

# 管状和闭合磁畴壁的拓扑分类\*

阎凤利

李伯臧

(河北师范大学物理系) (中国科学院物理研究所)

1987 年 2 月 9 日收到

## 提 要

本文从拓扑学角度,对管状磁畴壁和闭合磁畴壁静态结构的分类问题,做了统一处理. 这两种磁畴壁的同伦类集合  $G_{\mathbb{Z}}^n$  和  $\bar{G}_{\mathbb{Z}}^n$ , 分别与  $S^2 \rightarrow S^2$  和  $S^3 \rightarrow S^2$  的  $n+1$  基点连续映射的相对同伦类集合是一一对应的,因而构成同构于整数加群  $\mathbb{Z}$  的群,分别称为  $n$  式管壁群和  $n$  式闭壁群. 重新讨论了 Slonczewski 等人定义的“绕数”,找出了用它表征管壁类的充要条件. 此外,讨论了  $M$  个管壁和  $N$  个闭壁共存时磁化状态的同伦类集合  $G_{\mathbb{Z}}^{M,N}$ , 证明了它构成同构于  $M+N$  维格矢群  $\mathbb{Z}^{M+N}$  的群,叫做  $[M, N]$  式混壁群.

## 一、引 言

如果交换作用比磁各向异性强得多,则当我们仅涉及平衡状态和低速过程时,可按微磁学<sup>[1]</sup>(即连续近似<sup>[2]</sup>)观点,以连续矢量场即磁化强度  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  来描述铁磁体的磁化状态. 在居里点以下,铁磁体中各点  $\mathbf{r}$  处的  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) \equiv |\mathbf{M}(\mathbf{r})|$  均不为零,且一般是温度的已知函数. 因此,可将单位矢量场(仍叫做磁化强度)  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{M}(\mathbf{r})/M(\mathbf{r})$  取为铁磁体的序参量,从而序参量空间是二维球面  $S^2$ .

从拓扑学<sup>[3]</sup>的角度看,有序介质在任一过程中,其初态、终态和一系列中间状态的序参量分布都是互相同伦的. 因此,将序参量的同伦类定义为有序介质状态的拓扑类是合适的<sup>[4-7]</sup>.

铁磁体中畴壁(或等价地,磁畴)结构的类,正是磁化矢量场  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  在一定条件下的相对同伦类. 关于磁畴壁拓扑分类的一般理论,我们将在另文给出. 本文只讨论管状磁畴壁和闭合磁畴壁的静态结构的拓扑分类问题.

光磁盘<sup>[8]</sup>、磁泡<sup>[9]</sup>和 Bloch 线<sup>[10]</sup>等存储技术中所使用的磁性薄膜,具有适当大小的,垂直于膜面的单轴磁各向异性,使磁畴壁(管壁)呈垂直于膜面的管状,由它界开的磁畴(管畴和芯畴)的磁化方向亦垂直于膜面. 畴壁结构对使用功能有显著的影响,特别在 Bloch 线存储技术中,壁中的垂直 Bloch 线被用作存储单元.

在反磁化形核<sup>[11]</sup>过程中,则可以碰到闭合壁结构,即在磁体内部的一个(或多个)区域(核畴)里,磁化方向与包围它(们)的一个壳层(壳畴)中的磁化方向相异,核畴和壳畴之

\* 中国科学院科学基金资助的课题.

间的区域便是闭合磁畴壁(闭壁)。

本文首先采用我们的简化位形空间的方法<sup>[12]</sup>,把这两种畴壁的拓扑分类问题,分别化作  $S^2 \rightarrow S^2$  和  $S^3 \rightarrow S^2$  的  $n+1$  基点连续映射来处理,然后利用我们的多基点同伦群理论<sup>[13]</sup>,证明管壁和闭壁类集合,  $G_W^{(n)}$  和  $\bar{G}_W^{(n)}$  均构成同构于整数加群  $\mathbb{Z}$  的群。我们分别称之为  $n$  式管壁群和  $n$  式闭壁群。这里上脚标  $n$  是单个管壁或闭壁所包围的芯畴或核畴的数目。

我们还讨论了  $M$  个管壁和  $N$  个闭壁共存的磁化状态的分类问题,证明它们的类集合  $G_W^{(M,N)}$  与直积集合  $G_W^{(p,1)} \times \cdots \times G_W^{(p,M)} \times \bar{G}_W^{(p,1)} \times \cdots \times \bar{G}_W^{(p,N)}$  一一到上对应,因而构成与  $M+N$  维格矢群  $\mathbb{Z}^{M+N}$  同构的群。称为  $[M, N]$  式混壁群。

Slonczewski<sup>[14]</sup> 曾经对泡畴壁结构的分类问题进行过直观的研究,引入所谓的“绕数”来表征这些类。但从广义上说,Slonczewski 的理论是不完善的。我们重新讨论了这个问题,找出了 Slonczewski 方法适用的充要条件。

