

圆映象的符号动力学*

张忠建 陈式刚

(应用物理与计算数学研究所)

1988年3月30日收到

用符号动力学的方法对圆映象的 Farey 序列、Farey 序列与 M.S.S. 序列的*积、二元树及各 Farey 数的新生轨道进行了研究。

描述周期脉冲作用下外力驱动的阻尼飞轮运动的圆映象^[1]为

$$f(\theta; \omega, k) = \theta + \omega - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta. \quad (1)$$

对于二振子相互作用类型的系统具有典型意义。它比其它的一维映象具有更为复杂的轨道结构。本文试图用符号动力学的方法^[2,3]对其轨道类型作分析的与计算机的研究。对于同一问题, Pina 等人曾对某些特殊情况作过一些研究^[4,5]。

一、轨道的符号表示及其一般性质

在一维映象的符号动力学研究中^[3,6], 通常根据映象函数的斜率的符号把空间分成区间, 然后给每一区间赋予一个符号。任一轨道都可按其迭代的顺序据其所经的区间用一符号序列来表示。对于趋向周期运动的轨道, 这一符号序列终究要趋向一循环结构, 因而可以用一有限序列来表示周期轨道。通常用超稳定轨道的符号表示相应参数空间的轨道集合中的所有轨道。

圆映象(1)式在 $n + \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \frac{1}{k} < \theta < n + 1 - \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \frac{1}{k}$ 区间内的斜率为正, 以下用 P 标志; 在 $n - \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \frac{1}{k} < \theta < n + \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \frac{1}{k}$ 区间内斜率为负, 以下用 N 标志。其中 n 为整数。与通常的一维映象不同, 圆映象有无限多个 P 与 N 区间, 我们还应给予下标以表明其所在的位置。为了使符号有更高的对称性, 我们将给经过极小点的轨道与经过极大点的轨道以不同的标志。如取极小值为初值并记其位置为 m_0 , 那么离 m_0 为 n 距离的谷中两边的 P 与 N 记为 P_n 与 N_n 。类似地, 如取极大值 M_0 为初值, 那么把离 M_0 为 n 距离的峰两边的两个坡 P 与 N 记为 P_n 与 N_n 。这样, 一条转数为 P/Q 的轨道可由符号

$$\sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \cdots \sigma_{n_{Q-1}} m_P \text{ 或 } \sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \cdots \sigma_{n_{Q-1}} M_P \quad (2)$$

表示。前者为经过极小值的轨道, 后者为经过极大值的轨道。其中 σ 表示 P 或 N 。

* 国家自然科学基金资助的课题。

圆映象在参数空间 (ω, k) 中的结构对于 ω 有以 1 为周期的周期性, 并对 ω 的反演具有对称性。这两个性质都可以用符号(2)式简明地表示出来。对 ω 的周期性表现为

$$\sigma_{n_1+1}\sigma_{n_1+2}\cdots\sigma_{n_{Q-1}+Q-1}m_{P+Q} \approx \sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{Q-1}}m_P \quad (3)$$

或

$$\sigma_{n_1+1}\sigma_{n_1+2}\cdots\sigma_{n_{Q-1}+Q-1}M_{P+Q} \approx \sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{Q-1}}M_P \quad (4)$$

的等价性质。依此类推, 我们将有无限多等价轨道

$$\sigma_{n_1+n}\sigma_{n_1+2n}\cdots\sigma_{n_{Q-1}+(Q-1)n}m_{P+Qn}$$

或

$$\sigma_{n_1+n}\sigma_{n_1+2n}\cdots\sigma_{n_{Q-1}+(Q-1)n}M_{P+Qn}$$

其中 n 为整数。但在 $\omega(0, 1)$ 区间内存在且只存在等价轨道中的一条。考虑到这一性质, 我们以后将以 P/Q 为真分数的轨道表示这一轨道族在 $\omega(0, 1)$ 内出现的轨道。

