

描述蠕变过程中内耗的四参量模型*

孔庆平 山 冰

中国科学院固体物理研究所

1988年8月3日收到

实验表明：蠕变过程中的内耗兼有 Maxwell 二参量模型的性质和滞弹性三参量模型的性质。

本文提出一个用以描述蠕变过程中内耗的四参量模型。由此模型推导出的内耗表达式为

$$Q^{-1} = \frac{1}{\omega\tau_1} + \Delta \frac{\omega\tau_2}{1 + \omega^2\tau_2^2},$$

式中 ω 为测量圆频率， τ_1 和 τ_2 分别为粘弹性内耗和滞弹性内耗的弛豫时间， Δ 为弛豫强度。

这个内耗表达式可以满意地说明蠕变过程中内耗随时间的变化，以及内耗对蠕变速率、实验温度和测量频率的依赖关系。

文中还从微观上分析了四参量模型中各元件的物理本质。

一、引言

蠕变过程中的内耗，是在蠕变试验过程中测量出的内耗。它是在恒定的蠕变应力下迭加一个微小的交变应力所产生的特殊内耗现象。研究这种内耗，不仅可以对蠕变过程提供新的知识，而且有助于内耗学科本身的发展。目前国内外较多采用的测量方法是：在拉伸蠕变过程中用低频扭摆（~1Hz）测量试样的内耗^[1-6]。

我们对多种金属材料蠕变过程中的内耗进行过广泛的测量^[7]，并对单晶和多晶纯铝蠕变过程中的内耗进行过比较系统的研究^[6]。它们的一般规律是：在蠕变第一阶段，内耗随时间的进行而连续下降；在蠕变第二阶段，内耗趋于稳定值。降低频率测量时，内耗的整体水平升高，表现出 Maxwell 型粘弹性内耗的性质。单晶纯铝在适当条件下，在蠕变第一阶段后期出现一个显著的时间内耗峰（ Q^{-1-t} 峰），与内耗同时测得的模量亏损在 Q^{-1-t} 峰处有较大的下降^[6]。这一点与滞弹性内耗的性质相同。

可见，蠕变过程中的内耗兼有一些滞弹性内耗的性质和 Maxwell 型粘弹性内耗的性质。但单纯的滞弹性模型，不能解释蠕变过程中内耗对形变速率和测量频率的依赖关系。单纯的 Maxwell 模型，不能解释 Q^{-1-t} 峰及其与模量亏损的对应关系。我们认为，蠕变过程中的内耗可以用一种四参量模型来描述。这种四参量模型可以看成由 Maxwell 二参量模型和滞弹性三参量模型结合而成。

* 中国科学院重大科研项目资助的课题。

二、四参量模型及其内耗表达式

Maxwell 二参量模型由一个弹簧与一个阻尼器串联而成。由此模型得出的内耗表达式为^[7]

$$Q^{-1} = \frac{1}{J_0 \omega \eta_1} = \frac{1}{\omega \tau_1}, \quad (1)$$

式中 J_0 为弹簧的柔度, ω 为测量圆频率, η_1 为阻尼器的粘滞系数, τ_1 为弛豫时间。

滞弹性三参量模型由一个弹簧与一个阻尼器并联后, 再与另一个弹簧串联而成。由此模型得出的内耗表达式为^[8,9]

$$Q^{-1} = \Delta \frac{\omega \tau_2}{1 + \omega^2 \tau_2^2}, \quad (2)$$

式中 Δ 为弛豫强度, τ_2 为弛豫时间。

本文提出的四参量模型, 如图 1 所示。图 1 中下端弹簧 a 的柔度为 J_0 , 与此弹簧串联的阻尼器 b 的粘滞系数为 η_1 , 弛豫时间 $\tau_1 = \eta_1 J_0$ 。上端弹簧 c (柔度为 δJ) 与阻尼器 d (粘滞系数为 η_2) 并联, 弛豫时间 $\tau_2 = \eta_2 \delta J$ 。