## 二、1 式管壁群 $G_W^{(1)}$

若在磁性介质  $D$  中存在两个互不相交的管状曲面  $A_c$  和  $A_d$ , 它们的端口在磁性介质的表面上 (若磁性介质为无穷大,则表面是无穷远处的区域),  $A_d$  被  $A_c$  包围,使磁体  $D$  在外管面  $A_c$  外侧的区域(管畴)  $D_c$  及内管面  $A_d$  内部的区域(芯畴)  $D_d$ , 磁化矢量各取一个恒定的方向,这两个方向可相同,亦可不同。这样的磁化矢量场称为一个管壁结构 ( $D_c$  和  $D_d$  间的管状区域  $W$  即为管壁),或等价地称为一个柱状磁畴结构。如图 1 所示。

记这种管壁磁化态  $v(r)$  的集合为  $M(D)$ :

$$M(D) \equiv (S^2, \mathbf{c}, \mathbf{d})^{(D_c, D_d)} = \{v | v: D \rightarrow S^2, v(D_c) = \mathbf{c}, v(D_d) = \mathbf{d}\}. \quad (1)$$

这里  $\mathbf{c}$  和  $\mathbf{d}$  为序参量空间  $S^2$  上的两点(可以不同,亦可相同),分别代表管畴  $D_c$  和芯畴  $D_d$  中的磁化方向。以  $G_W^{(1)}$  记  $M(D)$  中相对于  $(D_c, D_d)$  的同伦类集合,并称之为 1 式管壁类集合。

经过  $D$  的一个同胚形变后,  $(D, D_c, D_d)$  可以强形变收缩为  $(V^2, \partial V^2, \mathbf{b})$ , 此处  $V^2$  为  $D$  中的一个圆片面,  $\partial V^2 (\subset D_c)$  为其边界(圆周),  $\mathbf{b} (\in D_d)$  为其中心。因此,  $G_W^{(1)}$  与映射(即连续映射,下同)集合  $M(V^2) \equiv (S^2, \mathbf{c}, \mathbf{d})^{(V^2, \partial V^2, \mathbf{b})}$  的相对于  $(\partial V^2, \mathbf{b})$  的同伦类集合  $N(V^2)$  一一到上对应<sup>[12]</sup>。再把  $\partial V^2$  粘合成一点  $\mathbf{a}$ , 圆片便变成包含点  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$

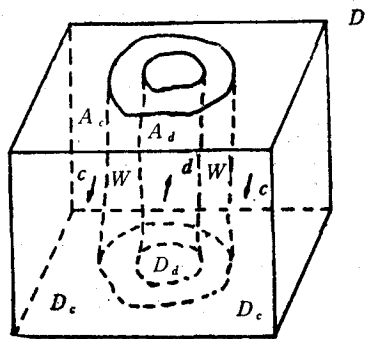


图 1

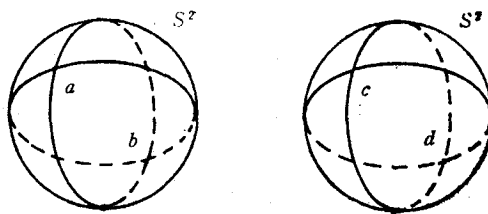


图 2

的二维球面  $S^2$  (图 2). 于是  $N(V^1)$  与  $M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv (S^2, \mathbf{c}, \mathbf{d})^{(S^2, \mathbf{a}, \mathbf{b})}$  的相对于  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  的(双基点)同伦类集合  $N(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  一一到上对应<sup>[3]</sup>.

由以上讨论得到

**定理 1** 1 式管壁类集合  $G_W^{(1)}$  与  $S^2 \rightarrow S^2$  的双基点同伦类集合  $N(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  一一到上对应.

据此命题, 管壁的拓扑分类便被简化成  $S^2 \rightarrow S^2$  的双基点映射的拓扑分类.

我们已经证明<sup>[3]</sup>,  $N(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  与  $M(\mathbf{a}) \equiv (S^2, \mathbf{c})^{(S^2, \mathbf{a})}$  的同伦类集合  $N(\mathbf{a})$  或  $M \times (\mathbf{b}) \equiv (S^2, \mathbf{d})^{(S^2, \mathbf{b})}$  的同伦类集合  $N(\mathbf{b})$  一一到上对应. 后二者均是同构于整数加群  $Z$  的群<sup>[3]</sup>. 令

$$N(\mathbf{a}) = \{\alpha_i | i \in Z\}, \quad N(\mathbf{b}) = \{\beta_i | i \in Z\}, \quad (2)$$

式中  $\alpha_i$  (或  $\beta_i$ ) 的脚标  $i$  是该类的拓扑度<sup>[3]</sup>,  $Z$  在此处代表整数集合. 并有<sup>[3]</sup>

$$N(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\gamma_i | i \in Z\}, \quad (3)$$

$$\gamma_i = \alpha_i \cap \beta_i.$$

对于  $N(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  中的任意两个类  $\gamma_i$  和  $\gamma_j$ , 令

$$\gamma_i \cdot \gamma_j \equiv (\alpha_i \cdot \alpha_j) \cap (\beta_i \cdot \beta_j) = \alpha_{i+j} \cap \beta_{i+j} = \gamma_{i+j}, \quad (4)$$

便得到  $N(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  中的结合运算. 上式中的  $\alpha_i \cdot \alpha_j$  和  $\beta_i \cdot \beta_j$  分别是群  $N(\mathbf{a})$  和群  $N(\mathbf{b})$  中的结合运算. 据此,  $N(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  也成为同构于整数加群  $Z$  的群.