如果将 (θ, f) 平面旋转 180° , 在这一变换下, $f(\theta)$ 的极大值变为极小值, 极小值变为极大值, P 与 N 不变, 而指标 n_i 改号。即有等价关系

$$\sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{Q-1}}m_P \approx \sigma_{-n_1}\sigma_{-n_2}\cdots\sigma_{-n_{Q-1}}M_{-P}. \quad (5)$$

如果 P/Q 为真分数, 考虑到(3)与(4)式, 我们宁愿把(5)式改写成

$$\sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{Q-1}}m_P \approx \sigma_{-n_1+1}\sigma_{-n_2+2}\cdots\sigma_{-n_{Q-1}+Q-1}M_{Q-P}. \quad (6)$$

利用性质(3), (4)与(6)式, 我们可以只考虑 $\omega(0, 1)$ 区间内经过 $f(\theta)$ 极小点(或极大点)的轨道, 或者只研究 $\omega(0, 1/2)$ 区间内经过极小点与极大点的轨道。其它轨道都可以通过等价关系得到。以下凡不明确指出的都表示极小轨道。

随着 k 值的增加, 极小值降低, 由 $f(\theta)$ 图形可知: 任一通过极小点的轨道为了要保持其模式(2), 要增加 ω 的数值。因此在 (ω, k) 空间中, 经过极小点的超稳定轨道曲线, 随 k 的增大由左向右, 即斜率为正。根据同样的理由, 经过极大点的超稳定轨道曲线, 随 k 的增加由右向左, 斜率为负。根据这个性质, 我们以轨道在 ω 轴上的顺序规定它们的大小比较。不过对于经过极大点的轨道, ω 轴上的顺序与 k 轴上的顺序一致, 而对于经过极小点的轨道, 这两者刚好相反。

两条轨道

$$\sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{Q-1}}m_P \text{ (或 } M_P)$$

与

$$\sigma_{n'_1}\sigma_{n'_2}\cdots\sigma_{n'_{Q'-1}}m_{P'} \text{ (或 } M_{P'}),$$

如果其前面 i 个符号 ($i < Q-1$ 与 $Q'-1$) 完全相同, 而

$$\left. \begin{aligned} n_{i+1} &> n'_{i+1} \text{ 当 } \sigma_{n_1}\cdots\sigma_{n_i} \text{ 中有偶数个 } N \text{ 时} \\ n_{i+1} &< n'_{i+1} \text{ 当 } \sigma_{n_1}\cdots\sigma_{n_i} \text{ 中有奇数个 } N \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

或 $n_{i+1} = n'_{i+1}$ 而

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n_{i+1}} &= N_{n_{i+1}}, \sigma_{n'_{i+1}} = P_{n_{i+1}} \text{ (偶数个 } N \text{ 时)} \\ \sigma_{n_{i+1}} &= P_{n_{i+1}}, \sigma_{n'_{i+1}} = N_{n_{i+1}} \text{ (奇数个 } N \text{ 时)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

时, 我们规定 (如果例如 $i = Q-1$, 则(7)式中 n_{i+1} 换为 P , (8)式中 $\sigma_{n_{i+1}}$ 换为 m_P 或 M_P)

$$\sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{Q-1}}m_P(M_P) > \sigma_{n'_1}\sigma_{n'_2}\cdots\sigma_{n'_{Q'-1}}m_{P'}(M_{P'}), \quad (9)$$

否则

$$\sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{Q-1}}m_P(M_P) < \sigma_{n'_1}\sigma_{n'_2}\cdots\sigma_{n'_{Q'-1}}m_{P'}(M_{P'}). \quad (10)$$

这种比较只当两条轨道都是由 m_0 (或 M_0) 出发时才有意义。由图 2 可见, 当一条轨道由 m_0 出发而另一条由 M_0 出发时, 其相对顺序可能不是固定的。

二、Farey 序列的符号动力学

圆映象的周期轨道中有基本意义的是 Farey 序列。Farey 序列的一个元素对应一 Arnold 舌头。当 k 值增加时, Arnold 舌头的构造愈来愈复杂, 原始的 Farey 序列中的元素成为 Arnold 舌头的边界 (区域)。因此 Farey 序列符号动力学的研究对圆映象符号动力学有根本意义。

