两层不可压无粘性流体界面上的重力-表面张力波的非线性调制, 推出了第一阶非线性调制波所满足的非线性 Schrödinger 方程, 将 Larraza 和 Putterman 的理论进行了推广, 求出了计入表面张力的非传播孤波解. 当上下两层流体的密度比 $\eta = \rho_2/\rho_1$ 等于零, 表面张力系数 α 很小时, 结果与文献[10]一致; 当 η, α 均为零时, 便回到 Larraza 和 Putterman 理论的结果.

二、物 理 模 型

考虑长为 l , 宽为 b , 高为 d 的矩形槽 ($b, d \ll l$), 其中充满两层不可溶混的理想流

* 国家自然科学基金资助的课题.

体, 设下层流体密度为 ρ_1 , 深度为 d_1 ; 上层密度为 ρ_2 , 深度为 d_2 ($d_1 + d_2 = d$), 引进直角坐标系, 其 x, y, z 轴分别平行于槽的长、宽、高方向, 并取二流体静止时的界面为 $z = 0$ 平面, 用 $\psi(x, y, z, t)$, $\phi(x, y, z, t)$ 分别表示上下层流体无旋运动的速度势, $\xi(x, y, t)$ 表示有扰动时二流体界面的位移, 则 ϕ, ψ, ξ 满足如下运动方程与边界条件:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad -d_1 \leq z \leq \xi(x, y, t), \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad \xi(x, y, t) \leq z \leq d_2, \quad (2)$$

$$\begin{cases} \phi_y = 0 \\ \psi_y = 0 \end{cases} \quad y = 0, b, \quad (3)$$

$$\phi_z = 0 \quad z = -d_1, \quad (4)$$

$$\psi_z = 0 \quad z = d_2, \quad (5)$$

$$\xi_t - \phi_z + \phi_x \xi_x + \phi_y \xi_y = 0 \quad (7)$$

$$\xi_t - \psi_z + \psi_x \xi_x + \psi_y \xi_y = 0 \quad z = \xi(x, y, t) \quad (8)$$

$$\begin{cases} g\xi + \phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \eta \left[g\xi + \psi_t + \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 \right] \\ = \sigma \frac{\xi_{xx}(1 + \xi_y^2) + \xi_{yy}(1 + \xi_x^2) - 2\xi_x \xi_y \xi_{xy}}{(1 + \xi_x^2 + \xi_y^2)^{3/2}}, \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\eta = \rho_2/\rho_1$, $\sigma = \alpha/\rho_1$, 右下标代表对该变量求偏导数, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

按文献 [6], [7] 和 [9], 我们研究在 y 方向以高频 ω 振动, 在 x 方向由 $\xi_1(x, t)$ 所调制的弱非线性表面波, 引入无量纲小参数 ε ,

$$k\xi_{\max} = \varepsilon \ll 1. \quad (10)$$

我们寻求满足下列条件:

$$\frac{1}{k\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = O(\varepsilon), \quad \frac{1}{\omega\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = O(\varepsilon^2), \quad (11a, b)$$

$$\frac{d \log \xi / dx}{d \log \xi / dy} = O(\varepsilon), \quad \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 = O(\varepsilon^2) \quad (11c, d)$$

的解, 其中

$$\omega_0^2 = \frac{kT_1 T_2 [k^2 \sigma + g(1 - \eta)]}{T_2 + \eta T_1}, \quad (12)$$