按定理 1, 可把  $N(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  中的群结构过渡给  $G_W^{(1)}$ . 设  $G_W^{(1)} \rightarrow N(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  的一一对应关系为  $k$ , 定义  $G_W^{(1)}$  中任意一对管壁类  $\mu_i$  和  $\mu_j$  之间的结合为

$$\mu_i \cdot \mu_j = k^{-1}(\gamma_i) \cdot k^{-1}(\gamma_j) \equiv k^{-1}(\gamma_i \cdot \gamma_j) = \mu_{i+j}. \quad (5)$$

综合以上结果可得

**定理 2**  $G_W^{(1)}$  按(5)式所定义的结合运算构成同构于整数加群  $Z$  的群:

$$G_W^{(1)} \approx Z. \quad (6)$$

为了强调  $G_W^{(1)}$  的群性质, 有时将  $G_W^{(1)}$  称为 1 式管壁群. 对于任一管壁态  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ , 将  $G_W^{(1)}$  中包含它的类记为  $\langle \mathbf{v} \rangle$ . 把  $N(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  中与  $\langle \mathbf{v} \rangle$  对应的类  $k(\langle \mathbf{v} \rangle)$  (或其中的任一元作为  $S^2 \rightarrow S^2$  映射)的拓扑度赋予  $\mathbf{v}$  及  $\langle \mathbf{v} \rangle$ , 叫做  $\mathbf{v}$  及  $\langle \mathbf{v} \rangle$  的拓扑度, 分别记为  $T(\mathbf{v})$  及  $T(\langle \mathbf{v} \rangle)$ . 因此得到

**定理 3** 对于任二管壁态  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  和  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ , 当且仅当  $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$  时, 才有  $\langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle$ ; 即当且仅当它们的拓扑度相等时, 才能在保持管壁结构的情况下连续地互相转化. 此外,  $\forall \mu, \nu \in G_W^{(1)}$ , 有

$$T(\mu \cdot \nu) = T(\mu) + T(\nu). \quad (7)$$

值得指出, 在上面的讨论中, 管畴  $D_e$  的厚度和芯畴  $D_s$  的“直径”并不出现. 这表明: 管壁  $W$  厚度的变化并不影响前面所得到的结论; 因而, 可将  $D_e$  和  $D_s$  分别视为柱面和线段(这一点据文献[12]的理论是不难严格证明的).

### 三、群 $G_W^{(1)}$ 中结合运算的物理实现

不失一般性, 我们对铁磁体  $D$  做一个同胚形变, 使之变为半径为  $R$  的圆柱体, 并据上

节末所指出的,将管畴  $D_c$  和芯畴  $D_d$  分别取为圆柱体的侧面和轴线(图3)。如图3所示那样建立柱坐标系。

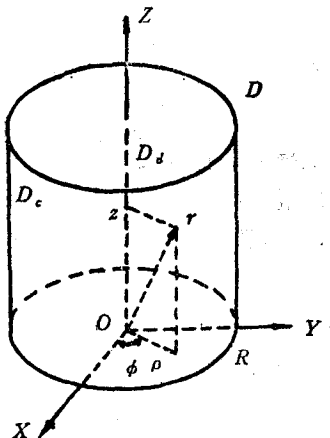


图 3

$G_W^{(D)}$  中的群运算可按多种方式来实现,下面仅举两种为例。

### 1. 套合

设  $u, v \in M(D) \equiv (S^2, c, d)^{(D, D_c, D_d)}$ , 将  $G_W^{(D)}$  中包含它们的类分别记为  $\langle u \rangle$  和  $\langle v \rangle$ . 任取一个零伦的  $\tau \in (S^2, d, c)^{(D, D_c, D_d)}$ . 定义

$$w(\rho, \phi, z) = \begin{cases} u(3\rho, \phi, z), & \rho \in [0, R/3]; \\ \tau(3\rho - R, \phi, z), & \rho \in [R/3, 2R/3]; \\ v(3\rho - 2R, \phi, z), & \rho \in [2R/3, R], \end{cases} \quad (8)$$

显然,  $w \in M(D)$ , 且

$$\langle w \rangle = \langle u \rangle \cdot \langle v \rangle. \quad (9)$$

形象地说,磁化分布  $w(r)$  是将  $u(r)$  压缩成半径为  $R/3$  的柱状分布,将  $\tau(r)$  变成内径和外径分别为  $R/3$  和  $2R/3$  的管状分布,将  $v(r)$  变成内径和外径分别为  $2R/3$  和  $R$  的管状分布,然后嵌套在一起而得到的。

### 2. 绕合

对于  $G_W^{(D)}$  中的任二类  $\mu$  和  $\nu$ , 总可找到  $u'$  和  $v' \in M(D)$ , 使  $\mu = \langle u' \rangle$ ,  $\nu = \langle v' \rangle$ , 而且对任意给定的  $(\rho, z)$ , 满足  $u'(\rho, 0, z) = u'(\rho, 2\pi, z) = v'(\rho, 0, z) = v'(\rho, 2\pi, z)$ . 令

$$w'(\rho, \phi, z) = \begin{cases} u'(\rho, 2\phi, z), & \phi \in [0, \pi]; \\ v'(\rho, 2\phi - 2\pi, z), & \phi \in [\pi, 2\pi], \end{cases} \quad (10)$$