Farey 序列中的轨道在 $k \leq 1$ 时就存在, 而在 $k < 1$ 时 $f'_\theta(\theta; k, \omega) > 0$, 所以 Farey 序列中的轨道的符号表示中只出现 P , 并且因此其下标总是由左到右为不减的。例如转数为 $3/8$ 的轨道为 $P_0P_1P_1P_1P_2P_2m_3$ 或 $P_1P_1P_2P_2P_3P_3M_3$ 。因此用 P 与 Δ 两个符号可更方便地表示它, Δ 表下标加一。例如上述由 m_0 与 M_0 出发的 $3/8$ 轨道可统一地用 P, Δ 符号表示为 $PP\Delta PPP\Delta PP \cdot m$ 或 M 字母可以忽略。对于 P/Q 轨道, 在这种表示中, P 的个数为 $Q-1$, Δ 的个数为 $P-1$ 。

对于 Farey 序列, 有如下的符号规则: 如果 Farey 树的同一级上两相邻转数 P_1/Q_1 与 P_2/Q_2 , $0 < P_1/Q_1 < P_2/Q_2 < 1$, 的相应模式为 F_1 与 F_2 , 则在其间存在转数为 $P_1 + P_2/Q_1 + Q_2$ 的唯一模式 F^*

$$F^* = F_1\Delta PF_2 = F_2P\Delta F_1. \quad (11)$$

为了应用这一规则, 还必须给出边界模式, 即对应转数为 $1/n$ 与 $n-1/n$ 的轨道的符号表示。不难看出, $1/n$ 轨道的符号为

$$PP \cdots P, \quad (12)$$

共有 $(n-1)$ 个 P 。而 $(n-1)/n$ 轨道为

$$P\Delta P\Delta \cdots \Delta P, \quad (13)$$

共有 $n-1$ 个 P 与 $n-2$ 个 Δ 。表 1 给出 Farey 树中前几级轨道的按上述规则构造的符号表示。

现在证明所述的规则。设在固定 k 值处, F_1 与 F_2 的超稳定轨道各位于 ω_1 与 ω_2 , 即

$$f^{Q_1}(\theta_m; \omega_1, k) = \theta_m + P_1, \quad f^{Q_2}(\theta_m; \omega_2, k) = \theta_m + P_2, \quad (14)$$

考虑作为 ω 函数的

$$f^{Q_1}(\theta_m; \omega, k) \text{ 与 } f^{-Q_2}(\theta_m + P_1 + P_2; \omega, k)|_{F_2}, \quad (15)$$

其中 $f^{-Q_2}|_{F_2}$ 为按 F_2 的逆轨道定义的逆函数。因为 F_1 与 F_2 只含 P , f^{Q_1} 为 ω 的增函数, $f^{-Q_2}|_{F_2}$ 为 ω 的减函数。当 ω 由 ω_1 增至 ω_2 时 $f^{Q_1}(\theta_m; \omega, k)$ 由 $\theta_m + P_1$ 往上增加, 而 $f^{-Q_2}(\theta_m + P_1 + P_2; \omega, k)$ 由上降至 $\theta_m + P_1$ 。如作 $f(\theta)$ 图, 可知 $f^{-Q_2+1}(\theta_m + P_1 + P_2; \omega_1, k) < f(\theta_m + P_1 + 1)$, 否则, 在 (ω_1, ω_2) 区间内将存在转数为 $(P_2-1)/(Q_2-1)$ 的轨道, 这与 Farey 树上相邻轨道的假设不符。因此在 ω_1 与 ω_2 之间必存在一 ω^* , 使

