

拍波激光加速器中的频率匹配*

朱 蔚 通¹⁾

中国科学院上海光学精密机械研究所

1988年11月16日收到

本文从广义协变的运动方程和麦克斯韦方程出发,导出了电子等离子体波各量的解析表达式。指出 $\Delta\omega = 2\omega_p$ 的等离子体波是完全简谐的。完全共振的条件由

$$\Delta\omega = 2\omega_{p_0} \left[1 + \frac{e^2(A_1^{(1)})^2 + A_1^{(2)2}}{2m^2c^4} + \frac{3e^2A_2^{(1)}A_2^{(2)}}{m^2c^4} \right]^{-1/2}$$

给出。

一、引 言

近年来,拍波激光加速器成为人们日益感兴趣的研究课题。拍波加速的概念首先是由 Tajima 和 Dawson^[1] 提出。它是利用两个强激光束的非线性耦合产生的大振幅等离子体波俘捕电子到静电势阱中来加速电子的。关于拍波加速器中电子等离子体波的激发、饱和以及有关原理和参量,可参阅文献[2,3]。一般,加速原理和有关参量的讨论都是按拍波 $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \omega_p$ 进行。当所陷电子的速度保持非相对论情况时,所得到的最大静电场为 $E_L = m\omega_p c/e$ 的公式是适用的^[3],即它与高频激光场的振幅无关。但是当考虑到电子的热效应、相对论效应和电子等离子体波的有质动力效应时,电子等离子体波的离谐效应就明显,可获得的静电场不仅与电子等离子体波的频率有关,而且与高频场的振幅有关。例如, Tang 和 Horton 等人^[4]给出在 $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \omega_p$ 处的饱和电场为

$$E_L = \frac{m\omega_p c}{e} \left(\frac{16eE_1}{3m\omega_1 c} \frac{eE_2}{m\omega_2 c} \right)^{1/3}.$$

然而,怎样的激光拍波和等离子体频率的匹配得到的等离子体波才是完全简谐的,无离谐分量,以及什么样的条件可以达到完全共振,这些还没有讨论清楚。本文从广义协变的运动方程和麦克斯韦方程出发,导出了电子等离子体波的解析表达式,指出在忽略激光束本身引力效应的情况下, $\Delta\omega = 2\omega_p$ 的等离子体波是完全简谐的,完全共振的条件由

$$\Delta\omega = 2\omega_{p_0} \left[1 + \frac{e^2(A_1^{(1)})^2 + A_1^{(2)2}}{2m^2c^4} + \frac{3e^2A_2^{(1)}A_2^{(2)}}{m^2c^4} \right]^{-1/2}$$

给出。只要 ω_{p_0} , $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$ 满足这条件,所得电子等离子体波就可得到最大增长(受波裂限制)。

* 中国科学院重大科学研究项目“激光和物质相互作用”资助的课题。

1) 中国高等科学技术中心(世界实验室)理论物理分中心。

二、激光拍波和等离子体频率的匹配

设 y 方向偏振的两个高频电磁波 $E^{(1)} \cos(k_1 x - \omega_1 t) \mathbf{e}_y$ 和 $E^{(2)} \cos(k_2 x - \omega_2 t) \mathbf{e}_y$ 在背景密度为 n_0 的静止等离子体中沿 x 方向共线传播. 与此有关的矢势为

$$\mathbf{A}_i = A_i^{(1)} \cos(k_1 x - \omega_1 t + \phi_1) \mathbf{e}_y + A_i^{(2)} \cos(k_2 x - \omega_2 t + \phi_2) \mathbf{e}_y. \quad (1)$$

其中 $A_i^{(1)} = \frac{c E^{(1)}}{\omega_1}$, $A_i^{(2)} = \frac{c E^{(2)}}{\omega_2}$. 在这两个高频电磁场作用下, 激发出等离子体波

$$\mathbf{A}_i = A_{i0} \sin(k_p x - \omega_p t + \varphi_p(t)) \mathbf{e}_x. \quad (2)$$

其中 $\omega_1, \omega_2 \gg \omega_p$, ω_1 和 ω_2 为激光频率, $\omega_p = (4\pi |e|^2 n_0 / m)^{1/2}$ 为等离子体频率, n_0 为电子密度. 在我们的模型中 $k_{1,2}$ 为常数, $A_{i,n}$ 被认为不受等离子体密度扰动的影响. 这在 $\omega_{1,2} \gg \omega_p$, $|e| A_i / mc^2 \ll 1$ 和 $\delta n / n_0 \ll 1$ 时是一个好的近似, 其中 δn 为等离子体的密度扰动.