则  $w' \in M(D)$ , 且易证

$$\langle w' \rangle = \langle u' \rangle \cdot \langle v' \rangle = \mu \cdot \nu. \quad (11)$$

可将这种结合形象地称为“绕合”。

## 四、关于管壁的绕数问题

假定  $c \neq d$ . 不妨设它们分别反平行和平行于  $Z$  轴, 从而是序参量空间  $S^2$  上的一对对径点(图4)。在  $D$  和  $S^2$  中分别如图4那样建立柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$  和球面坐标系  $(\theta, \Phi)$ 。

Slonczewski 等人<sup>[14]</sup>曾引入“绕数”来描述磁泡壁(系特殊管壁): 在管壁中心层 ( $\rho = R/2$ ) 取一与  $Z$  轴垂直的圆周  $L$  (图4)。沿  $L$  走一圈后, 磁化强度  $v(r)$  的方位角显然变化  $2\pi$  的整数倍。他们将此整数定义为管壁的绕数, 并认为两个管壁当且仅当它们的绕数相同时, 才能以不破坏管壁结构的方式互连续地转化。换言之, 有相同绕数的管壁属于  $G_W^{(D)}$  中的同一类。

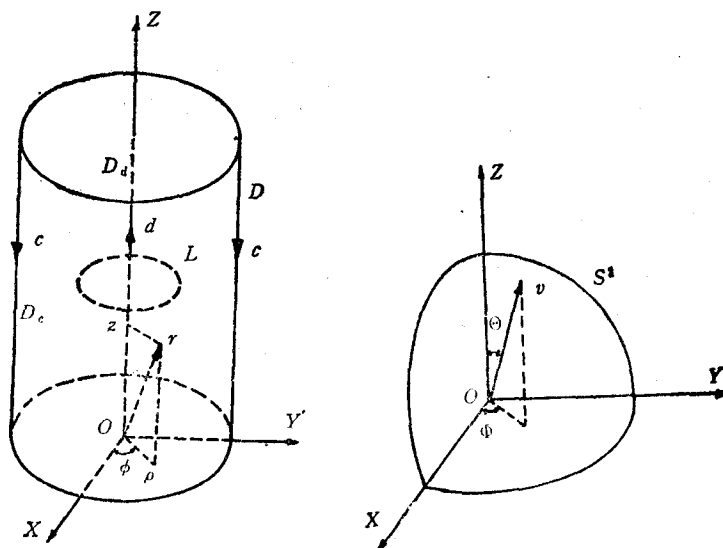


图 4

Slonczewski 等人的上述结论是不完善的。例如取

$$v_1(\rho, \phi, z) = \left( 2 \sin^{-1} \left( \frac{\rho}{R} \right), \phi \right); \quad (12)$$

$$v_2(\rho, \phi, z) = \begin{cases} \left( 2 \sin^{-1} \left( \frac{3\rho}{R} \right), \phi \right), & \rho \in [0, R/3]; \\ \left( 2 \sin^{-1} \left( \frac{3\rho - R}{R} \right), \phi \right), & \rho \in [R/3, 2R/3]; \\ \left( 2 \sin^{-1} \left( \frac{3\rho - 2R}{R} \right), \phi \right), & \rho \in [2R/3, R]. \end{cases} \quad (13)$$

显然  $v_1$  和  $v_2 \in M(D)$ . 若以  $W(u)$  表示磁化态  $u$  的绕数, 易得

$$W(v_1) = W(v_2) = 1. \quad (14)$$

针对图 4 所示磁体, 磁化态  $u(\rho, \phi, z) = (\Theta_u(\rho, \phi, z), \Phi_u(\rho, \phi, z))$  的拓扑度可按<sup>[15]</sup>

$$T(u) = \frac{1}{4\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=R} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \sin \Theta_u d\Theta_u d\Phi_u \quad (15)$$

计算<sup>[15]</sup>. 由此可得

$$T(v_1) = 1; \quad T(v_2) = 3. \quad (16)$$

据定理 3,  $v_1$  和  $v_2$  不属于同一类, 虽然它们有相同的绕数. 因此, 对于表征类来说, 拓扑度是更本质的标志.

此外, 如果在  $L$  上的某些点磁化强度的极角为 0 或  $\pi$ , 绕数便无法定义; 而且畴壁的中心层的位置亦难以确定. 为了使 Slonczewski 等人的绕数有意义, 我们必须修改其定义, 并找出相应的条件.

满足下列性质的管壁称为简单管壁: 对任意取定的  $(\phi, z)$ , 都存在  $\rho_1(\phi, z)$  和

$\rho_2(\phi, z)$ , 使  $0 \leq \rho_1(\phi, z) < \rho_2(\phi, z) \leq R$ , 且当  $\rho \in [0, \rho_1]$  时,  $v(\rho, \phi, z)$  平行于  $d$  向; 当  $\rho \in [\rho_2, R]$  时,  $v(\rho, \phi, z)$  平行于  $c$  向; 而当  $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$  时,  $v(\rho, \phi, z)$  既不平行于  $c$  向, 亦不平行于  $d$  向. 我们将以曲面  $\rho_1(\phi, z)$  和  $\rho_2(\phi, z)$  为边界的开区域, 记为  $W'$ .