$$k = \pi/b, T_j = \tanh k d_j (j = 1, 2). \quad (13)$$

不难验证, 满足 Laplace 方程 (1), (2) 及边界条件 (3)–(6) 式的多重尺度解为

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\cosh k(z + d_1)}{\cosh k d_1} \cos ky [\phi_1 e^{i\omega t} + \text{c. c.}] + [\phi_0^{(2)} e^{2i\omega t} + \text{c. c.}] \\ &+ \frac{\cosh 2k(z + d_1)}{\cosh 2k d_1} \cos 2ky [\phi_2 e^{2i\omega t} + \text{c. c.} + \phi_2^{(0)}] \\ &- \frac{1}{2k} \frac{z \sinh k(z + d_1) - d_1 \exp[-k(z + d_1)]}{\cosh k d_1} \cos ky [\phi_{1xx} e^{i\omega t} + \text{c. c.}] \\ &+ \phi_0(x + i(z + d_1), t) + \phi_0(x - i(z + d_1), t) + O(\varepsilon^3), \quad (14) \\ \psi &= \frac{\cosh k(z - d_2)}{\cosh k d_2} \cos ky [\psi_1 e^{i\omega t} + \text{c. c.}] + [\psi_0^{(2)} e^{2i\omega t} + \text{c. c.}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cosh 2k(z-d_2)}{\cosh 2kd_2} \cos 2ky[\phi_2 e^{2i\omega t} + \text{c. c.} + \phi_2^{(0)}] \\
& - \frac{1}{2k} \frac{z \sinh k(z-d_2) + d_2 \exp[-k(z-d_2)]}{\cosh kd_2} \cos ky[\phi_{1xz} e^{i\omega t} + \text{c. c.}] \\
& + \phi_0(x + i(z-d_2), t) + \phi_0(x - i(z-d_2), t) + O(\varepsilon^4), \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi(x, y, t) = & \cos ky[\xi_1 e^{i\omega t} + \text{c. c.}] + \xi_0(x, t) \\
& + \cos 2ky[\xi_2 e^{2i\omega t} + \text{c. c.} + \xi_2^{(0)}] + O(\varepsilon^3), \quad (16)
\end{aligned}$$

其中 c. c. 代表复共轭项.

三、波的弱非线性调制

将(14)–(16)式代入运动学边界条件(7), (8)式及动力学边界条件(9)式中, 注意(10), (11)式, 然后比较 $\cos mky e^{in\omega t}$ 的系数, 可得到各级微扰近似方程

1. 一级近似——线性化理论

略去 $O(\varepsilon^2)$ 项, 得到一级近似方程

$$i\omega_0 \xi_1 - kT_1 \phi_1 = 0, \quad (17)$$

$$i\omega_0 \xi_1 + kT_2 \phi_1 = 0, \quad (18)$$

$$i\omega_0 \phi_1 + g\xi_1 - \eta(i\omega_0 \phi_1 + g\xi_1) = -k^2 \sigma \xi_1, \quad (19)$$

或

$$\phi_1 = i\omega_0 \xi_1 / kT_1, \quad (20)$$

$$\phi_1 = -i\omega_0 \xi_1 / kT_2, \quad (21)$$

$$\omega_0^2 = \frac{[k^2 \sigma + g(1-\eta)]kT_1 T_2}{T_2 + \eta T_1}. \quad (22)$$

(22)式即为两层流体界面波的线性色散关系. 考虑(0,1)模式, 故 $k = \pi/b$. (22)式与文献[10]中的(3-4)式(当 $\eta = 0$)及文献[7]中的(11)式(当 $\alpha = \eta = 0$)相一致.

2. 二级近似

略去 $O(\varepsilon^3)$ 项, 得到二级近似方程

$$2i\omega \xi_2 - k^2 \phi_1 \xi_1 = 2k \tanh 2kd_2 \cdot \phi_2, \quad (23)$$

$$2i\omega \xi_2 - k^2 \phi_1 \xi_1 = -2k \tanh 2kd_2 \cdot \phi_2, \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
& g\xi_0 + \frac{k^2}{2}(1+T_1^2)|\phi_1|^2 + i\omega k T_1 \phi_1 \xi_1^* \\
& - \eta \left[g\xi_0 + \frac{k^2}{2}(1+T_1^2)|\phi_1|^2 - i\omega k T_1 \phi_1 \xi_1^* \right] = 0, \quad (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g\xi_2^{(0)} + \frac{k^2}{2}(T_1^2 - 1)|\phi_1|^2 + \frac{i\omega k T_1}{2}(\xi_1^* \phi_1 - \xi_1 \phi_1^*) \\
& - \eta \left[g\xi_2^{(0)} + \frac{k^2}{2}(T_2^2 - 1)|\phi_1|^2 - \frac{i\omega k T_2}{2}(\xi_1^* \phi_1 - \xi_1 \phi_1^*) \right] = -4\sigma k^2 \xi_2^{(0)}, \quad (26)
\end{aligned}$$

