

## 三结点 hierarchical 晶格上具有三体相互作用伊辛模型的临界行为

王福高 唐坤发 胡嘉桢

上海交通大学应用物理系, 凝聚态物理研究所

1988年10月24日收到

本文运用严格重整化变换研究了三结点 hierarchical 晶格上具有三体相互作用的伊辛模型。研究表明, 与布喇菲晶格上的情况一样, 最近邻二体相互作用伊辛模型与三体相互作用伊辛模型 (Baxter-Wu 模型) 属于不同的普适类。

hierarchical 晶格是由生成元按某一生成方式重复生成的晶格。这种晶格的生成由两个因素决定, 第一是生成元, 第二是生成方式。在生成过程中, 每一次生成的晶格将成为下一次生成新晶格新的生成元, 按此方式生成的晶格叫 hierarchical 晶格。(可译为谱系晶格) hierarchical 晶格比布喇菲晶格的对称性低, 不具有长程序, 但具有自相似性, 因此, 这种晶格上自旋体系的临界行为可用重整化群进行研究。

近年来, hierarchical 晶格上的相变研究引起了人们的普遍重视。一些在布喇菲晶格上只有近似的重整化变换的模型, 在 hierarchical 晶格上却有严格的重整化变换<sup>[1]</sup>。因此, 物理学家把这种晶格作为一种方便的研究对象, 用于发现新的现象, 验证新的思想。由于这种晶格的对称性比布喇菲晶格要低, 因而能借此了解低对称性物理体系的一些性质, 如随机磁体、界面等。

在相变和临界现象中, 普适性是一个很重要的概念, 重整化群理论给普适性以很好的描述。在布喇菲晶格上, 普适性只与空间维数、晶格对称性以及自旋自由度有关。对于 hierarchical 晶格, 普适性程度大大降低。Hu<sup>[2]</sup> 研究了 hierarchical 晶格几何结构对普适性的影响, 发现临界性质与晶格几何结构的关系非常密切, 并指出布喇菲晶格上的那种普适性不再存在。在布喇菲晶格上, Baxter 和 Wu<sup>[3]</sup> 成功地给出了三角晶格上仅有三体相互作用伊辛模型的严格解。以后, 人们便把该模型称为 Baxter-Wu 模型。它与只有二体最近邻相互作用的伊辛模型属于不同的普适类。与 Baxter 模型一样, 多体相互作用改变了模型的普适类。既然在布喇菲晶格上, 多体相互作用改变了模型的普适类, 那么, 在 hierarchical 晶格上, 多体相互作用的影响如何呢? 这无疑是一个令人感兴趣的问题。本文将研究三结点 hierarchical 晶格上具有三体相互作用的伊辛模型, 以回答上述问题。

通常 hierarchical 晶格只有两个结点, 各向异性和多体相互作用无法考虑。为了考察这类低对称性晶格上各向异性对临界现象的影响, Tang 和 Hu<sup>[4]</sup> 引进了多结点 hierarchical 晶格的概念, 并研究了三结点 hierarchical 晶格上各向异性伊辛模型, 结果

发现其临界行为与布喇菲晶格上的相应问题大不一样. 各向异性使相变分成了四个不同的普适类. 而在布喇菲晶格上只有一个普适类, 各向异性对临界行为没有影响.

图 1 为我们所考虑晶格的生成元. 图 2 为通过一次操作后所生成的晶格. 如图 3, 三结点 hierarchical 晶格是由生成元重复迭代构成的. 图 3 为以图 2 作为新的生成元, 重复图 1 到图 2 的操作所生成的晶格. 为了简明起见, 图 3 只画了一半, 还有相同的另一半通过  $A, B, C$  三点与所画的一半连结在一起. 按照上述方法反复操作生成的晶格具有自相似性. 通过一次操作后的晶格由 6 个生成元组成, 而我们取的标度变换因子为 2, 因此分数维数  $d = \ln 6 / \ln 2 = 2.5849^{[9]}$ .