对于简单管壁, 于  $W'$  中取任一条环绕  $Z$  轴一周的闭合回路  $L$ , 则在此  $L$  的每点上,  $v(r)$  的方位角(以  $d$  向为极轴正向)均有确定值, 且在沿  $L$  走一圈后, 它变化  $2\pi$  的整数倍. 我们将此整数定义为管壁的绕数. 由(15)式, 它等于拓扑度.

综合以上讨论得到

**定理 4** 当且仅当管壁是简单的时, 绕数的定义才有意义. (意即绕数等于拓扑度, 且在选取回路  $L$  时不发生困难.)

## 五、1 式闭壁群 $\bar{G}_W^{(1)}$

如图 5 所示, 若在铁磁体  $D$  中存在两个不相交的闭合曲面  $\bar{A}_c$  和  $\bar{A}_d$ ,  $\bar{A}_d$  被  $\bar{A}_c$  包围;  $\bar{A}_c$  的外部区域(壳畴)  $\bar{D}_c$  和在  $\bar{A}_d$  内部的区域(核畴)  $\bar{D}_d$ , 各自沿着一个固定的方向  $c$  和  $d$  均匀磁化.  $\bar{D}_c$  与  $\bar{D}_d$  之间的区域  $\bar{W}$  便是闭合磁畴壁(闭壁). 现在讨论所有闭壁, 即

$\bar{M}(D) = (S^2, c, d)^{(\bar{D}_c, \bar{D}_d)}$  的所有映射, 按相对于  $(\bar{D}_c, \bar{D}_d)$  的同伦而形成的拓扑类集合  $\bar{G}_W^{(1)}$ , 称为 1 式闭壁类集合.

经过  $D$  的一个同胚形变后,  $(D, \bar{D}_c, \bar{D}_d)$  可以强形变收缩为  $(V^3, \partial V^3, b)$ , 此处  $V^3$  为  $D$  中的一个单位实心球,  $\partial V^3 (\subset \bar{D}_c)$  为其边界(二维球面),  $b (\in \bar{D}_d)$  为球心. 故  $\bar{G}_W^{(1)}$  与映射集合  $M(V^3) = (S^2, c, d)^{(V^3, \partial V^3, b)}$  的相对于  $(\partial V^3, b)$  的同伦类集合  $N(V^3)$  一一对上对应<sup>[12]</sup>.

再将  $\partial V^3$  粘合成一点  $a$ , 使  $V^3$  变为包含  $a$  与  $b$  点的三维球面  $S^3$ . 于是  $N(V^3)$  与  $\bar{M}(a, b) = (S^3, c, d)^{(S^3, a, b)}$  的双基点同伦类集合  $\bar{N}(a, b)$  一一对上对应. 因此得到

**定理 5** 闭壁类集合  $\bar{G}_W^{(1)}$  与  $S^3 \rightarrow S^3$  的双基点映射的相对同伦类集合  $\bar{N}(a, b)$  一一对上对应.

我们已经证明<sup>[13]</sup>,  $\bar{N}(a, b)$  与映射集合  $(S^2, c)^{(S^3, a)}$  的同伦类集合  $\bar{N}(a)$  或  $(S^2, d)^{(S^3, b)}$  的同伦类集合  $\bar{N}(b)$  也是一一到上对应的, 而  $\bar{N}(a)$  和  $\bar{N}(b)$  均是同构于  $Z$  的群<sup>[3]</sup>, 故可将它们表为

$$\bar{N}(a) = \{\alpha_i | i \in Z\}; \quad \bar{N}(b) = \{\beta_i | i \in Z\}. \quad (17)$$

于是<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} \bar{N}(a, b) &= \{\tau_i | i \in Z\}, \\ \tau_i &= \alpha_i \cap \beta_i, \end{aligned} \quad (18)$$

式中  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  和  $\tau_i$  的脚标  $i$  是它们的拓扑度. 群  $\bar{N}(a)$  和  $\bar{N}(b)$  中的结合运算, 如下地诱导出在  $\bar{N}(a, b)$  中的结合运算:

$$\tau_i \cdot \tau_j = (\alpha_i \cdot \alpha_j) \cap (\beta_i \cdot \beta_j) = \alpha_{i+j} \cap \beta_{i+j} = \tau_{i+j}, \quad (19)$$

从而使  $\bar{N}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  也成为同构于整数加群  $\mathbf{Z}$  的群。

设  $\bar{G}_W^{(n)}$  到  $\bar{N}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  的一一对应关系为  $\bar{k}$ , 定义  $\bar{G}_W^{(n)}$  中任意一对闭壁类  $\bar{\mu}_i$  和  $\bar{\mu}_j$  之间的结合为

$$\bar{\mu}_i \cdot \bar{\mu}_j = \bar{k}^{-1}(\bar{\tau}_i) \cdot \bar{k}^{-1}(\bar{\tau}_j) \equiv \bar{k}^{-1}(\bar{\tau}_i \cdot \bar{\tau}_j) = \bar{\mu}_{i+j}. \quad (20)$$

