

# 原子在压缩光场中的吸收与色散

张卫平 谭维翰

中国科学院上海光学精密机械研究所

1988 年 6 月 11 日收到

本文导出了一二能级原子系综与多模压缩光场相互作用的 Bloch 方程。在此基础上求得了原子对压缩光的吸收与色散。结果表明,对于不同的压缩条件,吸收线型呈现亚自然与超自然线宽现象。而原子的色散行为明显依赖于光场起伏的压缩方向与振幅的相干激发方向。当这两个方向不平行或垂直时,色散零点相对于原子跃迁频率发生移位。

## 一、引 言

迄今为止,原子在相干光驱动下的动力学行为已经较清楚地为人们所认识。近年来,一种新的光源——压缩光<sup>[1]</sup>激起了人们极大的研究兴趣。对于它的产生机制已经有了许多研究<sup>[2]</sup>,而且一些实验已经表明了产生它的可能性<sup>[3]</sup>。最近,人们开始关注压缩光与物质相互作用。Gardiner<sup>[4]</sup>考察了一二能级原子在压缩真空中的动力学行为。Milburn<sup>[5]</sup>计算了压缩真空诱致的原子能级移位。Ritsch 和 Zoller<sup>[6]</sup>则研究了在压缩真空中的一二能级原子的弱信号吸收光谱。这些结果表明,由于场的量子性质,压缩真空态对原子的影响完全区别于普通真空态。本文中我们认为一个实际的非线性光学器件产生的压缩光具有多模形式<sup>[7]</sup>,在此基础上,求得了均匀加宽的二能级系综与多模压缩光场相互作用的 Bloch 方程。在稳态情况下,求解 Bloch 方程,立即可得原子在多模压缩光场中的稳态极化强度。根据稳态极化强度,我们计算了均匀加宽的二能级原子系综在压缩光场中的吸收与色散。结果明显区别于原子在相干光中的吸收与色散。场的量子特性诱致了原子吸收与色散的一些新现象。

## 二、多模压缩光场的统计性质

压缩光的产生必须借助于非线性光学过程。最简单的非线性光学过程是双光子过程。理想的简并双光子过程产生的压缩光可以用单模压缩态描述<sup>[8,9]</sup>,然而对于实际的双光子器件,由于带宽和零点噪声的限制以及双光子器件以成对方式激发场模,因此在双光子器件的输出光场中存在着模-模之间的彼此相关<sup>[10]</sup>,在这种情况下,单模压缩态不足以代表实际的双光子器件的输出光场特性。Caves<sup>[10]</sup>指出双光子光学过程的严格表述应该是多模形式的。在通常情况下,电场可以表示为正频与负频部分之和

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{E}^{(+)} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \hat{E}^{(-)} e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (1)$$

其中  $\omega$  是电场的载波频率。 $\hat{E}^{(+)}$ ( $\hat{E}^{(-)}$ ) 由电场的正交分量  $\hat{E}_1(\mathbf{r}, t)$  和  $\hat{E}_2(\mathbf{r}, t)$  确定

$$\hat{E}^{(\pm)}(\mathbf{r}, t) \equiv \varrho(b\hbar\omega/2cA_q)^{1/2}[\hat{E}_1(\mathbf{r}, t) \pm i\hat{E}_2(\mathbf{r}, t)], \quad (2)$$

正交分量  $\hat{E}_1$  和  $\hat{E}_2$  可以由它的 Fourier 分量给出

$$\hat{E}_m(\mathbf{r}, t) = \int_R \frac{d\varepsilon}{2\pi} [\hat{a}_m(\varepsilon)e^{-i\varepsilon t + i\mathbf{k}_\varepsilon \cdot \mathbf{r}} + \hat{a}_m^\dagger(\varepsilon)e^{i\varepsilon t - i\mathbf{k}_\varepsilon \cdot \mathbf{r}}] \quad (3)$$

其中  $m = 1, 2$ . 根据 Caves 分析<sup>[7]</sup>, Fourier 成份  $\hat{a}_m(\varepsilon)$  和  $\hat{a}_m^\dagger(\varepsilon)$  与双光子器件中频率为  $\Omega \pm \varepsilon$  的光子对的发射过程相联系, 这种过程在统计上满足所谓的平稳正交分量噪声统计 [TSQP]<sup>[7]</sup>,