我们所考虑的伊辛模型具有下列形式的哈密顿量:

$$H = -\bar{K} \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - \bar{J} \sum_{\langle ijk \rangle} \sigma_i \sigma_j \sigma_k - \bar{h} \sum_i \sigma_i. \quad (1)$$

其中  $\sigma_i = \pm 1$ ,  $\bar{K}$  为二体相互作用耦合系数,  $\bar{J}$  为三体相互作用耦合系数,  $\bar{h}$  为外场.  $\sum_{\langle ij \rangle}$  为对所有最近邻自旋对求和,  $\sum_{\langle ijk \rangle}$  为对构成与生成元形状大小一样的所有自旋组合求和,  $\sum_i$  为对所有自旋求和. 由 (1) 式, 通过对图 2 中的所有内部自旋求和, 得到重整化方程式为

$$\begin{aligned} K' &= \frac{1}{4} \ln \frac{AB}{CD}, \\ J' &= \frac{1}{4} \ln \frac{AD^3}{BC^3}, \\ h' &= h + \frac{1}{2} \ln \frac{AC}{BD}. \end{aligned}$$

其中

$$A = \exp(3K + 3J) \cdot \cosh(6K + 3h) + 3 \exp(-K - J) \cdot \cosh(2K + h),$$

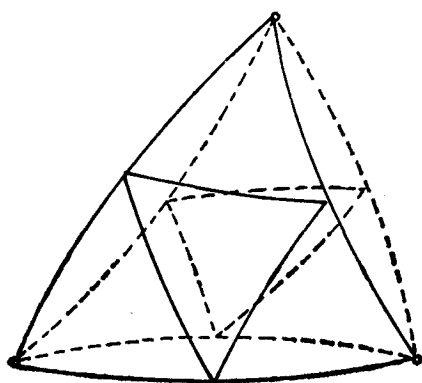


图 2

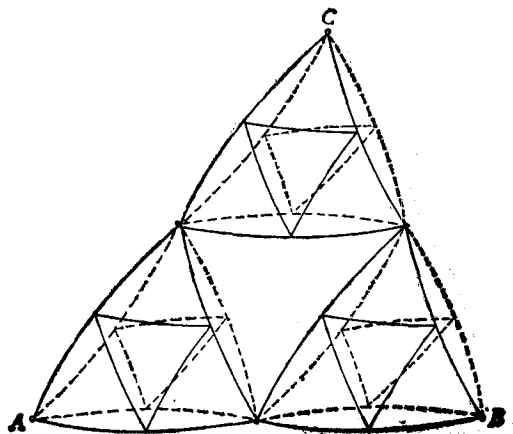


图 3

$$\begin{aligned}
B &= \exp(3K - 3J) \cdot \cosh(-6K + 3h) + 3 \exp(-K + J) \cdot \cosh(-2K + h), \\
C &= \exp(3K + J) \cdot \cosh(2K + 3h) + 2 \exp(-K + J) \cdot \cosh(2K + h) \\
&\quad + \exp(-K - 3J) \cdot \cosh(-2K + h), \\
D &= \exp(3K - J) \cdot \cosh(-2K + 3h) + 2 \exp(-K - J) \cdot \cosh(-2K + h) \\
&\quad + \exp(-K + 3J) \cdot \cosh(2K + h).
\end{aligned}$$

表 1  $y_i = \frac{\ln \lambda_i}{d \ln b}$ ,  $b = 2$ ,  $d = \ln 6 / \ln 2$

|   | 固定点( $e^K, e^J, e^h$ ) | 本征值( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) | 临界指数( $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ) |
|---|------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------|
| A | (1.3403, 1, 1)         | (2.1101, 4.4443, 0.5243)                 | (0.4168, 0.8324, -0.3604)              |
| B | (1, 2.8901, 1)         | (0.6180, 1.8341, 1)                      | (-0.2686, 0.3445, 0)                   |

根据递推关系,我们找到了两个非平庸不动点,见表 1. A 对应于只有最近邻对相互作用的情况, B 对应于只有三体相互作用情况. 我们的计算表明: 它们不属于同一个普适类,与布喇菲晶格上的情况一样.

- [1] A. N. Berker & S. Ostlund, *J. Phys. C*, 12(1979), 4961.
- [2] Bambi Hu, *Phys. Rev. Lett.*, 55(1985), 2316.
- [3] R. J. Baxter & F. Y. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, 31(1973), 1294.
- [4] K. F. Tang (唐坤发) & J. Z. Hu (胡嘉楨), *J. Phys. A*, 21(1988), 785.
- [5] B. B. Mandelbrot, *Fractals: Form Chance and Dimension*, Freeman, San Francisco, (1965); B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, (1982).

## CRITICAL BEHAVIOUR OF ISING MODEL WITH THREE-SPIN INTERACTIONS ON THREE-NODE HIERARCHICAL LATTICES

WANG FU-GAO   TANG KUN-FA   HU JIA-ZHEN

*Department of Applied Physics, Institute of Condensed Matter Physics, Shanghai Jiaotong University*

(Received 24 October 1988)

### ABSTRACT

The critical behavior of Ising model with three-spin interactions on three-node hierarchical lattices is investigated by using an exact renormalization group transformation. As in the case of Bravais lattices, the model with two-spin interactions and the one with three-spin interactions belong to different universality classes.