表 1 Farey 序列中的轨道的符号表示

转 数	简化表示	一 般 表 示
1/5	PPPP	$P_0P_0P_0P_0m_1$ 与 $P_1P_1P_1P_1M_1$
1/4	PPP	$P_0P_0P_0m_1$ 与 $P_1P_1P_1M_1$
2/7	PPPA PPP	$P_0P_0P_0P_1P_1m_2$ 与 $P_1P_1P_1P_2P_2M_2$
1/3	PP	$P_0P_0m_1$ 与 $P_1P_1M_1$
3/8	PPAPPPAP	$P_0P_0P_1P_1P_1P_2P_2m_3$ 与 $P_1P_1P_2P_2P_3P_3M_3$
2/5	PPAP	$P_0P_0P_1P_1m_2$ 与 $P_1P_1P_2P_2M_2$
3/7	PPAPPA PPP	$P_0P_0P_1P_1P_2P_2m_3$ 与 $P_1P_1P_2P_2P_3P_3M_3$
1/2	P	P_0m_1 与 P_1M_1
4/7	PAPPA PPPAP	$P_0P_1P_1P_2P_2P_3m_4$ 与 $P_1P_2P_2P_3P_4M_4$
3/5	PAPPA P	$P_0P_1P_1P_2m_3$ 与 $P_1P_2P_2P_3M_3$
5/8	PAPPA PPPAPPA P	$P_0P_1P_1P_2P_3P_3m_4$ 与 $P_1P_2P_2P_3P_4P_4M_4$
2/3	PAP	$P_0P_1m_2$ 与 $P_1P_2M_2$
5/7	PAPPA PPPAPPA P	$P_0P_1P_2P_2P_3P_4m_5$ 与 $P_1P_2P_3P_3P_4P_5M_5$
3/4	PAPPA P	$P_0P_1P_2m_3$ 与 $P_1P_2P_3M_3$
4/5	PAPPA P	$P_0P_1P_2P_3m_4$ 与 $P_1P_2P_3P_4M_4$

$$\theta_m + P_1 < f^{Q_1}(\theta_m; \omega^*, k) = f^{Q_2}(\theta_m + P_1 + P_2; \omega^*, k) < P_1 + 1 - \theta_m. \quad (16)$$

也就是说存在唯一的 ω^* , 使得

$$f^{Q_1+Q_2}(\theta_m; \omega^*, k) = \theta_m + P_1 + P_2.$$

其对应的唯一轨道的符号表示为 $F^* = F_1 \Delta P F_2$.

如果把论证的次序倒过来, 即考虑 ω 的函数

$$f^{Q_2}(\theta_m; \omega, k) \text{ 与 } f^{Q_1}(\theta_m + P_1 + P_2; \omega, k)|_{F_1},$$

并使 ω 由 ω_2 减至 ω_1 , 我们也可论证 $F^* = F_2 P \Delta F_1$. $F_1 \Delta P F_2$ 与 $F_2 P \Delta F_1$ 都是 F_1 与 F_2 之间唯一的转数为 $P_1 + P_2 / Q_1 + Q_2$ 的轨道, 所以 $F^* = F_1 \Delta P F_2 = F_2 P \Delta F_1$, 即(11)式. 这表明 Farey 轨道的符号表示具有反演对称性, 并且 F_1 与 F_2 中周期短的那一个必是周期长的那一个的一部分, 表 1 中的例子表明了 Farey 轨道的这种性质.

三、Farey 序列与 M.S.S. 序列的*积及二元树

现在研究由映象

$$F_{P/Q}(\theta; \omega, k) \equiv f^Q(\theta; \omega, k) - P \quad (17)$$

确定的周期轨道. 其不动点 $F_{P/Q}(\theta; \omega, k) = \theta$ 即为转数 P/Q 的轨道, 它当 $|dF_{P/Q}/d\theta| > 1$ 时失稳. 在 k 较大时, 在 (ω, k) 超稳定曲线的邻域与 θ 轴的 θ_m (或 θ_M) 邻域, $F_{P/Q}(\theta; k, \omega)$ 为一 S 单峰映象. 所以 P/Q 轨道失稳后的分叉情况可很好地由这一单峰映象来描述. 特别当 k 在一定范围内时, $F_{Q/P}$ 为这一单峰自身的映象, 于是通常关于单峰映象的符号动力学都可搬用, 其周期轨道构成 M.S.S. 序列.