此模型中的应力 σ 和应变 ϵ 分别为

$$\sigma = \sigma_a = \sigma_b = \sigma_c + \sigma_d, \quad (3)$$

$$\epsilon = \epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c, \quad (4a)$$

$$\epsilon_c = \epsilon_d. \quad (4b)$$

各单元的应力-应变关系分别为

$$\epsilon_a = J_0 \sigma_a, \quad (5)$$

$$\eta_1 \dot{\epsilon}_b = \frac{\tau_1}{J_0} \dot{\epsilon}_b = \sigma_b, \quad (6)$$

$$\epsilon_c = \delta J \sigma_c, \quad (7)$$

$$\eta_2 \dot{\epsilon}_d = \frac{\tau_2}{\delta J} \dot{\epsilon}_d = \sigma_d. \quad (8)$$

根据(3)–(8)式, 即可导出四参量模型的应力-应变关系式

$$\ddot{\epsilon} + \frac{\dot{\epsilon}}{\tau_2} = J_0 \ddot{\sigma} + \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{J_0}{\tau_1} + \frac{\delta J}{\tau_2} \right) \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\eta_1 \tau_2}. \quad (9)$$

测量内耗的交变应力为

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}, \quad (10)$$

相应的应变为

$$\epsilon = (\epsilon_1 - i\epsilon_2) e^{i\omega t}, \quad (11)$$

式中 σ_0 为应力幅, t 为时间, ϵ_1 和 ϵ_2 分别为与应力同位相和落后 $\pi/2$ 位相的应变分量。

将(10), (11)式代入(9)式, 并令等式两端实部与虚部分别相等, 即可得出“储能柔度”

(storage compliance) J_1 和“耗能柔度” (loss compliance) J_2 , 分别为

$$J_1(\omega) = \frac{\varepsilon_1}{\sigma_0} = J_0 + \frac{\delta J}{1 + \omega^2 \tau_2^2}, \quad (12)$$

$$J_2(\omega) = \frac{\varepsilon_2}{\sigma_0} = \delta J \cdot \frac{\omega \tau_1}{1 + \omega^2 \tau_2^2} + \frac{1}{\omega \eta_1}. \quad (13)$$

于是, 内耗的表达式为

$$\begin{aligned} Q^{-1} &= \frac{J_2(\omega)}{J_1(\omega)} \\ &= \frac{1}{J_0 \omega \eta_1} \frac{1 + \omega^2 \tau_2^2}{1 + \Delta + \omega^2 \tau_2^2} + \Delta \frac{\omega \tau_1}{1 + \Delta + \omega^2 \tau_2^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

式中弛豫强度

$$\Delta = \delta J / J_0. \quad (15)$$

当 Δ 较小时, (14) 式可简化成

$$Q^{-1} = \frac{1}{J_0 \omega \eta_1} + \Delta \frac{\omega \tau_1}{1 + \omega^2 \tau_2^2} \quad (16a)$$

或

$$Q^{-1} = \frac{1}{\omega \tau_1} + \Delta \frac{\omega \tau_2}{1 + \omega^2 \tau_2^2}. \quad (16b)$$

可见, (16a) 或 (16b) 式等号右端第一项相当于 Maxwell 型二参数模型的内耗, 第二项相当于滞弹性三参数模型的内耗。四参数模型的内耗, 就是这两种内耗的迭加。这里还应指出, Maxwell 二参数模型中的弛豫时间 τ_1 只有在特定条件下才有明确的物理意义, 故 (16a) 式比 (16b) 式有较大的适用性。

如果两个阻尼器 b, d 的粘滞系数成正比, 即 $\alpha \eta_1 = \eta_2$, 则 $\tau_1 = \tau_2 / (\alpha \Delta)$, 式中 α 为比例系数, 于是(16)式可改写成

$$Q^{-1} = \frac{\alpha \Delta}{\omega \tau_2} + \Delta \frac{\omega \tau_2}{1 + \omega^2 \tau_2^2}. \quad (17)$$

三、与实验的比较

1. 蠕变过程中内耗随时间的变化

由(16)式所表示的四参数模型的内耗表达式, 可以看出, 这种内耗兼有 Maxwell 型粘弹性内耗的性质和滞弹性内耗的性质。(16)式等号右端第一项表明, 当粘滞系数 η_1 或弛豫时间 τ_1 ($\tau_1 = \eta_1 J_0$) 随蠕变时间 t 而增加时, 内耗将单调下降; 当 η_1 或 τ_1 增加到稳定值时, 内耗也降低到稳定值。(16)式等号右端第二项表明, 当粘滞系数 η_2 或弛豫时间 τ_2 ($\tau_2 = \eta_2 \delta J$) 随蠕变时间而增加时,会在 $\omega \tau_2 = 1$ 处引起一个时间内耗峰(Q^{-1} -峰)。