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{a}_m(\varepsilon) \Delta \hat{a}_n(\varepsilon') \rangle &= 0, \\ \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{a}_m(\varepsilon) \Delta \hat{a}_n^\dagger(\varepsilon') + \Delta \hat{a}_n^\dagger(\varepsilon') \Delta \hat{a}_m(\varepsilon) \rangle &= 2\pi S_{mn}(\varepsilon) \delta(\varepsilon - \varepsilon'), \end{aligned} \quad (4)$$

$$S_{mn}(\varepsilon) = S_{nm}^*(\varepsilon) \quad n, m = 1, 2. \quad (4)$$

$\Delta \hat{a}_m(\varepsilon) = \hat{a}_m(\varepsilon) - \langle \hat{a}_m(\varepsilon) \rangle$ .  $S_{mn}(\varepsilon)$  是电场正交分量噪声起伏光谱密度矩阵. 最常见的多模压缩光场是理想多模压缩光, 它对应的噪声起伏光谱密度矩阵元之间存在以下关系:

$$\begin{aligned} S_{11} + S_{22} \pm i(S_{21} - S_{12}) &\equiv \Sigma^{(\pm)}(\varepsilon) = \frac{1}{2} \frac{\omega \pm \varepsilon}{\omega} [\cosh^2 r(\varepsilon) + \sinh^2 r(\varepsilon)], \\ S_{11} - S_{22} + i(S_{12} + S_{21}) &\equiv -S^{(+)}(\varepsilon) = -[S^{(-)}(\varepsilon)]^* \\ &= - \left[ \frac{\omega + \varepsilon}{\omega} \right]^{1/2} \left[ \frac{\omega - \varepsilon}{\omega} \right]^{1/2} \sinh r(\varepsilon) \cosh r(\varepsilon) e^{-2i\varphi(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $r(\varepsilon)$  是光场起伏的压缩因子,  $\varphi(\varepsilon)$  是光场起伏的压缩方向.

### 三、原子的运动方程

我们考虑一二能级原子系综与多模压缩光场的相互作用. 在偶极近似与旋波近似下, 体系的哈密顿量是

$$H = H_0 + H_1, \quad (6a)$$

其中  $H_0$  是自由哈密顿量.

$$H_0 = \hbar \int_{\mathcal{V}} \nu \hat{a}^\dagger(\nu) \hat{a}(\nu) \frac{d\nu}{2\pi} + \frac{\hbar\omega_a}{2} \sum_{\mu} \sigma_{\mu}^z, \quad (6b)$$

其中  $H_1$  是系综中位置  $\mathbf{R}$  处的原子与该处的光场的相互作用哈密顿<sup>[15]</sup>量.

$$\begin{aligned} H_1 = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = -\hbar \left[ \sum_{\mu} \sigma_{\mu} \left\{ \int_R \frac{d\varepsilon}{2\pi} g^*(\omega_a + \varepsilon) [\hat{a}_1(\varepsilon) - i\hat{a}_2(\varepsilon)] e^{-i\varepsilon t + i\mathbf{k}_\varepsilon \cdot \mathbf{R}} \right. \right. \\ \left. \left. + \int_R \frac{d\varepsilon}{2\pi} g^*(\omega_a + \varepsilon) [\hat{a}_1^\dagger(\varepsilon) - i\hat{a}_2^\dagger(\varepsilon)] e^{i\varepsilon t - i\mathbf{k}_\varepsilon \cdot \mathbf{R}} \right\} e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} + \text{c. c.} \right]. \end{aligned} \quad (6c)$$

$\sigma_{\mu}$ ,  $\sigma_{\mu}^\dagger$  和  $\sigma_{\mu}^z$  是描述二能级原子的 Pauli 自旋算符.

$$g(\omega_a + \varepsilon) = \left( \frac{b\omega}{2\hbar c A_q} \right)^{1/2} \langle 2 | \boldsymbol{\mu} | 1 \rangle \cdot \boldsymbol{\varrho}(\varepsilon)$$

是场与原子的耦合系数. 它是围绕  $\varepsilon = 0$  的光滑函数. (6) 式给出的哈密顿量确定了原子-场系统的密度矩阵  $\rho_{a-t} = \rho_f \otimes \rho$  的运动方程

$$\dot{\rho}_{a-t} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho_{a-t}], \quad (7a)$$

在初始时刻, 由于场与原子之间不存在关联性, 因此直接有

$$\rho_{a-t}(0) = \rho(0)\rho_f(0), \quad (7b)$$

其中  $\rho_f(0) = |\phi_f\rangle\langle\phi_f|$  是场的初始密度矩阵. 对理想多模压缩光<sup>[7]</sup>,  $|\phi_f\rangle = |\alpha(\nu)\rangle$ ,  $r(\varepsilon)e^{-2i\phi(\varepsilon)}$ .  $\rho(0)$  是原子初始密度矩阵. 定义么正算符

$$\hat{U}(\nu) = e^{-i[\sigma_{\frac{\mu\nu}{2}} \nu \hat{a}^\dagger(\nu)\hat{a}(\nu) + \frac{\omega}{2} \sum_{\mu} \sigma_{\mu}^z]t}. \quad (8)$$