设 $M = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{s-1}$ 为 M.S.S. 序列的一个元素, 其中 σ 表 N 或 P (即单峰映象中的 R 或 L). 如果映象 $F_{P/Q}$ 有周期轨道 M , 则对应地 f 有周期轨道 $F * M$, 其中 F 为转数为 P/Q 的轨道的符号表示去掉 m_P 或 M_P . * 积的定义为 (参照文献[71])

$$F * M = F(\tau_1)_P F_P(\tau_2)_{2P} \cdots (\tau_{n-1})_{(n-1)P} F_{(n-1)P}. \quad (18)$$

其中当 F 含偶数个 N 时, $\tau_i = \sigma_i$, 否则 τ_i 取与 σ_i 相反的符号; $(\tau_i)_{iP}$ 的下标表 τ_i 在第 iP 个谷(或峰)处; F_P 表 F 中字母的下标都要加 P . 任何轨道都有相应的 M.S.S. 序列, 因而在一定范围内有自相似结构. 在一固定的 ω 处观察, M.S.S. 序列是随 k 的增大而增大的. 所以在一固定的 k 处观察, 对于经过极大点的轨道, M.S.S. 序列随 ω 的增大而出现; 对于经过极小值的轨道, M.S.S. 序列随 ω 的减小而出现. 这些结论具有普遍的意义.

如下节利用拓扑度定理证明的, 除了原始的 Farey 序列以外, 经过极大值的轨道或经过极小值的轨道, 当 k 增大时, 新出现的轨道必是成对产生的. 这一对轨道互相之间只有一个字母不同. 并且经过极大值的轨道对与经过极小值的轨道对必定在同一 (ω, k) 值处同时出现. 这些性质与倍周期一起将使倍周期序列产生复杂的二元树结构^[8,9]. 下面以 0/1 舌头为例, 用符号动力学的办法说明为什么会出现这种结构. 按上述规则 0/1 轨道的倍周期轨道为 $N_0 m_0$ (即 M.S.S. 序列的 R). 由拓扑度定理, 与 $N_0 m_0$ 一起将同时出现 $P_{-1} m_0$ 轨道. 据(18)式, 与 $N_0 m_0$ 相应的四周期轨道为 $N_0 P_0 N_0 m_0$, 与 $P_{-1} m_0$ 相应的四周期轨道为 $P_{-1} N_0 P_{-1} m_0$. $N_0 P_0 N_0 m_0$ 与 $P_{-1} N_0 P_{-1} m_0$ 有三个字母不同, 它们不是同时产生的. 利用下节方法可知, 与 $N_0 P_0 N_0 m_0$ 一起将同时出现 $P_{-1} P_0 N_0 m_0$ 而与 $P_{-1} N_0 P_{-1} m_0$ 同时出现的是 $P_{-1} N_0 N_0 m_0$. $N_0 P_0 N_0 m_0$, $P_{-1} P_0 N_0 m_0$, $P_{-1} N_0 P_{-1} m_0$, $P_{-1} N_0 N_0 m_0$ 又各有其周期为 8 的倍周期轨道. 显然, 按(18)式构造的这四条 8 周期轨道互相之间都不可能只有一个字母不同, 这样, 与这四条轨道同时一定还有另外四条 8 周期轨道. 按此类推, 2^n 倍周期的轨道将有 2^n 条. 由于极大轨道对与极小轨道对是在同一 (ω, k) 处同时出现, 2^n 条极大轨道与 2^n 条极小轨道将成交叉结构.

显然, 二元树结构也是一种普遍性质, 即任一 Arnold 舌头中的任一轨道都有相应的二元树结构. 文献[9]研究了二元树结构中 (ω, k) 平面上轨道相交区的自相似结构与标度律. 不过实际情况比这种单纯的二元树结构更为复杂. 例如, 随着 k 的增加将出现愈来愈多的转数为 $0/2^n$ 轨道, 它们不会只有 2^n 条. 上述的 2^n 条只是 (ω, k) 平面上处于小 k 值处的那一部分. 而新生的 2^n 条轨道之外的轨道又各有其二元树结构.

四、大 k 值时新产生的周期轨道

本节将要研究随 k 值增加新产生的轨道, 这些轨道的数目很多, 且其 (ω, k) 平面上的结构对不同的 Arnold 舌头不具普适性. 因此我们还未对其进行详尽研究, 还不能给出构造完全序列的法则, 而只能给出这些结构应满足的一些一般规律.