为了描述在这样的等离子体中的运动方程, 我们引入“光学度规”的概念. 这就是说, 如果介质是各向同性的、透明的和无耗散的, 它的电和磁的性质由它的标量极化率 $\epsilon(x^\alpha)$ 和磁化率 $\mu(x^\alpha)$ 来描述, 那么可以用“光学度规”来描述运动介质中的电磁现象. 光学度规

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right) u_\alpha u_\beta. \quad (3)$$

在这度规背景中, 广义协变的运动方程为

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = \frac{e}{mc^2} F_\nu^\mu V^\nu. \quad (4)$$

其中

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{c^2}{\epsilon\mu} dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (5)$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 中没有包括激光产生的引力场. $\Gamma_{\sigma\rho}^\mu$ 是仿射联络, 于是得到下面四个直流分量的测地方程:

$$\frac{dV^{(0)}}{d\tau} = \epsilon\mu \left(\frac{eF_{10}}{mc^2} V^{(1)} + \frac{eF_{20}}{mc^2} V^{(2)} \right), \quad (6)$$

$$\frac{dV^{(1)}}{d\tau} = \frac{eF_{10}}{mc^2} V^{(0)} + \frac{eF_{12}}{mc^2} V^{(2)}, \quad (7)$$

$$\frac{dV^{(2)}}{d\tau} = -\frac{eF_{20}}{mc^2} V^{(0)} + \frac{eF_{12}}{mc^2} V^{(1)} - \frac{e}{mc^2} \frac{d\bar{A}_2}{d\tau}, \quad (8)$$

$$\frac{dV^{(3)}}{d\tau} = 0. \quad (9)$$

其中 $V^{(i)} = \frac{dx^{(i)}}{d\tau}$, 从(8)式得到

$$V^{(2)} = -\frac{e\bar{A}_2}{mc^2} + c_2. \quad (10)$$

从(9)式得到

$$V^{(3)} = c_3. \quad (11)$$

c_2, c_3 为积分常数. 由 $A_2 = 0$ 时, $V^{(2)} = V^{(3)} = 0$, 可以定得 $c_2 = c_3 = 0$. 这里(6)–(10)式及以后各式中, 上面横线表示对高频场求平均.

用 $c^2 V^{(0)}$ 乘以(6)式, 减去(7)式乘以 $V^{(1)}$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{\varepsilon\mu} V^{(0)} \frac{dV^{(0)}}{d\tau} - V^{(1)} \frac{dV^{(1)}}{d\tau} &= -\frac{e^2 \bar{A}_2}{m^2 c^4} F_{20} V^{(0)} + \frac{e^2 \bar{A}_2}{m^2 c^4} F_{10} V^{(1)} \\ &= \frac{e^2 \bar{A}_2}{m^2 c^4} \left(\frac{\partial A_2}{\partial t} V^{(0)} + \frac{\partial A_2}{\partial x} V^{(1)} \right) = \frac{e^2 \bar{A}_2}{m^2 c^4} \frac{dA_2}{d\tau}. \end{aligned} \quad (12)$$

即

$$\frac{c^2}{\varepsilon\mu} V^{(0)^2} - V^{(1)^2} = \frac{e^2 \bar{A}_2^2}{m^2 c^4} + \mathcal{A}. \quad (13)$$

其中 $\mathcal{A}$ 为待定常数, 由 $A_2 = 0$ 时, $V^{(1)} = 0$, $V^{(0)} = \frac{\varepsilon\mu}{c}$, 可以定得 $\mathcal{A} = 1$. 于是(13)式取如下形式:

$$V^{(1)^2} = \frac{c^2 V^{(0)^2}}{\varepsilon\mu} - \frac{e^2 \bar{A}_2^2}{m^2 c^4} - 1. \quad (14)$$

