

有限分枝分形上的自回避迹行走*

郑大昉 林志方 陶瑞宝

复旦大学物理系

1988年10月11日收到

本文考虑在 Sierpinski gasket 及分支 Koch 曲线上的自回避迹行走,运用实空间重整化群技术求出了相应的关联长度临界指数 ν . 结果表明,在 Sierpinski gasket 上,自回避迹行走与自回避行走属同一普适类;而在较高分枝度 ($R_{\max} > 3$) 的 Koch 曲线上,两者属不同普适类.

一、引 言

自回避行走 (SAW) 是聚合物链“斥体”效应的一个成功模型^[1],也可描述铁磁性 Ising 模型以及 n 分量自旋模型等^[2-4]. 此外,为了进一步描述聚合物链的各种统计性质及动力学生长行为,SAW 已有多种推广^[5-10],自回避迹行走 (SAT) 就是其中之一^[6].

SAT 与 SAW 十分类似,所不同的是格子的“棒”而不是“点”不容许被重复访问. Malakis 认为在小于三维的欧氏空间中的任意周期性格子(至少在二维正方格子)上 SAT 与 SAW 属同一普适类^[6]. 然而, Li 和 Zhou 等人则认为 SAT 可能属于一种新的普适类^[11,12]. 后来 Malakis 又借助于实空间重整化群技术,并利用 M 格子上的 SAW 与 L 格子上的 SAT 的等价关系,再次强调了在二维正方格子上 SAT 与 SAW 属同一普适类^[13]. 最近,人们认为生长的 SAT 与生长的 SAW 在二维正方格子上也属同一普适类^[14],这似乎也支持了 Malakis 的观点. 尽管如此,由于在欧氏空间中的重整化是无法严格的,故 Malakis 的结论还是不能令人十分满意.

有限分枝分形上的 SAW 已早有研究^[15]. 人们自然会想到在这些自相似性格子上 SAT 与 SAW 是否属同一普适类问题. 本文借助于文献 [15] 的严格实空间重整化群技术,通过求解关联长度临界指数 ν (或 SAT 分形维数 $D = 1/\nu$),考察了 Sierpinski gasket (SG) 及分支 Koch 曲线上的 SAT. 发现在 SG 上 SAT 与 SAW 属同一普适类,而在分枝度 $R_{\max} > 3$ 的 Koch 曲线上两者属不同普适类. 这些结论对理解欧氏空间周期性格子的相应问题也是有帮助的.

二、SG 上的 SAT

类似于文献 [15], 现在考察如图 1 SG 上的 SAT. 定义 P_i 为自 A 到 C 而不经 B

* 国家自然科学基金和国家教育委员会博士点基金资助的课题.

的 SAT 总数; P'_2 为自 A 到 C 且经过 B 的 SAT 总数. 对于 SAT 问题, 仅引入 P'_1 和 P'_2 是不够的. 在重整化过程中, 较高级的 SG 上将涉及到另外好几种构图. 图 2 为所有这些构图的示意图. 其中 P'_3 表示自 A 进入 SG 且从 A 出来, 但不经过 B 和 C 的 SAT 总数; P'_4 表示自 A 进入 SG 且从 A 出来, 其间经过 C 但不经过 B 的 SAT 总数; P'_5 表示自 A 进入 SG 且从 A 出来, 其间既经过 B 又经过 C 的 SAT 总数; P'_6 表示第一次按 P'_3 进出 SG, 第二次按 P'_1 从 C 至 B 的 SAT 总数; P'_7 表示依次从 A 和 C 按 P'_3 两次进出 SG 的 SAT 总数; P'_8 表示第一次按 P'_3 进出 SG, 第二次自 C 按 P'_4 进出 SG 的 SAT 总数; P'_9 表示依次从 A, B 和 C 按 P'_3 三次进出 SG 的 SAT 总数. 其递推关系如下:

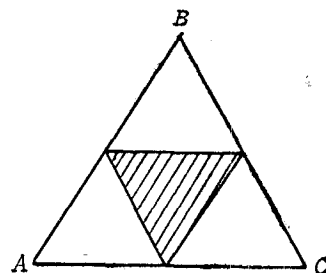


图1 Sierpinski gasket

$$\begin{aligned} P'_1 = & P_1^2 + 2P_1P_2 + 2P_1P_2P_3 + 2P_1P_2P_4 + 2P_1P_2P_6 \\ & + 2P_1P_4P_6 + 2P_1^2P_1 + P_1^2 + 2P_1P_1^2 + 2P_1^2P_3 \\ & + 3P_1^2P_4 + P_1^2P_7 + P_1^3, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} P'_2 = & P_1^2P_2 + 2P_1P_1^2 + 2P_1P_2P_4 + 2P_1^2P_1 + 2P_1P_2P_5 \\ & + 3P_1^2P_5 + 2P_1P_5P_6 + 2P_1^2P_6 + 2P_1^2P_8 + 2P_1^3, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} P'_3 = & P_3 + 2P_1 + 2P_3P_4 + 2P_1^2 + 2P_3P_4^2 + 2P_1^3 + 2P_3P_5 \\ & + 2P_1P_5 + P_1^2P_5 + 4P_1P_4P_5 + 2P_1P_5P_7 + 4P_1^2P_5 \\ & + 2P_1^2P_2 + P_5 + 2P_1^2P_8, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} P'_4 = & P_4^2 + 2P_1P_5 + 4P_3P_4P_5 + 2P_1^2P_5 + 4P_1P_5P_8 \\ & + P_5^2 + 2P_3P_5^2 + 4P_1P_5^2 + P_1^2P_7 + 2P_1P_1^2 + P_1^3, \end{aligned} \quad (4)$$

$$P'_5 = 2P_1^2 + 6P_1P_5^2 + 4P_1^3 + 6P_1^2P_8 + 3P_1^2P_5, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} P'_6 = & P_1^2P_3 + 2P_1^2P_1 + P_1^2P_5 + 2P_1P_2P_3 + 4P_1P_2P_4 \\ & + 2P_1P_2P_5 + 2P_1P_4P_6 + 2P_1P_5P_5 + 2P_1P_1P_6 + 2P_1P_5P_6 \\ & + 2P_1P_2P_6 + 2P_1P_2P_7 + 4P_1P_2P_8 + 4P_1P_6P_8 + P_1^2P_6 \\ & + 2P_1P_1^2 + P_1^2P_1 + 2P_1^2P_4 + 2P_1^2P_5 + 2P_1^2P_1 + 2P_1^2P_7 \\ & + 2P_1^2P_8 + P_1^2P_5 + P_5P_8^2 + 2P_1^3, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} P'_7 = & P_1^2 + 4P_1P_4 + 2P_1P_5 + 4P_1P_5 + 2P_1P_7 + 4P_1P_1 + 2P_1P_7 \\ & + 4P_1P_8 + 2P_1^2P_1 + 6P_1P_1^2 + 2P_1^2P_5 + 2P_1P_1^2 + 6P_1^2P_5 \\ & + 3P_1P_1^2 + 3P_1^2P_7 + 8P_1^2P_8 + 6P_1P_8^2 + P_1^2P_7 + 4P_1^2 \\ & + 4P_1^2 + P_1^2 + 4P_1P_2P_6 + 8P_1P_4P_5 + 6P_1P_5P_7 + 14P_1P_5P_8 \\ & + 4P_1P_4P_8 + 2P_1P_5P_7 + 8P_1P_5P_8 + 2P_1P_4P_5 + 4P_1P_7P_8, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} P'_8 = & P_1P_1^2 + P_3P_1^2 + 5P_1^2P_5 + 2P_1P_1^2 + 3P_1P_5 + 2P_1^2P_7 + 7P_1P_1^2 \\ & + 8P_1^2P_8 + P_1^2P_1 + \frac{3}{2}P_1^3 + 2P_1P_4P_5 + 2P_1P_5P_5 + 2P_1P_5P_8 \\ & + 2P_1^3, \end{aligned} \quad (8)$$