首先我们证明: 转数为 P/Q 的超稳定轨道随 k 值增加总是成对地出现的. 这个问题可归结于研究方程

$$\phi(\omega; k) \equiv f^Q(\theta_m; \omega, k) - \theta_m - P = 0 \quad (19)$$

的解. 其中 $\theta_m = \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \frac{1}{k}$. 在下面的讨论中, 我们把 ω 作为变数, k 作为参数. 我们

试图要证明的是: 随 k 值的增加, $\phi(\omega; k) = 0$ 的解成对地出现. 这实际上就是通常关于不动点的拓扑度定理的内容, 因此我们只要论证定理成立的条件即可. 不难看出: 因为 $f(\theta; \omega, k)$ 是 θ, ω 的单值连续函数, 所以 $\phi(\omega; k)$ 也是 ω 的单值连续函数. $\phi(\omega; k)$ 也是 k 的连续函数. 此外, $\phi(\omega; k)$ 随 $\omega \rightarrow \pm \infty$ 而趋向 $\pm \infty$. 所以在 ω 轴的一个充分大的有限区间内, 与 $\phi = 0$ 相应的拓扑度是不变的. 实际上, $\phi = 0$ 总有奇数个解, 其中一个解为原始的 Farey 序列的元素, 随 k 增加新出现的解总是成对出现的, 这一对的 $\text{sign} \phi'_\omega$ 分别为 $+1$ 与 -1 .

现在计算 ϕ'_ω

$$\phi'_\omega = (1 - k \cos 2\pi\theta_{Q-1})(1 - k \cos 2\pi\theta_{Q-2}) \cdots (1 - k \cos 2\pi\theta_1). \quad (20)$$

其中 $\theta_i = f^i(\theta_m; \omega, k)$. (20)式表明 ϕ'_ω 就是 $(f^Q)_\theta$ 除以 $(1 - k \cos 2\pi\theta_m)$ 后在 θ_m 处的值. 当出现一个新解时, (20)式中的一个因子首先变成零, 然后在 $\text{sign} \phi'_\omega = \pm 1$ 的两个分支上取不同的符号. 用符号动力学的语言说, 同时出现的一对轨道只有一个符号是不同的, 如果在一条轨道中这个字母是 N_n (或 P_n), 则另一条轨道中的相应字母只可能是 $P_{n-1}(N_n)$ 或 $P_n(N_{n+1})$.

进一步分析, 不难看出, 对应于 Farey 数的新轨道对不可能是 P_n, N_n 而只可能是 P_{n-1}, N_n . 理由是 P_n, N_n 对应于极小值 m_n , 如出现由 m_0 至 m_n 的轨道, 而同时又是 P/Q 轨道的一部分, 这表明 Farey 数 P/Q 中的 P 与 Q 有公因子, 而这是不可能的. 所以 ϕ'_ω 中变为零的因子只可能对应于极大值, 极大值 M_n 两边的坡为 P_{n-1} 与 N_n . 由于同样的理由, (ω, k) 平面上 (由同一极值出发的) 不同 Farey 数的超稳定轨道不可能相交. 只有属于同一 Farey 数的不同 M. S. S. 轨道才有可能相交, 这也是形成二元树的理由之一.

作为上述结果的推论, 我们有: 以同一 Farey 数为转数的由极大值出发的轨道与由极小值出发的轨道必定同时产生; 而且两者的符号表示存在着确定的关系, 其中一对轨道的不同字母所在处为另一轨道的起点, 其它字母按相同的循环次序排列, 只不过要把下标按新的起点重新标记并根据定义作变换: N_n (极小) $\rightarrow N_n$ (极大), P_n (极小) $\rightarrow P_{n+1}$ (极大). 由此, 根据 (6) 式, 由同一极值出发的转数 P/Q 与转数 $(Q - P)/Q$ 随 k 增加而新生的轨道也必定同时出现, 因而两者有相同的数目, 而且有确定对应关系的符号表示. 因此, 从符号动力学的角度, 我们可以只研究由一种极值出发的转数在 $(0, 1/2)$ 区间内的轨道.