因为 $\frac{d}{d\tau} = V^{(0)} \frac{d}{dt}$, 所以方程(6)可以改写为

$$\frac{V^{(0)}}{\varepsilon\mu} \frac{dV^{(0)}}{dt} = \frac{e F_{10}}{m c^4} V^{(1)} - \frac{e^2 \bar{A}_2 F_{20}}{m^2 c^4},$$

即

$$\frac{c^2}{2\varepsilon\mu} \frac{dV^{(0)^2}}{dt} = \frac{e F_{10}}{m c^2} \left[\frac{c^2 V^{(0)^2}}{\varepsilon\mu} - \frac{e^2 \bar{A}_2^2}{m^2 c^4} - 1 \right]^{1/2} - \frac{e^2 \bar{A}_2 F_{20}}{m^2 c^4}. \quad (15)$$

令 $\xi(x_0, t)$ 为沿 x 方向电子离平衡位置 x_0 的位移. 则

$$x(t) = x_0 + \xi(x_0, t).$$

A_1 中宗量只与 t 有关, F_{20} 可以写成 $F_{20} = -\frac{dA_2}{dt}$, (15)式可以写成

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{c^2 V^{(0)^2}}{\varepsilon\mu} - \frac{e^2 \bar{A}_2^2}{m^2 c^4} - 1 \right] = \frac{e F_{10}}{m c^2} \left[\frac{c^2 V^{(0)^2}}{\varepsilon\mu} - \frac{e^2 \bar{A}_2^2}{m^2 c^4} - 1 \right]^{1/2},$$

即

$$\left[\frac{c^2 V^{(0)^2}}{\varepsilon\mu} - \frac{e^2 \bar{A}_2^2}{m^2 c^4} - 1 \right] = \left(-\frac{e A_1}{m c^2} + \mathcal{B} \right)^2. \quad (16)$$

由 $t = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $V^{(0)} = \frac{\varepsilon\mu}{c}$, 得到

$$\mathcal{B} = 0.$$

所以

$$\frac{c^2 V^{(0)^2}}{\varepsilon\mu} = 1 + \left(\frac{e A_1}{m c^2} \right)^2 + \left(\frac{e A_2}{m c^2} \right)^2, \quad (17)$$

$$V^{(0)} = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c} \left[1 + \left(\frac{eA_1}{mc^2} \right)^2 + \left(\frac{eA_2}{mc^2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (18)$$

$$V^{(1)} = c^2 \frac{V^{(0)2}}{\epsilon\mu} - \frac{e^2 A_2^2}{m^2 c^4} - 1 = \left(\frac{eA_1}{mc^2} \right)^2 = (v_x V^{(0)})^2, \quad (19)$$

$$v_x = \frac{\pm c \left(\frac{eA_1}{mc^2} \right)}{\sqrt{\epsilon\mu} \left[1 + \left(\frac{eA_1}{mc^2} \right)^2 + \left(\frac{eA_2}{mc^2} \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} \overline{A_1^2} &= A_{10}^2 \sin^2[k_p x_0 - \omega_p t + \varphi_p(t)] \\ &= \frac{E_p^2}{\omega_p^2} \sin^2[k_p x_0 - \omega_p t + \varphi_p(t)]. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\overline{A_2^2} = \frac{1}{2} (A_1^{(1)2} + A_1^{(2)2}) + A_1^{(1)} A_1^{(2)} \cos(\Delta k x_0 - \Delta \omega t + \Delta \phi). \quad (22)$$

于是(20)式可以改写成

$$v_x = \frac{\pm e E_p \gamma}{mc \omega_p} \sin[k_p x - \omega_p t + \varphi_p(t)]. \quad (23)$$

其中

$$\gamma = \left\{ \left[1 + \frac{e^2}{2m^2 c^4} (A_1^{(1)2} + A_1^{(2)2}) + \frac{3e^2 A_1^{(1)} A_1^{(2)}}{m^2 c^4} \right] \epsilon\mu \right\}^{-1}. \quad (24)$$

而 k_p , ω_p , φ_p 分别为等离子体波的波矢、频率和位相

$$E_p = \omega_p \left(\frac{2A_1^{(1)} A_1^{(2)}}{m^2 c^4} \right)^{1/2}, \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2, \quad \Delta k = k_1 - k_2, \quad \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (25)$$

$$\omega_p = \frac{1}{2} \Delta\omega, \quad k_p = \frac{1}{2} \Delta k, \quad \varphi_p = \frac{1}{2} \Delta\phi = \text{const.} \quad (26)$$