$$P'_9 = P_1^2 + 6P_1^2P_5 + 3P_1^2P_5 + 12P_1P_1^2 + 12P_1P_5P_5 + 3P_1P_1^2 + 8P_1^2$$

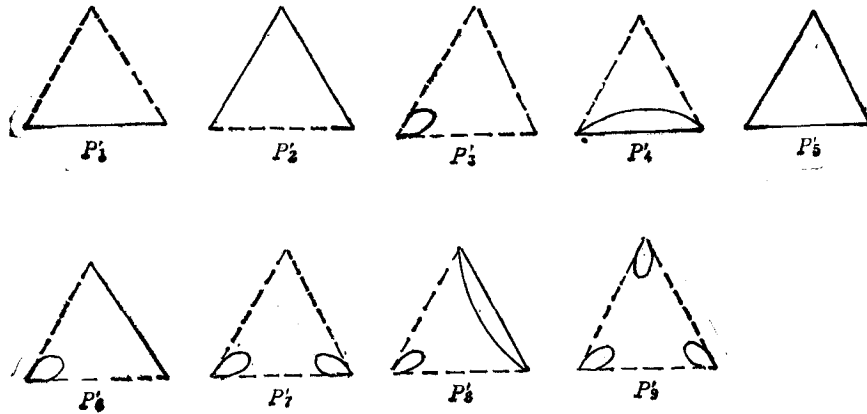


图2 SAT 在 SG 上重整化涉及的各种示意图

$$\begin{aligned}
 & + P_5^3 + 6P_1P_6^2 + 6P_3P_7 + 12P_3P_8 + 12P_4P_7P_8 + 24P_4P_8^2 \\
 & + 14P_8^3 + 6P_3P_5P_7 + 12P_3P_5P_8 + 3P_5P_7^2 + 24P_5P_7P_8 \\
 & + 39P_5P_8^2 + 12P_4^2P_7 + 18P_4P_5P_7 + 3P_4^2P_9 + 36P_4P_5P_8 \\
 & + 6P_4P_5P_9 + 12P_4^2P_9 + 24P_4^2P_8 + 6P_4^2P_7 + 15P_4^2P_9 \\
 & + 3P_4^2P_9 + 6P_4P_9^2 + 12P_5P_8P_9.
 \end{aligned} \quad (9)$$

注意到初始值: $P_1 = P_2 = 1$, $P_5 = 2$, $P_3 = P_4 = P_6 = P_7 = P_8 = P_9 = 0$, 则当 SG 的级别 $l \gg 1$ 时, 可得

$$P_7 = P_8, \quad 4P_3 = 2P_1 = P_5, \quad (10)$$

$$P_1/P_5 \rightarrow 0, \quad P_2/P_5 \rightarrow 0, \quad P_3/P_5 \rightarrow 0, \quad P_4/P_5 \rightarrow 0, \quad (11)$$