$$g\xi_2 + 2i\omega\phi_2 + \frac{i\omega k T_1}{2} \phi_1 \xi_1 + \frac{k^2}{4} (T_1^2 - 1)\phi_1^2 - \eta \left[g\xi_2 + 2i\omega\phi_2 - \frac{i\omega k T_2}{2} \phi_1 \xi_1 + \frac{k^2}{4} (T_2^2 - 1)\phi_1^2 \right] = -4\sigma k^2 \xi_2, \quad (27)$$

$$2i\omega\phi_0^{(2)} + \frac{i\omega k T_1}{2} \xi_1 \phi_1 + \frac{k^2}{4} (1 + T_1)\phi_1^2 - \eta \left[2i\omega\phi_0^{(2)} - \frac{i\omega k T_2}{2} \xi_1 \phi_1 + \frac{k^2}{4} (1 + T_2)\phi_1^2 \right] = 0, \quad (28)$$

$$\phi_1^{(0)} = 0, \quad (29)$$

$$\phi_2^{(0)} = 0. \quad (30)$$

利用线性化理论的结果, 有

$$\xi_0 = \frac{\omega^2 \mu}{g(1 - \eta)} |\xi_1|^2, \quad (31)$$

$$\xi_1^{(0)} = \frac{2\omega^2 \nu}{g(1 - \eta) + 4\sigma k^2} |\xi_1|^2, \quad (32)$$

$$\xi_2 = \frac{\mu - \nu}{\lambda} \omega^2 \xi_1^2, \quad (33)$$

$$\phi_2 = -\frac{1 + T_1}{4kT_1} i\omega \left[2\frac{(\nu - \mu)}{\lambda} \omega^2 + \frac{k}{T_1} \right] \xi_1^2, \quad (34)$$

$$\phi_1 = -\frac{1 + T_2}{4kT_2} i\omega \left[2\frac{(\nu - \mu)}{\lambda} \omega^2 - \frac{k}{T_2} \right] \xi_1^2, \quad (35)$$

$$\phi_0^{(2)} = -\frac{i\omega}{8T_1^2} (1 + 3T_1^2) \xi_1^2, \quad (36)$$

$$\phi_0^{(2)} = -\frac{i\omega}{8T_2^2} (1 + 3T_2^2) \xi_1^2, \quad (37)$$

$$\phi_2^{(0)} = 0, \quad (29)$$

$$\phi_1^{(0)} = 0, \quad (30)$$

其中

$$\mu = (1 - \eta) - \frac{1 + T_1^2}{2T_1^2} + \eta \frac{1 + T_2^2}{2T_2^2}, \quad (38)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \left[1 - \eta - \frac{T_1^2 - 1}{2T_1^2} + \eta \frac{T_2^2 - 1}{2T_2^2} \right], \quad (39)$$

$$\lambda = g(1 - \eta) + 4\sigma k^2 - \left(\frac{1 + T_1}{kT_1} + \eta \frac{1 + T_2^2}{kT_2} \right) \omega^2. \quad (40)$$

3. 三级近似

略去 $O(\epsilon^4)$ 项, 经过较为冗长的计算, 得到 ξ_1 所满足的方程

$$2i\omega\xi_{1t} - c^2\xi_{1xx} + Q_1\xi_1 - Q_2|\xi_1|^2\xi_1 = 0 \quad (41)$$