(23)–(26)式表明, 两激光场的拍波产生 $2\omega_p$ 的等离子体波. 与文献[5] 对非相对论情况的冷等离子体的分析不同, 这里等离子体的频率不是等于拍波而是等于拍波的一半. 而等离子体波的振幅不仅正比于 ω_p , 而且与 $(A_1^{(1)} A_1^{(2)})^{1/2}$ 因子有关. 从(23)式看到, 这时不存在离谐成分.

三、完全共振条件

现在求完全共振的条件, 这时电子等离子体波可以获得最大值. 由连续方程

$$(nu^\mu)_{;\mu} = 0.$$

得到

$$(nV^{(0)})_{;0} + (nV^{(1)})_{;1} + (nV^{(2)})_{;2} + (nV^{(3)})_{;3} = V^{(0)} \frac{\partial n_0}{\partial t} + n_0 \frac{\partial V^{(0)}}{\partial x} = 0. \quad (27)$$

而由麦克斯韦方程

$$F^{\mu\nu};_\mu = -4\pi enu^\nu,$$

可以得到

$$\hbar_p E_p = -4\pi e n_p. \quad (28)$$

由 (27) 和 (28) 式, 可以得到 n_p 为任意值 (直到波破) 的条件为

$$\omega_p^2 = \omega_{p0}^2 \gamma.$$

而 ω_p 为一有效等离子体频率, $\omega_{p0} = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m} \right)^{1/2}$ 为固有等离子体频率.

由 $\omega_p = \frac{1}{2} \Delta\omega$, 我们要求

$$\gamma = \frac{(\Delta\omega)^2}{4\omega_{p0}^2} \left[1 + \frac{e^2(A_1^{(1)2} + A_2^{(1)2})}{2m^2 c^4} + \frac{3e^2 A_1^{(1)} A_2^{(2)}}{m^2 c^4} \right]^{-1} < 1,$$

即

$$\Delta\omega = 2\omega_{p0} \left[1 + \frac{e^2(A_1^{(1)2} + A_2^{(1)2})}{2m^2 c^4} + \frac{3e^2 A_1^{(1)} A_2^{(2)}}{m^2 c^4} \right]^{-1/2}.$$

只要 ω_{p0} , $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ 满足这一条件, 所得的电子等离子体波就得到了最大的增长. 这些新结果都是很有意义的. 这里讨论的问题与文献 [6] 讨论的电子能量增益的广义协变推导都表明了采用更合理的广义相对论框架处理拍波加速问题是令人感兴趣的. 当然, 其结果的正确与否尚需用实验来加以验证.

- [1] T. Tajima and J. M. Dawson, *Phys. Rev. Lett.*, 43(1979), 267.
- [2] F. F. Chen, Laser-driven particle accelerators, Invited paper presented at the 12 th SPIG (Yugoslav Symposium on Physics of Ionized Gases), Sibenik, Yugoslavia, September 3—7, (1984).
- [3] T. Tajima, *Laser and particle Beams*, 3(1985), Part 4, 351.
- [4] W. Horton and T. Tajima, *Phys. Rev.*, A31(1985), 3937.
- [5] M. N. Rosenbluth and C. S. Liu, *Phys. Rev. Lett.*, 29(1972), 701.
- [6] 朱蔚通等, 物理学报, 38 (1989), 注意第四期该文页码.

FREQUENCY MATCHING IN BEAT-WAVE LASER ACCELERATOR

ZHU SHI-TONG

Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica

(Received 16 November 1988)

ABSTRACT

According to the general covariant equation of motion and Maxwell equations, we derive the analytical expressions for various quantities of electron plasma wave. It is pointed out that the plasma wave with $\Delta\omega = 2\omega_p$ is completely harmonic. The condition of complete resonance is given by

$$\Delta\omega = 2\omega_{p0} \left[1 + \frac{e^2(A_1^{(1)2} + A_2^{(2)2})}{2m^2 c^4} + \frac{3e^2 A_1^{(1)} A_2^{(2)}}{m^2 c^4} \right]^{-1/2}.$$