$\hat{U}(\nu)$  可将方程 (7) 从通常的 Schrödinger 表象变换到相互作用表象. 根据  $\hat{U}(\nu)$  的么正性, 我们有相互作用表象中的原子约化密度矩阵

$$\tilde{\rho} = \text{Tr}_f[\hat{U}^\dagger(\nu)\rho_{a-t}U(\nu)] = e^{i[\frac{\omega}{2} \sum_{\mu} \sigma_{\mu}^z]t} \text{Tr}_f(\rho_{a-t}) e^{-i[\frac{\omega}{2} \sum_{\mu} \sigma_{\mu}^z]t}. \quad (9)$$

对 (7) 式进行  $\hat{U}(\nu)$  变换, 并对场算符求迹得

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}\right)_c + \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}\right)_q, \quad (10a)$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}\right)_c = \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}_f[H_c, \tilde{\rho}_{a-t}], \quad (10b)$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}\right)_q = \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}_f[\Delta H, \tilde{\rho}_{a-t}]. \quad (10c)$$

其中  $\tilde{\rho}_{a-t} = u^\dagger(\nu)\rho_{a-t}u(\nu)$ .  $H_c$  和  $\Delta H$  有以下形式:

$$\begin{aligned} H_c &= \frac{\hbar\Delta\omega_a}{2} \sum_{\mu} \sigma_{\mu}^z - \hbar \left( \sum_{\mu} \sigma_{\mu} \varepsilon^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} + \sum_{\mu} \sigma_{\mu}^\dagger \varepsilon e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \right), \\ \Delta H &= -\hbar \left[ \sum_{\mu} \sigma_{\mu} \left\{ \int_k \frac{d\varepsilon}{2\pi} g^*(\omega_a + \varepsilon) [\Delta\hat{a}_1(\varepsilon) - i\Delta\hat{a}_2(\varepsilon)] e^{-i\varepsilon t + i\mathbf{k}_\varepsilon\cdot\mathbf{R}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [\Delta\hat{a}_1^\dagger(\varepsilon) - i\Delta\hat{a}_2^\dagger(\varepsilon)] e^{i\varepsilon t - i\mathbf{k}_\varepsilon\cdot\mathbf{R}} \right\} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} + \text{c. c.} \right]. \end{aligned} \quad (10d)$$

$\Delta\omega_a \equiv \omega_a - \omega$  是原子跃迁频率  $\omega_a$  与场载频  $\omega$  之间的失谐量.  $H_c$  相当于原子与一经典场  $\varepsilon$  的作用,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\langle 2|\boldsymbol{\mu}|1\rangle}{t} \cdot \langle \hat{E}^{(+)} \rangle = \int_R \frac{d\varepsilon}{2\pi} g(\omega_a + \varepsilon) \{ [\langle \hat{a}_1(\varepsilon) \rangle + i\langle \hat{a}_2(\varepsilon) \rangle] \\ &\quad \cdot \exp(-i\varepsilon t + i\mathbf{k}_\varepsilon \cdot \mathbf{R}) + [\langle \hat{a}_1^\dagger(\varepsilon) \rangle + i\langle \hat{a}_2^\dagger(\varepsilon) \rangle] \exp(i\varepsilon t \\ &\quad - i\mathbf{k}_\varepsilon \cdot \mathbf{R}) \}. \end{aligned} \quad (10e)$$

$\Delta H$  是由于场的量子起伏诱致的附加哈密顿量. 消去场变量, 方程 (10b) 变成仅含原子变量的形式

$$\left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}\right)_c = -i \frac{\Delta\omega_a}{2} \sum_{\mu} [\sigma_{\mu}^z, \tilde{\rho}] + i \sum_{\mu} [(\sigma_{\mu} \varepsilon^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} + \sigma_{\mu}^\dagger \varepsilon e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}), \tilde{\rho}]. \quad (11)$$

另一方面, 对于有较大的平均振幅  $\langle \hat{E}^{(+)} \rangle$  的压缩光, 通常总是有  $\langle \Delta H \rangle \ll \langle H_c \rangle$ , 因此  $\Delta H$  可以当成微扰来处理. 同时我们假定多模压缩光场的带宽远大于原子自发辐射速率  $\gamma$ , 在这种情况下, 场-原子系统具有 Markovian 特性<sup>[11]</sup>, 我们可以忽略原子和场之间的相关引起的修正. 在上述假定之后, 展开 (10c) 式到含  $\Delta H$  的二级微扰项, 有

$$[\hat{\rho}(t+\tau) - \hat{\rho}(t)]_0 = -(\hbar^2)^{-1} \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \{ \text{Tr}_t [ \Delta H(t_1) \Delta H(t_2) \hat{\rho}_t \otimes \hat{\rho} - \Delta H(t_1) \hat{\rho}_t \otimes \hat{\rho} \Delta H(t_2) ] + \text{c.c.} \}. \quad (12)$$