$$P_3P_5/P_8^2 = \mu, \quad P_5P_9/P_7P_5 = \omega. \quad (12)$$

其中 μ 和 ω 为与 l 有关的有限数, 它们满足固定点方程

$$\mu^* = (84 + 72\mu^*)/(7 + \mu^*)^2, \quad (13)$$

$$\omega^* = 3(\mu^* + 4\omega^*)/(7 + \mu^*)(1 + \omega^*). \quad (14)$$

根据以上结论, 在 $l \gg 1$ 时, 方程 (1)–(9) 退化为

$$P_1 = 2P_1P_5P_9 + P_1^2P_7, \quad (15)$$

$$P_2 = 2P_1P_5P_9 + 2P_1^2P_8, \quad (16)$$

$$P_3 = 2P_1P_5P_7 + 2P_1^2P_8, \quad (17)$$

$$P_4 = 4P_1P_5P_8 + P_1^2P_7, \quad (18)$$

$$P_5 = 6P_1^2P_8, \quad (19)$$

$$P_6 = 4P_1P_5P_9 + P_1^2P_9, \quad (20)$$

$$P_7 = 4P_1P_5P_8 + 2P_1P_5P_9 + 6P_1^2P_8, \quad (21)$$

$$P_8 = 7P_1P_8^2 + P_1^2P_9, \quad (22)$$

$$P_9 = 14P_8^3 + 12P_1P_8P_9. \quad (23)$$

定义 $N_i'(i = 1, 2, \dots, 9)$ 为对应于 P_i' 的平均步数. 当 $l \gg 1$ 时, 由于 $P_7 = P_8$, 故有 $P_1 = 2P_1'$, 因此求关联长度临界指数 ν 只需考虑以下递推式:

$$P_1' = 4(1 + \omega)P_1^2P_7, \quad (24)$$

$$P'_1 = 6P_1^2 P_7, \quad (25)$$

$$P'_7 = (7 + \mu)P_7 P_7^2. \quad (26)$$

从而易得 N'_1, N'_7 和 N'_7 满足的递推式

$$P'_1 N'_1 = 8(1 + \omega)P_1^2 P_7 N_1 + 4(1 + \omega)P_1^2 P_7 N_7, \quad (27)$$

$$P'_7 N'_7 = 12P_7^2 P_7 N_7 + 6P_7^2 P_7 N_7, \quad (28)$$

$$P'_7 N'_7 = (7 + \mu)P_7 P_7^2 N_7 + 2(7 + \mu)P_7 P_7^2 N_7, \quad (29)$$

或

$$\begin{bmatrix} N'_1 \\ N'_7 \\ N'_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_7 \\ N_7 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

不难求得上述转移矩阵的最大本征值 $\lambda_{\max} = 3$, 故关联长度临界指数

$$\nu = \ln b / \ln \lambda_{\max} = \ln 2 / \ln 3. \quad (31)$$

可见在 SG 上 SAT 与 SAW 服从相同的临界指数 $\nu^{[15]}$, 因此它们属同一普适类.

三、分枝 Koch 曲线上的 SAT

分枝度 $R_{\max} \leq 3$ 的 Koch 曲线上其结论是显而易见的. 如图 3(a) 的 Koch 曲线, SAT 与 SAW 是完全等价的, 关联长度临界指数均为 $\nu = \ln 3 / \ln 4^{[15]}$. 事实上, 对于任何 $R_{\max} \leq 3$ 的 Koch 曲线上 SAT 和 SAW 都是等价的.

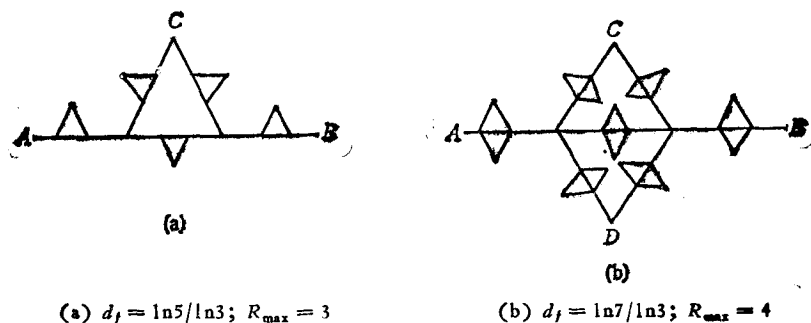


图3 分枝 Koch 曲线

对于 $R_{\max} > 3$ 的 Koch 曲线, 情形就不同了. 现考察图 3(b) 中 $R_{\max} = 4$ 的 Koch 曲线上的 SAT, 令 P'_1 为自 A 至 B , 其间不经过 C 和 D 的 SAT 总数; P'_2 为自 A 至 B , 其间只经过 C 或 D 的 SAT 总数; P'_3 为自 A 至 B , 其间既经过 C 又经过 D 的 SAT 总数. 其递推关系为