或

$$2i\omega\phi_{1t} - c^2\phi_{1xx} + Q_1\phi_1 - \frac{k^2 T_1^2}{\omega^2} Q_2|\phi_1|^2\phi_1 = 0, \quad (42)$$

$$2i\omega\phi_{1t} - c^2\phi_{1xx} + Q_1\phi_1 - \frac{k^2T_2^2}{\omega^2} Q_2|\phi_1|^2\phi_1 = 0, \quad (43)$$

其中

$$c^2 = \frac{1}{k(T_2 + \eta T_1)} \left[\frac{\omega_0^2 T_2}{g T_1} c_1^2 + \eta \frac{\omega_0^2 T_1}{g T_2} c_2^2 + \sigma k^2 T_1 T_2 \right], \quad (44)$$

$$Q_1 = \omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\sigma k^3 T_1 T_2}{T_2 + \eta T_1}, \quad (45)$$

$$Q_2 = \frac{1}{T_2 + \eta T_1} \left[\frac{\omega_0^2 A_1}{k^2 T_1^2} T_2 + \frac{\omega_0^2 A_2}{k^2 T_2^2} \eta T_1 + \frac{9}{8} \sigma k^3 T_1 T_2 \right], \quad (46)$$

$$c_1^2 = \frac{g}{2k} [T_1 + k d_1 (1 - T_1^2)], \quad (47)$$

$$c_2^2 = \frac{g}{2k} [T_2 + k d_2 (1 - T_2^2)], \quad (48)$$

$$A_1 = k^2 T_1^2 \left\{ \frac{\omega_0^2 k \nu (1 + T_1^2)}{T_1 [g(1 - \eta) + 4\sigma k^2]} - \frac{\omega^2 k \mu (1 - T_1^2)}{g(1 - \eta) T_1} + \frac{k}{2T_1} \left[\frac{2(\nu - \mu)}{\lambda} \omega_0^2 + \frac{k}{T_1} \right] + \frac{\omega^2 k (\nu - \mu)}{2\lambda T_1} (1 - T_1^2) \right\}, \quad (49)$$

$$A_2 = k^2 T_2^2 \left\{ - \frac{\omega_0^2 k \nu (1 + T_2^2)}{T_2 [g(1 - \eta) + 4\sigma k^2]} + \frac{\omega_0^2 k \mu (1 - T_2^2)}{g(1 - \eta) T_2} - \frac{k}{2T_2} \left[\frac{2(\nu - \mu)}{\lambda} \omega^2 - \frac{k}{T_2} \right] - \frac{\omega_0^2 k (\nu - \mu)}{2\lambda T_2} (1 - T_2^2) \right\}. \quad (50)$$

(41)–(43) 式即为非线性 Schrödinger 方程, 可见界面波由 $\xi_1(x, t)$ 弱非线性调制.

四、非传播孤波解及结果讨论

积分 (41) 式, 当 $Q_2 > 0$ 时, 给出包络单孤波解

$$\xi_1(x, t) = -i \left(\frac{2Q_1}{Q_2} \right)^{\frac{1}{2}} a \frac{\exp\{ibx + i[Q_1(1 - a^2) + c^2 b^2]t/2\omega\}}{\cosh[(Q_1/c^2)^{\frac{1}{2}} a(x + c^2 b t/\omega)]}, \quad (51)$$

其中 a, b 为由初条件所决定的两实常数, 且 $a > 0$, 多孤波解可由标准的逆散射法求得^[11].

我们特别感兴趣的是当 $a = 1, b = 0$ 的特殊情形, 这时 (51) 式退化为

$$\xi_1(x, t) = -i \left(\frac{2Q_1}{Q_2} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sech} \left[\left(\frac{Q_1}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} x \right]. \quad (52)$$

从 (17), (18) 式可进一步求出

$$\begin{aligned} \phi_1(x, t) &= \frac{\omega}{k T_1} \left(\frac{2Q_1}{Q_2} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sech} \left[\left(\frac{Q_1}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} x \right], \\ \phi_2(x, t) &= -\frac{\omega}{k T_2} \left(\frac{2Q_1}{Q_2} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sech} \left[\left(\frac{Q_1}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} x \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

它们就是 Wu Junru 在实验室中所观察到的非传播孤波 (只不过是 在一种液体的表面上)^[6].

