

在平方晶格上自旋-1模型的一种近似解

叶 青

上海交通大学应用物理系, 凝聚态物理研究所
(1988年10月11日收到)

本文通过 decoration 变换和 decimation 变换把在平方晶格上的自旋-1模型等价于一个 checkerboard 晶格上具有次近邻和四体相互作用的伊辛模型, 并得到自旋-1模型的近似临界条件. 该近似临界条件在极限情况下与 Onsager 的严格解一致.

Blume-Emery-Griffiths (BEG) 模型即是人们所熟知的自旋-1模型, 它主要是为描述 He^3 - He^4 混合物中的相分离和超流序而引入的^[1]. 尽管人们运用了各种近似方法对这一模型的临界行为进行了研究, 但至今还没有得到全部的严格解. 最近, Hariguchi^[2]和 Wu^[3]在六角晶格中, 满足条件: $(\exp K) \cdot \text{ch} J = 1$ 的一个子空间上求得了严格解. 但是, 对平方晶格上的相应问题仍无法得到严格解.

本文运用 decoration 变换和 decimation 变换方法, 研究平方晶格上 BEG 模型的临界行为, 得到了这一模型的一种近似解, 它显示出与六角晶格上的相类似的临界行为. 并且, 这一近似解在极限情况下与 Onsager 的严格解相一致.

BEG 模型^[1]在平方晶格上的哈密顿量可表示为

$$\begin{aligned} -\beta H_{\text{BEG}} &= \sum_{(i,j)} (JS_i S_j + KS_i^2 S_j^2) - \sum_i GS_i^2 \\ &= \sum_{(i,j)} \left[JS_i S_j + KS_i^2 S_j^2 - \frac{G}{4} (S_i^2 + S_j^2) \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

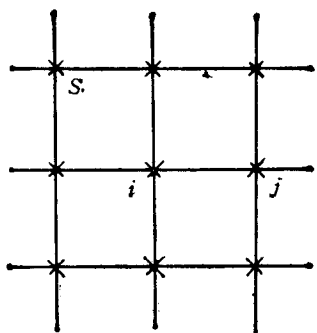
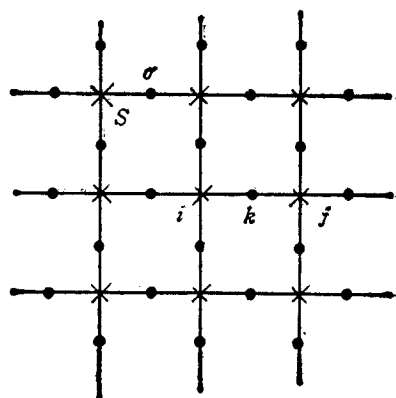
式中 $S_i = 0, \pm 1$ (每一格点的自旋), $\sum_{(i,j)}$ 表示对图 1 中所有最近邻的关联对求和. 相应的配分函数为

$$Z_{\text{BEG}} = \prod_{(i,j)} \exp \left[JS_i S_j + KS_i^2 S_j^2 - \frac{G}{4} (S_i^2 + S_j^2) \right]. \quad (2)$$

首先, 对 BEG 模型作 decoration 变换. 这就是在图 1, 对每一对最近邻的标有 $\times$ 符号的两个格点之中点掺入一自旋为 $\sigma = \pm 1$ 的格点, 并用 $\bullet$ 符号表之. 于是, 把 BEG 模型变换成如图 2 所示的平方晶格上的混合自旋模型. 这一模型的哈密顿量为

$$\begin{aligned} -\beta H_{\text{混合}} &= \sum_{(i,k)} J' S_i \sigma_k - \sum_i G' S_i^2 \\ &= \sum_{(i,k)} \left(J' S_i \sigma_k - \frac{G'}{4} S_i^2 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $\sum_{(i,k)}$ 表示对图 2 中所有最近邻的标有 $\times$ 符号格点和标有 $\bullet$ 符号格点组成的关联对求

图1 BEG 模型 ×表示格点自旋 $S = 0, \pm 1$ 图2 混合自旋模型 ×表示格点自旋 $S = 0, \pm 1$; ●表示格点自旋 $\sigma = \pm 1$

和。相应的配分函数为

$$Z_{\text{混合}} = \prod_{(i,k)} \exp \left(J' S_i \sigma_k - \frac{G'}{4} S_i^2 \right). \quad (4)$$

下面求上述两种模型，亦即 (1) 式和 (2) 式的参量之间的关系。将 (4) 式对图 2 中所有标有●符号的格点自旋组态 $\{\sigma_k\}$ 求和，得

$$\begin{aligned} Z_d &= \sum_{\{\sigma_k\}} \prod_{(i,k)} \exp \left(J' S_i \sigma_k - \frac{G'}{4} S_i^2 \right) \\ &= \prod_{(i,j)} \sum_{\sigma_k} \exp \left[J' (S_i + S_j) \sigma_k - \frac{G'}{4} (S_i^2 + S_j^2) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\prod_{(i,j)}$ 表示对图 2 中所有标有×符号格点的次近邻对求积。显然，由 (2) 式和 (5) 式可得

$$\begin{aligned} &\prod_{(i,j)} \sum_{\sigma_k} \exp \left[J' (S_i + S_j) \sigma_k - \frac{G'}{4} (S_i^2 + S_j^2) \right] \\ &= \prod_{(i,j)} A \exp \left[J S_i S_j + K S_i^2 S_j^2 - \frac{G}{4} (S_i^2 + S_j^2) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