$$P'_1 = (P_1 + 2P_2 + 6P_3)^l, \quad (32)$$

$$P'_2 = (P_1 + 2P_2 + 6P_3)^l, \quad (33)$$

$$P'_3 = (P_1 + 2P_2 + 6P_3)^l. \quad (34)$$

当 $l \gg 1$ 时, 易看出 $P'_1/P'_3 \rightarrow 0$, $P'_2/P'_3 \rightarrow 0$. 故 P'_3 的路径占主要优势

$$P'_3 \sim (6P_3)^l. \quad (35)$$

定义 N'_3 为对应 P'_3 的 SAT 平均步数, 则当 $l \gg 1$ 时, 有

$$N'_3 \sim 7N_3. \quad (36)$$

从而得关联长度临界指数

$$\nu = \ln 3 / \ln 7. \quad (37)$$

如果相应地考察该曲线上的 SAW, 则易求得 $\nu = \ln 3 / \ln 4$. 可见, 在该 Koch 曲线上的 SAT 与 SAW 有很大区别, 它们服从不同的关联长度临界指数. 一般地, 对于 $R_{\max} > 3$ 的 Koch 曲线, 其 SAT 与 SAW 都是不等价的, 两者属不同的普适类.

四、讨 论

从本文得到的结果来看, 在 SG 上, SAT 与 SAW 一样, 其“斥体”效应不显示出来, 它们服从相同的关联长度临界指数 $\nu = 1/D_f$ (D_f 为 SG 分形维数), 因此, 在 SG 上 SAT 与 SAW 属同一普适类. 这同时也说明了在欧氏空间中尤其在二维正方格子上 SAT 与 SAW 属同一普适类并不是不可能的. 另一方面, 从 Koch 曲线上得出的结论告诉我们, 并非在所有分形上的 SAT 与 SAW 都属同一普适类. 这似乎也说明了即使在二维正方格子上 SAT 与 SAW 属同一普适类, 但不等于说在一切周期性格子上(那怕是小于三维) SAT 与 SAW 都属同一普适类. 因此, 不论是在欧氏空间中还是在分形格子上, SAT 与 SAW 属同一普适类与否是与格子的具体结构有很大关系.

- [1] C. Domb, *J. Chem. Phys.*, **38**(1963), 2957.
- [2] C. Domb, *J. Phys. C*, **3**(1970), 256.
- [3] D. S. McKenzie, *Phys. Rep.*, **27C**(1967), 35.
- [4] P. G. de Gennes, *Phys. Lett.*, **38A**(1972), 339.
- [5] L. Turban, *J. Phys. A*, **16**(1983), L643.
- [6] A. Malakis, *J. Phys. A*, **9**(1976), 1283.
- [7] I. Majid, N. Jan, A. Coniglio and H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1984), 1062.
- [8] K. Kremer and J. W. Lyklema, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985), 267.
- [9] L. Turbanand, J. M. Debierre, *J. Phys. A*, **20**(1987), 679.
- [10] J. W. Lyklema, *J. Phys. A*, **18**(1985), L617.
- [11] T. C. Li, Z. C. Zhou and L. Gao, *Phys. Lett.*, **102A**(1984), 11.
- [12] Z. C. Zhou and T. C. Li, *J. Phys. A*, **17**(1984), 2257.
- [13] A. Malakis, *J. Phys. A*, **17**(1984), L837.
- [14] P. M. Lam, *J. Phys. A*, **20**(1987), 4399.
- [15] D. B. Avraham and Havlin, *Phys. Rev.*, **A29**(1984), 2309.

SELF-AVOIDING TRAILS ON FINITELY RAMIFIED FRACTALS

ZHENG DA-FANG LIN ZHI-FANG TAO RUI-BAO

Department of Physics, Fudan University, Shanghai

(Received 11 October 1988)

ABSTRACT

Using an exact real-space renormalization-group technique, we show that self-avoiding trails (SAT) and self-avoiding walks (SAW) on the Sierpinski gasket enjoy the same critical exponent ν for the 'correlation length' and therefore belong to the same universality class. (On the other hand, it is shown that SAT on branching Koch curves with maximum ramification number $R_{\max} > 3$ belongs to another universality class different from that of SAW.