由(16),(31)–(33)及(51)式得到两层流体的界面波为

$$\begin{aligned} \xi(x, y, t) = & \cos ky [\xi_1 e^{i\omega t} + \text{c. c.}] + \frac{\omega^2 \mu}{g(1-\eta)} |\xi_1|^2 \\ & + \cos 2ky \left[\frac{\mu - \nu}{\lambda} \omega^2 \xi_1^2 e^{2i\omega t} + \text{c. c.} \right] \\ & + \cos 2ky \frac{2\omega^2 \nu}{g(1-\eta) + 4\sigma k^2} |\xi_1|^2 + O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (54)$$

最后对结果作几点讨论.

1. 形成孤波的条件

(52)式满足(41)式的条件是 $\frac{2Q_1}{Q_2} > 0$. 下面我们将要指出 $Q_1 > 0$. 因此

$$Q_1 = \frac{1}{T_1 + \eta T_2} \left[\frac{\omega_0^2 A_1}{k^2 T_1^2} T_1 + \frac{\omega_0^2 A_2}{k^2 T_2^2} \eta T_1 + \frac{9}{8} \sigma k^3 T_1 T_2 \right] > 0, \quad (55)$$

其中 ω_0 的值由(12)式给出. 如果采用 Faraday 的实验方法^[6,9,12], 则槽宽 b 以及流体深度 d, d_1 必须调节以满足(55)式, 才有可能激发出孤波. 对于单层流体, 且不考虑表面张力时, $\sigma = \eta = 0, T_1 = T_2$. (55)式退化为 $Q_1 = A = \frac{1}{8} k^4 (6T^4 - 5T^2 + 16 - 9T^{-2}) > 0$, 即 $kd > 1.022$, 就回到了文献[7]的结果.

2. 孤波的横向振动频率范围

从解的表式(52),(53)式不难看出, 它们确为孤波解的另一条件是 $Q_1^{\frac{1}{2}}$ 为实数, 即

$$Q_1 = \omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\sigma k^3 T_1 T_2}{T_2 + \eta T_1} > 0 \text{ 或 } \omega^2 < \omega_0^2 + \frac{\sigma k^3 T_1 T_2}{T_2 + \eta T_1}. \quad (56)$$

它给出横向振动频率 ω 的上限, ω 的下限决定于依赖振幅的截止频率^[7], 即 $Q_2 |\xi_1|^2 - Q_1 > 0$ 或

$$\omega^2 > \omega_0^2 + \frac{\sigma k^3 T_1 T_2}{T_2 + \eta T_1} - Q_2 |\xi_1|^2. \quad (57)$$

只有当驱动频率 2ω 同时满足(56)与(57)式时, 才能激发出孤波. 当 $\sigma = \eta = 0$ 时, (56),(57)式退化为

$$\omega_0^2 - A_1 |\xi_1|^2 < \omega^2 < \omega_0^2. \quad (58)$$

与文献[7]的结果完全一致.

3. 二次谐波共振现象

由(33)–(35)式可知, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 展式(14)–(16)式失效, 由此可见, 两种流体介质的色散必须是 $O(1)$ 的数量级. 且 η, σ, T_1, T_2 之间必须满足一定的关系, 以使 $\lambda \neq 0$, 否则将出现二次谐波共振现象. 这一情况已为 Larraza 和 Putterman 所注意到^[7]. 这时必须引入另外的多重尺度作微扰展开. 这一点将另文讨论.

4. 容易证明, 当 $\eta = 0, \sigma$ 很小时, 上述结果与文献[10]完全一致; 而当 $\eta = 0, \sigma = 0$ 时, 便回到了 Larraza 和 Putterman 的理论^[7].