由(12)式还可看出, 四参数模型中的 $J_1(\omega)$ 与滞弹性的 $J_1(\omega)$ 形式相同。故在内耗峰附近, 模量随 τ 的变化也应该相似。而对于单纯的 Maxwell 型弛豫, 模量应保持不变。

图 2 示出 (16) 式所表示的内耗。虚线 I 表示 (16) 式等号右端第一项所代表的 Maxwell 型粘弹性内耗, 虚线 II 表示第二项所代表的滞弹性内耗。实线 1 表示两者的迭加, 即四参数模型的内耗, 实线 2 为由(12)式算出的 $(J_1 - J_0)/J_0$ 即模量亏损。

图 3 为单晶纯铝蠕变过程中内耗(曲线 1)和模量亏损(曲线 2)的实验结果, 蠕变温度为 190°C, 应力为 1.05 kg/mm², 测量频率为 1.4 Hz。由图 3 可见, 内耗总的的趋势是随时间而下降, 到蠕变第二阶段趋于稳定值。但在蠕变第一阶段后期, 出现了一个显著的时间内耗峰(Q^{-1-t} 峰), 并且在峰附近的模量亏损有较大的下降, 与滞弹性弛豫的情况相似。这些结果与四参数模型所预期的相符。

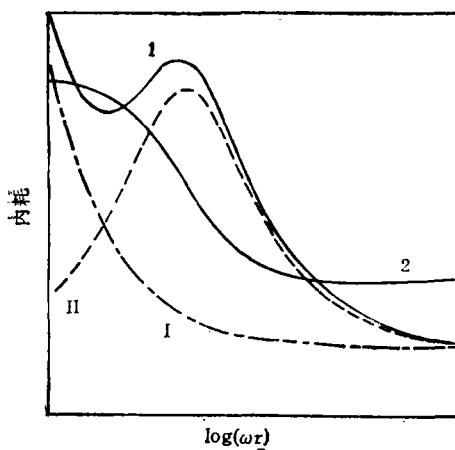


图 2 四参数模型的内耗(1)与模量亏损(2)

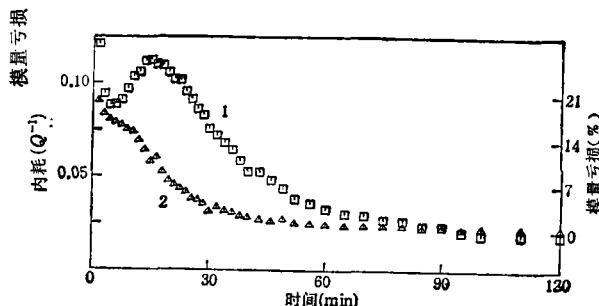


图 3 单晶纯铝蠕变过程中的内耗(1)与模量亏损(2)

由(16)式还可看出, 当降低测量频率时, Q^{-1-t} 峰应该向 τ_2 或 η_2 增大的方向移动, 即峰应该出现较晚, 并且内耗的整体水平增高。这一点也已为实验所证实^[6]。

多晶纯铝在与图 3 相似的实验条件下, 内耗随时间变化的总趋势与单晶纯铝相同, 即内耗在蠕变第一阶段逐渐下降, 到蠕变第二阶段趋于稳定, 但不出现时间内耗峰^[6]。这可能是由于在多晶情况下, 弛豫时间 τ_2 随蠕变时间 t 增加得太快, Q^{-1-t} 峰出现得很早, 而淹没在蠕变初期的高背景中。

2. 关于粘滞系数和弛豫时间增加的原因

在上节中, 曾假定阻尼器的粘滞系数 η_1 , η_2 (或弛豫时间 τ_1 , τ_2) 随蠕变时间 t 而增加, 从而得到了理论与实验相符的结果。下面用蠕变过程中位错运动阻尼系数 B 的增加, 说明阻尼器粘滞系数 η (η_1 或 η_2) 的增加。