作为例子, 我们来研究 $1/2$ 轨道与 $1/3$ 轨道. 图 1 与图 2 分别给出较低 k 值处的 $1/2$ 与 $1/3$ 超稳定轨道曲线.

进一步的计算发现, 在 $k = 2n\pi$ 时有

$$P_{-n}m_1, N_{-n+1}m_1, P_{-n+1}m_1, \cdots, P_{-1}m_1, N_0m_1, P_0m_1 \quad (21)$$

等 $2n + 1$ 条 $1/2$ 轨道. 这表明 2 周期的轨道近似地以 $\Delta k = 2\pi$ 为周期产生新的轨道. $0/1$ 轨道的倍周期轨道也有类似的情况, 在 $k = (2n - 1)\pi$ 处有

$$P_{-n}m_0, N_{-n+1}m_0, P_{-n+1}m_0, \cdots, P_{-1}m_0, N_0m_0, P_0m_0 \quad (22)$$

等 $2n + 1$ 条 $0/2$ 轨道. 显然, 这种周期性具有普遍意义. 即如 k 处有 $\sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\cdots\sigma_{n_{Q-1}}m_P$ 轨

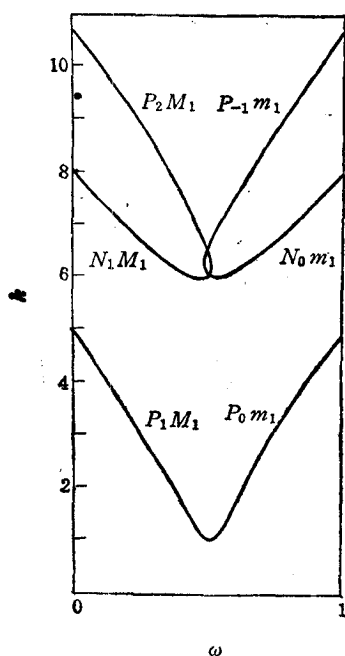


图 1 1/2 转数的超稳定轨道

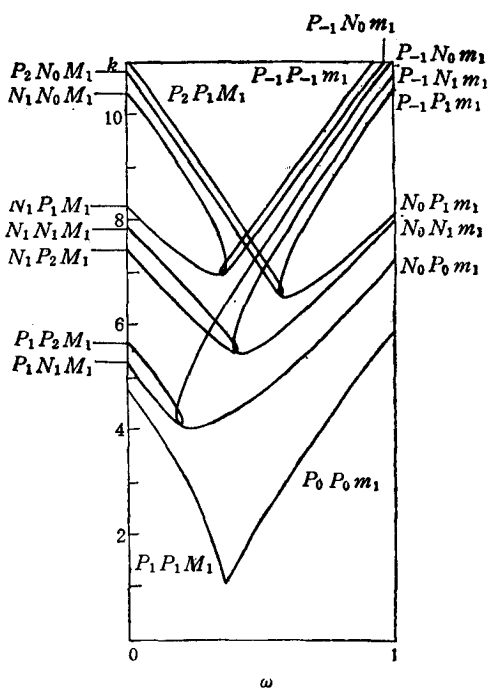


图 2 1/3 转数的超稳定轨道

表 2 $k = n\pi$ 处的 1/3 轨道

k	轨道的符号表示
π	P_0P_0
2π	$P_{-1}P_0, P_{-1}N_1, N_0N_1, N_0P_0, P_0P_0$
3π	$N_{-1}N_0, N_{-1}P_{-1}, P_{-1}P_{-1}, P_{-1}N_0, P_{-1}P_0, P_{-1}N_1, P_{-1}P_1, N_0P_1, N_0N_1, N_0P_0, P_0P_0$
4π	$P_{-2}P_{-1}, P_{-2}N_0, P_{-2}P_0, P_{-2}N_1, N_{-1}N_1, N_{-1}P_0, N_{-1}N_0, N_{-1}P_{-1}, N_{-1}N_{-1}, N_{-1}P_{-2}, P_{-1}P_{-2}, P_{-1}N_{-1}, P_{-1}P_{-1}, P_{-1}N_0, P_{-1}P_0, P_{-1}N_1, P_{-1}P_1, N_0P_1, N_0N_1, N_0P_0, P_0P_0$
5π	$N_{-2}N_0, N_{-2}P_{-1}, N_{-2}N_{-1}, N_{-2}P_{-2}, P_{-2}P_{-2}, P_{-2}N_{-1}, P_{-2}P_{-1}, P_{-2}N_0, P_{-2}P_0, P_{-2}N_1, P_{-2}P_1, P_{-2}N_2, N_{-1}N_2, N_{-1}P_1, N_{-1}N_1, N_{-1}P_0, N_{-1}N_0, N_{-1}P_{-1}, N_{-1}N_{-1}, N_{-1}P_{-2}, P_{-1}P_{-2}, P_{-1}N_{-1}, P_{-1}P_{-1}, P_{-1}N_0, P_{-1}P_0, P_{-1}N_1, P_{-1}P_1, N_0P_1, N_0N_1, N_0P_0, P_0P_0$

道, 则 $k + 2\pi$ 处必有 $\sigma_{n-1}\sigma_{n-1}\cdots\sigma_{0-1}m_P$ 轨道。从 $f(\theta)$ 图上看就是: 当极小值下降 1 时 ($k \rightarrow k + 2\pi$), 原来轨道上的点都将沿 θ 轴远离 m_0 平移 1 个单位左右。