比较上式等号两边，得

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma_k = \pm 1} \exp \left[J' (S_i + S_j) \sigma_k - \frac{G'}{4} (S_i^2 + S_j^2) \right] \\ &= A \exp \left[J S_i S_j + K S_i^2 S_j^2 - \frac{G}{4} (S_i^2 + S_j^2) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

化简 (7) 式，得

$$\begin{aligned} &A \exp \left[J S_i S_j + K S_i^2 S_j^2 - \frac{G}{4} (S_i^2 + S_j^2) \right] \\ &= 2 \left\{ \exp \left[-\frac{G'}{4} (S_i^2 + S_j^2) \right] \right\} \cdot \text{ch} J' (S_i + S_j). \end{aligned} \quad (8)$$

式中 A 为比例系数。运用 BEG 模型中最近邻关联对的格点自旋 (S_i, S_j) 的四个不同组

态: $(0,0), (1,0), (1,-1), (1,1)$, 由 (8) 式可求得 A , 并建立参量 J, K, G 与 J', G' 之间的关系, 其为

$$A = 2, \quad (9)$$

$$J = \frac{1}{2} \ln(\text{ch} 2J'), \quad (10)$$

$$K = \ln(\sqrt{\text{ch} 2J' / \text{ch}^2 J'}), \quad (11)$$

$$G = G' - 4 \ln(\text{ch} J'), \quad (12)$$

或者

$$J' = \frac{1}{2} \text{Arch}(\exp 2J), \quad (13)$$

$$G' = 2J - 2K + G, \quad (14)$$

$$(\exp K) \cdot \text{ch} J = 1. \quad (15)$$

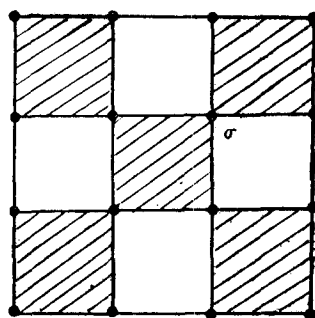


图3 checkerboard晶格 ●表示格点自旋 $\sigma = \pm 1$; 打斜线的方格表示它的四个格点存在次近邻和四体相互作用

其次, 对混合自旋模型作 decimation 变换, 亦即在图

2, 对所有标有 $\times$ 符号的格点自旋 $S = 0, \pm 1$, 进行严格的 decimation 变换。把混合自旋模型等价于一个 checkerboard 晶格上具有次近邻和四体相互作用的伊辛模型, 见图

3。易知此时每一格点自旋均为 $\sigma = \pm 1$ 。在这一基础上, 再通过对偶变换^[4], 该模型可等价于一个 8 顶角模型。文献 [4] 运用自由费密近似得到了该模型的一个近似临界条件

$$\begin{aligned} & (\text{ch}^2 2J' - 2\text{ch} 2J' - 1 - g)(\text{ch}^2 2J' + 2\text{ch} 2J' + 1 + 2g) \\ & = g(1 - \text{ch} 2J')^2. \end{aligned} \quad (16)$$

式中 $g = \exp G'$ 。由 (14) 式和 (15) 式可得

$$g = (\exp G) \cdot (\exp 2J) \cdot \text{ch}^2 J. \quad (17)$$

将 (13) 式和 (17) 式代入 (16) 式, 经化简可得

$$\text{th} |J| = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \exp G \right). \quad (18)$$

这就是平方晶格上 BEG 模型在满足条件 $(\exp K) \cdot \text{ch} J = 1$ 时的临界条件的一个近似解。当参量 $G \rightarrow -\infty$ 时, 上式化为

$$\text{th} |J| = 1/(1 + \sqrt{2}). \quad (19)$$

这与 Onsager 的严格解完全一致^[5]。

与六角晶格上的相应问题一样, 存在一个 G_c , 当 $G > G_c$ 时, 无相变发生^[6]。

[1] M. Blume, V. J. Emery and R. B. Griffiths, *Phys. Rev.*, **A4**(1971), 1071.

[2] T. Hariguchi, *Phys. Lett.*, **A113**(1986), 425.

[3] F. Y. Wu, *Phys. Lett.*, **A116**(1986), 245.

[4] 唐坤发, 本刊本期.

[5] L. Onsager, *Phys. Rev.*, **65**(1944), 117.

AN APPROXIMATE SOLUTION FOR SQUARE-LATTICE SPIN-1 MODEL

YE QING

*Department of Applied Physics, Institute of Condensed
Matter Physics, Shanghai JiaoTong University*

(Received 11 October 1988)

ABSTRACT

In this paper, we apply the decoration and decimation transformation to the square-lattice spin-1 model and show that it is equivalent to a checkerboard Ising model with cross and four-spin interactions. Then, the approximate critical condition is obtained for the model and it reduces to Onsager's exact solution in the Ising-model limit.