阻尼器粘滞系数 η 与位错运动阻尼系数 B 之间的关系为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{d(\sigma_e b)}{d\dot{\varepsilon}} = \frac{d(\sigma_e b)}{d(n_p \rho b V)} = \frac{1}{n_p \rho b} \frac{d(\sigma_e b)}{dV} \\ &= \frac{B}{n_p \rho b}, \end{aligned} \quad (18)$$

式中 σ_e 为有效应力, b 为位错的柏格斯矢量, $\dot{\varepsilon}$ 为蠕变速率, n_p 为取向因子, ρ 为运动位

错密度, V 为位错运动速率, 并且

$$\dot{\varepsilon} = n_p \rho b V. \quad (19)$$

在 $0.5T_m$ (T_m 为熔点绝对温度)附近的蠕变过程中, 可以认为, 带割阶的位错滑移是主要的形变机制, 从而^[10]

$$\begin{aligned} V(\sigma_e) &= \frac{4\pi D}{h} \left[\exp \left(\frac{\sigma_e b d l}{k T} \right) - 1 \right] \\ &\doteq \frac{4\pi D}{h} \exp \left(\frac{\sigma_e b d l}{k T} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

式中 D 为自扩散系数, h 为割阶高度, l 为割阶间距, d 为一次热激活后割阶移动的距离, bdl 即为激活体积, k 为玻耳兹曼常数, T 为蠕变温度. 因而, 位错运动的阻尼系数为

$$\begin{aligned} B &= \frac{d(\sigma_e b)}{dV(\sigma_e)} = \frac{h}{4\pi D} \frac{bkT}{bdl} \exp \left(-\frac{\sigma_e b d l}{k T} \right) \\ &= \frac{bkT}{bdl} \frac{1}{V(\sigma_e)}. \end{aligned} \quad (21)$$

将(21)式代入(18)式得

$$\eta = \frac{bkT}{bdl} \frac{1}{n_p \rho b V} = \frac{bkT}{bdl} \frac{1}{\dot{\varepsilon}}. \quad (22)$$

在蠕变第一阶段, 蠕变速率 $\dot{\varepsilon}$ 是逐渐减小的, 由于位错密度增加和位错交截加剧, 割阶间距 l 也应逐渐减小. 由(22)式可见, 这两个因素都使粘滞系数 η 增加, 因而使弛豫时间 τ 增加. 到稳态蠕变阶段, η 和 τ 则达到较大的稳定值.

3. 蠕变过程中内耗与蠕变速率的关系

由上节的分析可知, 在蠕变第一阶段, 粘滞系数 η 和弛豫时间 τ 是逐渐增加的. 但在稳态蠕变阶段, 蠕变速率 $\dot{\varepsilon}$ 和割阶间距 l 均趋于较小的稳定值. 因而由(22)式可知, η 和 τ 均趋于较大的稳定值.

在稳态蠕变阶段, τ_2 较大, 因而 $\omega\tau_2 \gg 1$. 假定这时 $\alpha\eta_1 = \eta_2$, α 为一常数, 因而 $\tau_1 = \tau_2/(\alpha\Delta)$. 故(16)式可以简化成

$$Q^{-1} = \frac{1}{\omega\tau_1} + \frac{\Delta}{\omega\tau_2} = \frac{1 + \alpha}{J_U \omega \eta_2}. \quad (23)$$

将(22)式代入(23)式得

$$Q^{-1} = (1 + \alpha) \frac{l d}{J_U k T \omega} \frac{\dot{\varepsilon}}{k T \omega} = \frac{C \dot{\varepsilon}}{k T \omega}, \quad (24)$$

式中

$$C = (1 + \alpha) \frac{l d}{J_U}. \quad (25)$$

由(24)式可见, 当 τ_2 较大, 即当 $\omega\tau_2 \gg 1$ 时, 蠕变过程中的内耗 Q^{-1} 与蠕变速率 $\dot{\varepsilon}$ 成正比, 与实验温度 T 和测量频率 ω 成反比. 这已为稳态蠕变阶段的实验结果所证实^[6].