于是得到

**定理 6** 1 式闭壁类集合  $\bar{G}_W^{(n)}$  按(20)式的结合运算成为同构于整数加群  $\mathbf{Z}$  的群。对  $\bar{G}_W^{(n)}$  中的每个类  $\bar{\mu}_j$  (及其中任一闭壁  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ) 可按  $T(\bar{\mu}_j) = j(T(\mathbf{v}) = j)$  赋予拓扑度。当且仅当  $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$  时, 才有  $\langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle \in \bar{G}_W^{(n)}$ 。此外,  $T(\bar{\mu} \cdot \bar{\nu}) = T(\bar{\mu}) + T(\bar{\nu})$ 。

有时我们也将  $\bar{G}_W^{(n)}$  叫做 1 式闭壁群, 以强调其群的性质。

定理 5 和 6 与定理 1—3 是十分相似的。我们亦可用类似于第三节中的“套合”方式, 来实现  $\bar{G}_W^{(n)}$  中的结合运算。

另外, 正如在第二节的末尾指出的, 可分别将管畴  $D_c$  和芯畴  $D_{d_i}$  看成柱面和线段那样, 也可将壳畴  $\bar{D}_c$  和核畴  $\bar{D}_{d_i}$  分别看成磁体表面及其中的单点。

## 六、 $n$ 式管壁群 $G_W^{(n)}$ 和闭壁群 $\bar{G}_W^{(n)}$ 以及 $[M, N]$ 式混壁群 $G_W^{[M, N]}$

如果磁体  $D$  中有一个管畴  $D_c$  包围着  $n(\geq 1)$  个芯畴  $D_{d_1}, D_{d_2}, \dots, D_{d_n}$  (图 6), 它们分别沿固定的方向  $\mathbf{c}, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$  均匀磁化, 则在  $D_c, D_{d_1}, \dots, D_{d_n}$  之间的区域就形成一个  $n$  式管状畴壁  $W(n)$ 。仿照第一节不难证明, 在保持这种磁结构不变的情况下, 所有  $n$  式  $W(n)$  的同伦类集合  $G_W^{(n)}$ , 是与  $S^2 \rightarrow S^2$  的  $n+1$  基点映射的同伦类集合——一到上对应的。后者是同构于  $\mathbf{Z}$  的群<sup>[13]</sup>, 所以  $G_W^{(n)}$  也按此对应成为同构于  $\mathbf{Z}$  的群, 称之为  $n$  式管壁群  $G_W^{(n)}$ 。

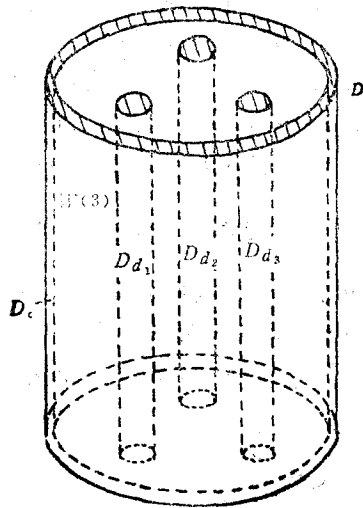


图 6

$n = 3$  的情形

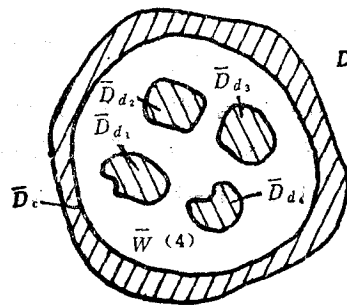


图 7

$n = 4$  的情形; 剖面

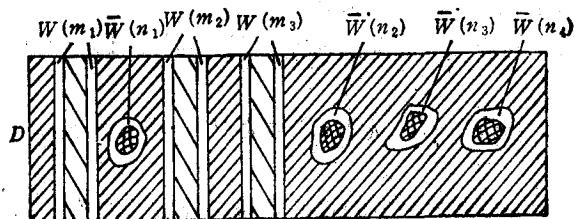


图 8

$M=3, N=4$  的情形;剖面

同样,若在一个壳畴  $\bar{D}_c$  内包含着  $n$  个核畴  $\bar{D}_{d_1}, \bar{D}_{d_2}, \dots, \bar{D}_{d_n}$ , 如图 7, 这里  $c, d_1, \dots, d_n$  分别为各磁畴的取向. 则在  $\bar{D}_c, \bar{D}_{d_1}, \bar{D}_{d_2}, \dots, \bar{D}_{d_n}$  之间的区域就形成一个  $n$  式闭壁  $\bar{W}(n)$ . 类似于第四节易证, 所有  $n$  式  $\bar{W}(n)$  的相对于  $(\bar{D}_c, \bar{D}_{d_1}, \dots, \bar{D}_{d_n})$  的同伦类集合  $\bar{G}_W^{(n)}$  与  $S^3 \rightarrow S^3$  的  $n+1$  基点映射之同伦类集合 (是同构于  $\mathbb{Z}$  的群<sup>[13]</sup>) 一一到上对应, 从而亦形成同构于  $\mathbb{Z}$  的群, 叫做  $n$  式闭壁群  $\bar{G}_W^{(n)}$ .

当  $n > 1$  时,  $G_W^{(n)}$  和  $\bar{G}_W^{(n)}$  既可分别看做是  $G_W^{(1)}$  和  $\bar{G}_W^{(1)}$  的推广, 亦可分别看做是对它们的细微拓扑分类. 这是因为: 若仅将  $D_{d_1} (\bar{D}_{d_1})$  算作芯 (核) 畴, 而将  $D_{d_i} (\bar{D}_{d_i})$ ,  $i = 2, \dots, n$ , 归并到管 (闭) 壁中去, 则  $n$  式管 (闭) 壁仍是 1 式的.