仔细研究图 2 可以发现, 图 2 的拓扑性质可以利用轨道符号的大小比较, 新产生轨道的配对性质与新产生的极大轨道与极小轨道之间的关系唯一地确定。不过对于高周期轨道, 其数目随 k 的增加而迅速增加, 使得这种构造法成为没有意义的了。表 2 给出几个不同 k 值处由极小值出发的 1/3 轨道。为了简单起见, 表 2 中忽略了 m_1 。此外, 在同一 k 值处轨道的数目随周期而迅速增加, 例如在 $k = 2\pi$ 处有 3 条 1/2 轨道, 5 条 1/3 轨道, 15 条 1/4 轨道, 51 条 2/5 轨道…。这使得我们宁可用计算机生成的办法来给出这些轨道。

上述结果表明这些新生的轨道在不同的 Arnold 舌头中具有不同的结构, 在这个意义上它们不具有普适性。此外, 这些轨道的数目随 k 值迅速增加, 其在 (ω, k) 空间的测度非常小。因此, 在实际问题中远没有 Farey 序列、Farey 序列与 M.S.S. 序列的星积, 及二元树那么重要。

本工作得到王光瑞的帮助, 谨致谢意。

- [1] M. J. Feigenbaum, L. P. Kadanoff and S. J. Shenker, *Physica*, **5D**(1982), 370.
- [2] V. M. Alekseev, M. V. Yakobson, *Phys. Reports*, **75**(1981), 287.
- [3] N. Metropolis, M. I. Stein, P. R. Stein *J. Comb. Theor.*, **15**(1973), 25.
- [4] Chavoya-Aceves, F. Angulo-Brown and E. Pina, *Physica*, **D14**(1984), 374.
- [5] E. Pina, *Phys. Rev.*, **A34**(1986), 574.
- [5] Zeng Wan-zhen, Symbolic Dynamics of One-dimensional Mapping (Doctor thesis, 1987).
- [7] B. Derrida, A. Gervois, Y. Pomeau, *Annales de l'Institut Henri-Poincare*, **29**(1978), 305.
- [8] S. J. Chang, M. Wortis and J. Wrihgt, *Phys. Rev.*, **A24**(1981), 2669.
- [9] S. Fraser and R. Kapral, *Phys. Rev.*, **A30**(1984), 1017.

SYMBOLIC DYNAMICS OF THE CIRCLE MAP

ZHANG ZHONG-JIAN CHEN SHI-GANG

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing)

ABSTRACT

By the method of symbolic dynamics, the Farey sequences, the * products of Farey sequences and M. S. S. sequences, the binary trees and the new trajectories for varied Farey numbers of the circle map are studied.