参 考 文 献

[1] T. B. Benjamin & J. E. Feir, *J. Fluid Mech.*, 27(1967), 417.

- [2] H. Hasimoto & H. Ono, *J. Phys. Soc. Japan*, **33**(1972), 805.
 [3] A. Davey & K. Stewartson, *Proc. Roy. Soc., London*, **A338**(1974), 101.
 [4] V. D. Djordjevic & L. G. Redekepp, *J. Fluid Mech.*, **79**(1977), 703.
 [5] M. J. Ablowitz & H. Segur, *J. Fluid Mech.*, **92**(1979), 691.
 [6] Junru Wu *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1421.
 [7] A. Larraza & S. Putterman, *J. Fluid Mech.*, **118**(1984), 443.
 [8] J. W. Miles, *J. Fluid Mech.*, **148**(1984), 451.
 [9] Wang Benren (王本仁), WEI Ronquie (魏荣爵) *et al.*, *Chinese Phys. Lett.*, **3**(1986), 213.
 [10] 颜家壬、黄匡翔, *应用数学与力学*, **8**(10)(1987), 925.
 [11] V. E. Zakharov & A. B. Shabat, *Sov. Phys. JETP*, **34**(1972), 62.
 [12] M. Faraday, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, **121**(1831), 299.

NON-PROPAGATING SOLITARY WAVES ON THE INTERFACE BETWEEN TWO LAYERS OF FLUIDS IN RECTANGULAR WAVEGUIDE

YAN JIA-REF HUANG GUO-XIANG

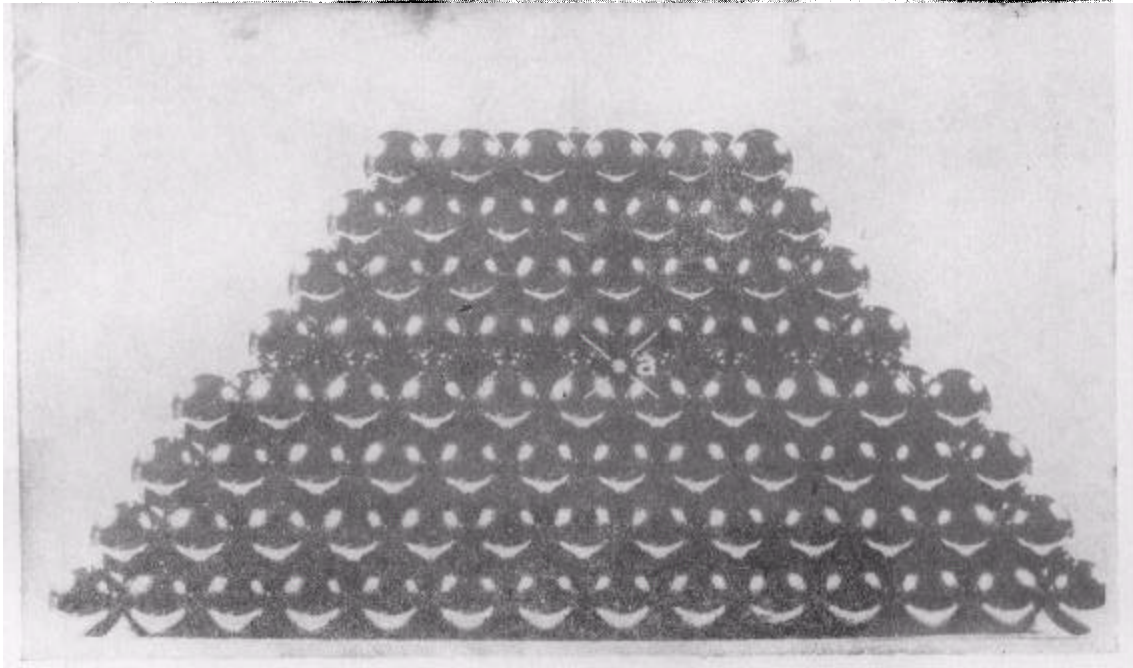
(Department of Physics, Xiangtan University)