四、四参量模型中各元件的物理意义

下面分析，在描述蠕变过程中内耗时，四参量模型(图 1) 中各元件的物理意义。

在拉伸蠕变过程中用扭摆测量内耗时，材料所受的应力有两种：1) 拉伸蠕变有效应力 σ_e ，它超过了弹性极限，使材料发生范性形变；2) 扭转交变应力 $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$ ，仍在弹性范围内。这两种应力所产生的弹性应变，从宏观上看是相互独立的。四参量模型所描述的应力-应变关系，是材料对于扭转交变应力的响应。模型下端弹簧 a 的应变就代表材料的扭转弹性应变。弹簧的柔度 J_u ，就代表了未弛豫的扭转柔度。

四参量模型上面的三个元件 (b , c , d) 是产生非弹性应变的部分。扭转交变应力在滑移面上的分量引起位错滑移，从而引起了非弹性应变。在蠕变过程中，拉伸蠕变应力引起位错的长程运动。迭加了测量内耗的扭转交变应力后，在位错的长程运动上就迭加了一个交变运动。四参量模型上端并联的一对元件 (c , d)，代表带有回复力的位错阻尼振动。其中的弹簧 c 就代表位错振动的弹性回复力(如线张力)，阻尼器 d 代表位错振动的阻尼。

四参量模型中部的阻尼器 b ，代表由扭转交变应力引起的、不具有回复力的位错应变。这种位错应变参加到由蠕变应力引起的位错长程运动中，因而是不可回复的。正是这个阻尼器 b ，反映了蠕变过程中内耗的特点，从而使这种内耗与一般的滞弹性内耗区别开来。

附注：本文于 1988 年 8 月投稿后，作者在同年 9 月全国内耗会议期间得知，卢长勋等人^[1]曾指出某些非晶合金的内耗兼有滞弹性和粘滞性质，也用四参量模型来描述。当然，非晶内耗的微观机制与本文蠕变过程中内耗的情况有着本质上的不同。

- [1] G. B. Brook and A. H. Sully, *Acta Metall.*, 3(1955), 460.
- [2] E. Bonetti, L. Castellani, E. Evangelista and P. Gondi, *J. de Physique*, 42(1981), C5—433.
- [3] E. Bonetti, L. Castellani and P. Gondi, *Acta Metall.*, 31(1983), 1689.
- [4] T. Yamane, Y. Takahashi and K. Hatano, *J. de Physique*, 42(1981), C5—481.
- [5] 张翼、孔庆平，金属学报，5(1960)，93。
- [6] 山冰、徐文、孔庆平，本刊本期。
- [7] 钱保功、许观藩、余赋生，高聚物的转变与松弛，科学出版社，(1986)，第三章。
- [8] C. Zener, 金属的弹性与滞弹性，孔庆平等译，科学出版社，(1965)，第五章。
- [9] A. S. Nowick and B. S. Berry, *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids*, Academic Press, (1972), Chap. 3.
- [10] J. P. Hirth and J. Lothe, *Theory of Dislocations*, John Wiley and Sons Inc., 2nd Ed., (1982), Chap. 16.
- [11] 卢长勋，王子孝、石展之，武汉大学学报(自然科学版)，(4) (1987), 31.

FOUR-PARAMETER MODEL FOR DESCRIBING THE BEHAVIOUR OF INTERNAL FRICTION MEASURED DURING CREEP TESTS

KONG QING-PING SHAN BING

Institute of Solid State Physics, Academia Sinica, Hefei

(Received 3 August 1988)

ABSTRACT

Experiments show that the internal friction measured at low frequency during creep tests exhibits both the behaviours of Maxwell two-parameter model and standard anelastic three-parameter model.

In this paper, a four-parameter model is proposed for describing the behaviour of such internal friction. Based on this model, the expression of internal friction is derived to be

$$Q^{-1} = \frac{1}{\omega\tau_1} + \Delta \frac{\omega\tau_2}{1 + \omega^2\tau_2^2}$$

where ω is the circular frequency of vibration, τ_1 and τ_2 are respectively the relaxation times for viscoelastic and anelastic relaxation, and Δ the relaxation strength.

This expression can satisfactorily explain the change of internal friction with creep time, and the dependence of internal friction on the creep rate, test temperature and the measuring frequency.

The physical origin of each element in the four-parameter model is analyzed in the light of the micro-structure.