$G_W^{(1)}$  和  $\bar{G}_W^{(1)}$  的一个更有实际意义的推广, 是如图 8 所示有互不相交的  $M$  个管壁 (第  $i$  个  $m_i$  式管壁记为  $W_i(m_i)$ ) 和  $N$  个闭壁 (第  $j$  个  $n_j$  式闭壁记为  $\bar{W}_j(n_j)$ ) 共存的情况, 所有壁外的区域连成一整块, 形成单个磁畴  $D_c$  (沿固定方向  $c$  均匀磁化).

当  $N=0$  而  $M \geq 1$  时, 这种磁结构对应于有  $M$  个磁泡存在之类的情形; 当  $M=0$  而  $N \geq 1$  时, 它对应于有  $N$  个核的反磁化形核之类的情形.

我们将这类磁化态的相对同伦类集合记为  $G_W^{[M, N]}$ . (当然, 更细致地应记成  $G_W^{(m_1, \dots, m_M, n_1, \dots, n_N)}$ , 为了书写简便, 我们不采用这种细致记法). 将  $D_c$  粘合成一点  $\alpha$ , 将各个芯畴及核畴也各自粘合成一点, 并将管壁收缩成圆片和将闭壁收缩成球体, 则  $W_i(m_i)$  连同  $\alpha$  和由该管壁所包围的  $m_i$  个芯畴所粘合而成的点, 就成为一个有  $m_i + 1$  基点的二维球面, 记成  $S^2(m_i)$ ; 而  $\bar{W}_j(n_j)$  连同  $\alpha$  和由该闭壁所包围的  $n_j$  个核畴所粘合而成的点, 便成为一个有  $n_j + 1$  基点的三维球面, 记为  $S^3(n_j)$ . 把有一个公共点  $\alpha$  的, 这  $M$  个  $S^2$  和  $N$  个  $S^3$  到  $S^3$  的  $\left(\sum_{i=1}^M m_i + \sum_{j=1}^N n_j + 1\right)$  基点映射的同伦类集合记为  $N[M, N]$ , 据文献[12]的理论易证,  $G_W^{[M, N]}$  与  $N[M, N]$  是一一到上对应的. 后者是同构于直积群  $G_W^{(m_1)} \times \dots \times G_W^{(m_M)} \times \bar{G}_W^{(n_1)} \times \dots \times \bar{G}_W^{(n_N)}$  (从而同构于  $M+N$  维格矢群  $\mathbb{Z}^{M+N}$ ) 的群<sup>[13]</sup>. 按这个对应,  $G_W^{[M, N]}$  也便具有同样的性质. 据此, 我们将  $G_W^{[M, N]}$  称为  $[M, N]$  式混壁群.

## 七、结论与讨论

以上我们对铁磁体中的单个管状和闭合磁畴壁以及它们共存时的磁化状态, 进行了拓扑分类, 它们的拓扑类集合  $G_W^{(n)}$ ,  $\bar{G}_W^{(n)}$  和  $G_W^{[M, N]}$  (更细致地应将后者写为  $G_W^{(m_1, \dots, m_M, n_1, \dots, n_N)}$ )

分别构成同构于  $\mathbb{Z}$  (整数加群),  $\mathbb{Z}$  和  $\mathbb{Z}^{M+N}$  ( $M+N$  维格矢群) 的群。讨论了这些群中结合运算的物理实现。此外, 完善了“绕数”的定义, 并找出了使之成为管壁态的有意义的标志的条件。

这里所谓的“类”, 是把磁化态(即磁化强度矢量场  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ) 当做从铁磁体  $D$  (指铁磁体所占的空间区域) 到序参量空间  $S^2$  (二维球面) 上的连续映射, 在一定限制下的相对同伦类。在该限制下, 属于同一类的磁化态是可以连续转化的。

本文涉及的铁磁体, 是实心块状(线度可以无穷大)物体, 可以形变收缩为一点, 因而磁化态的绝对(即不加任何限制的)同伦类仅有 1 个<sup>[12]</sup>。所以, 只有在适当的限制下的相对同伦类数才可以大于 1。这些限制当然是由铁磁体的物理性质、几何形状以及外界条件决定的。要冲破这些限制必须克服相当高的能垒。如果外界作用不十分强, 则它引起的磁化态的变化只能在一个相对同伦类中进行。但当此作用强到足以克服该能垒时, 不同相对同伦类之间的状态均可互相转化。例如, 加上足够强的均匀外磁场, 总可以使实心块状铁磁体达到饱和磁化, 而无论其原始磁化态是如何的。

要求磁化矢量场  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  应是连续的, 并且它们的变化必须以连续的方式来进行, 这本身就是一种限制。考虑到物质的原子结构,  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  不必处处连续, 可以含有缺陷(如 Bloch 点<sup>[7]</sup>), 即使平衡磁化态都连续, 它们之间的转化过程也可以伴随着缺陷的产生、运动和消失而表现为不连续的<sup>[7]</sup>。特别值得指出的是, 磁体的边界及宏观不均匀性的存在, 有利于缺陷的产生和消失<sup>[16]</sup>。