HUANG NIAN-NING

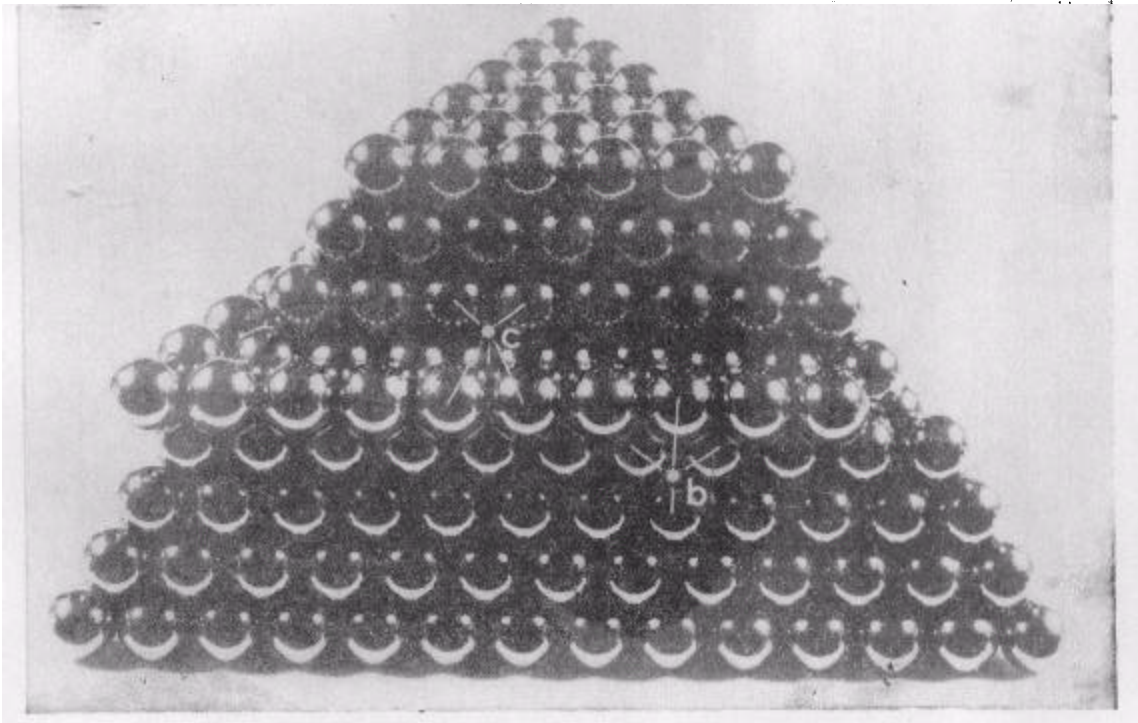
(Department of Physics, Wuhan University; Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology)

ABSTRACT

We studied the nonlinear modulation of the gravitation surface-tension waves on the interface between two layers of incompressible inviscid fluids which are contained in a rectangular waveguide with horizontal solid walls, by the method of multiple scales technique, and generalized the theory of Larraza and Putterman. Including the surface-tension effects, we found that the first order modulated wave satisfies the cubic Schrodinger equation. Then we derived the non-propagating solitary solution, and made some discussion on the results obtained.



(a) 高为 $\frac{1}{3} \delta_{(111)}$ 的亚台阶



(b) 高为 $\frac{2}{3} \delta_{(111)}$ 的亚台阶及全台阶

图3 面心立方晶体(111)面上亚台阶的原子组态



(a) 淬态 $\text{Al}_{80}\text{Mn}_{20}$ 合金准晶 T 相的 TEM 明场像



(b) 对应于 (a) 所示区域的电子衍射图样

图 1