文中所讨论的管壁和闭壁磁结构, 在实验上都是可以观察到的。例如, 含有  $n$  条垂直 Bloch 线的磁泡, 就具有  $n+1$  式管壁的特征。其他例子已在正文中提到过。应当说明, 本文所涉及的管壁和闭壁结构, 并不一定要求管畴和壳畴紧贴磁体表面, 而且, 允许芯畴和核畴(甚至管畴和壳畴)的位置和其中的磁化方向不固定,  $G_w^{(n)}$ ,  $\bar{G}_w^{(n)}$  和  $G_w^{(M,N)}$  仍然是分别与  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}$  和  $\mathbb{Z}^{M+N}$  一一对应的。

最后还要指出, 微磁学<sup>[1]</sup>要求磁化矢量场是二阶可微的。正如我们从(12)和(13)式所看到的那样, 加上这个要求, 本文所讨论的每个同伦类虽然将变小, 但不会变为空集, 所以不影响本文关于类集合的构造的结论。

蒲富格、韩宝善、冯麟保、葛蕴藻和聂向富诸同志曾与作者们进行过有益的讨论, 谨向他们致谢。

## 参 考 文 献

- [1] W. F. Brown, Jr., *Micromagnetics*, Intersci. Pub., New York, (1963).
- [2] M. Kléman, *Magnetism of Metals and Alloys* (M. Cyrot ed.), North-Holland Pub., Amsterdam, (1982), pp. 535—601.
- [3] 廖山涛、刘旺金, 同伦论基础, 北京大学出版社, (1980);  
C. Kosniowski, *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, (1980).
- [4] N. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.*, 51(1979), 591.
- [5] L. Michel, *Rev. Mod. Phys.*, 52(1980), 617.
- [6] V. P. Mineev, *Soviet Scientific Reviews, Sec. A: Physics Reviews*, Vol. 2(I. M. Khalatnikov ed.), Printed in USA, (1980), pp. 173—246.
- [7] M. Kléman, *Points, Lines and Walls*, Intersci. Pub., Chichester, (1983).
- [8] P. Hansen & M. Hartmann, *Physics of Magnetic Materials*, Part. 1 (J. Rauluszkievicz, H. Szymczak & H. K.

- Lachowicz eds.), World Sci. Pub., Singapore, (1985), pp. 158—187.
- [9] H. Chang, *Magnetic Bubble Technology: Integrated-Circuit Magnetics for Digital Storage and Processing*, IEEE Press & Wiley, New York, (1975).
- [10] S. Konishi, *IEEE Trans. Magn.*, MAG-19(1983), 1838.
- [11] S. V. Vonsovskii, *Magnetism*, Vol. 2, John Wiley & Sons Ltd., New York, (1974), p. 1015.
- [12] 李伯臧、阎凤利, 已投科学通报.
- [13] 李伯臧、阎凤利, 本刊本期.
- [14] J. C. Slonczewski, A. P. Malozemoff & O. Voegeli, *AIP Conf. Proc.*, 10(1973), 458; O. Voegeli & B. A. Calhoun, *IEEE Trans. Magn.*, MAG-9(1973), 617; P. Dekker & J. C. Slonczewski, *Appl. Phys. Lett.*, 29 (1976), 753.
- [15] A. A. Belavin & A. M. Polyakov, *JETP Lett.*, 22(1975), 245.
- [16] A. P. Malozemoff & J. C. Slonczewski, *Magnetic Domain Walls in Bubble Materials*, Acad. Press, New York (1979).

## TOPOLOGICAL CLASSIFICATION OF THE MAGNETIC DOMAIN WALLS OF TUBE-AND ENVELOPE-TYPE

YAN FENG-LI

(Department of Physics, Hebei Normal University, Shijiazhuang)

LI BO-ZANG

(Institute of Physics, Academia Sinica)

### ABSTRACT

The classification of the static magnetic domain wall structures of tube- and envelope-type is made in an unified way using the homotopy theory. The sets of topological classes for such two kinds of magnetic domain walls,  $G_W^{(n)}$  and  $\bar{G}_W^{(n)}$ , are corresponding respectively one-by-one to the sets of homotopy classes relative to  $n+1$  base points for the  $S^2 \rightarrow S^2$  and  $S^3 \rightarrow S^4$  continuous maps. Either  $G_W^{(n)}$  or  $\bar{G}_W^{(n)}$ , therefore, can be constructed into group isomorphic to  $\mathbb{Z}$ , the additive group of integers. (Then we call them the tube-wall group and the envelope-wall group of type  $n$ , respectively). The 'winding number' introduced by Slonczewski *et al.* is considered anew. The sufficient and necessary conditions under which the 'winding number' is allowed to be taken as the index of tube-wall class are obtained. Finally, the topological classification of the magnetization states with  $M$  tube-walls and  $N$  envelope-walls coexisting is discussed. It is shown that the set of the corresponding topological classes,  $G_W^{(M,N)}$ , can be constructed into group isomorphic to  $\mathbb{Z}^{M+N}$ , the  $M+N$  dimensional lattice vector group. (It is then referred to as the mix-wall group of type  $[M, N]$ ).