由文献 [11, 15] 的方法, 运用第二节的场算符关系, 对 (12) 式中场变量求迹, 最终得到

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_0 &= \frac{\omega_{12}}{2} \left\{ \sum_{\mu} [\sigma_{\mu}, \hat{\rho} \sigma_{\mu}^{\dagger}] + \sum_{\mu} [\sigma_{\mu} \hat{\rho}, \sigma_{\mu}^{\dagger}] \right\} + \frac{\omega_{21}}{2} \left\{ \sum_{\mu} [\sigma_{\mu}^{\dagger}, \hat{\rho} \sigma_{\mu}] \right. \\ &+ \sum_{\mu} [\sigma_{\mu}^{\dagger} \hat{\rho}, \sigma_{\mu}] \left. \right\} - \frac{i\delta\omega}{2} \sum_{\mu} [\sigma_{\mu}^z, \hat{\rho}] - \left[ \frac{\gamma}{2} \left\{ \sum_{\mu} [\sigma_{\mu}^{\dagger}, \hat{\rho} \sigma_{\mu}^{\dagger}] e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sum_{\mu} [\sigma_{\mu}^{\dagger} \hat{\rho}, \sigma_{\mu}^{\dagger}] e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \right\} + \text{c.c.} \right]. \quad (13a) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \frac{1}{2} \gamma (1 + \Sigma^{(+)}(0) + \Sigma^{(-)}(0)), \\ \omega_{21} &= \frac{1}{2} \gamma (-1 + \Sigma^{(+)}(0) + \Sigma^{(-)}(0)), \quad \eta = \gamma \Sigma^{(+)}(0), \\ \delta\omega &= P \int_R \frac{d\epsilon}{\pi} |g(\omega_a + \epsilon)|^2 (\Sigma^{(-)}(\epsilon) - \Sigma^{(+)}(\epsilon)) \frac{1}{\epsilon}. \quad (13b) \end{aligned}$$

$\gamma = 2|g(\omega_a)|^2$  是原子自发辐射速率.  $P$  表示柯西积分主值. 方程 (13a) 中含  $\delta\omega$  的项可以并入方程 (11) 中等号右端第一项. 它引起原子跃迁频率  $\omega_a$  变成  $\omega'_a \equiv \omega_a + \delta\omega$ .  $\delta\omega$  即为压缩光场诱致的原子 Lamb 移位. 在引入新的跃迁频率  $\omega'_a$  后, 方程 (13a) 中 Lamb 移位项被消除. 方程 (11) 及 (13) 完全确定了原子在多模压缩光场的动力学行为. 应用标准方法<sup>[11]</sup>, 我们立即得到相互作用表象中的 Bloch 方程

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma} \rangle &= -z \langle \sigma \rangle - \gamma_2 e^{-2i\theta} \langle \sigma^+ \rangle - i\epsilon \langle \sigma_x \rangle, \\ \langle \hat{\sigma}^+ \rangle &= -z^* \langle \sigma^+ \rangle - \gamma_2 e^{2i\theta} \langle \sigma \rangle + i\epsilon^* \langle \sigma_x \rangle, \\ \langle \hat{\sigma}_x \rangle &= -\gamma_1 (\langle \sigma_x \rangle + N\sigma_0) + 2i\epsilon \langle \sigma^+ \rangle - 2i\epsilon^* \langle \sigma \rangle. \quad (14) \end{aligned}$$

其中  $N$  是系综的原子数目, 其它各系数定义如下:

$$\begin{aligned} z &= \gamma_1/2 + i\Delta\omega_a = \gamma_{12} + i(\omega'_a - \omega); \quad \gamma_1 = \omega_{12} + \omega_{21}; \\ \gamma_2 &= |\eta|; \quad \theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\text{Re}(\eta)}{\text{Im}(\eta)}; \quad \sigma_0 = \frac{\omega_{12} - \omega_{21}}{\omega_{12} + \omega_{21}}. \end{aligned}$$

另外  $\langle \sigma \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{\sigma}) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}$ ,  $\langle \sigma^+ \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{\sigma}^+) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}$ ,  $\langle \sigma_x \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{\sigma}_x)$ . 其中

$$\hat{\sigma} \equiv \sum_{\mu} \sigma_{\mu} \left( \hat{\sigma}^+ \equiv \sum_{\mu} \sigma_{\mu}^{\dagger} \right)$$

是原子系综的总偶极矩算符,  $\hat{\sigma}_x \equiv \sum_{\mu} \sigma_{\mu}^z$  则为系综的反转粒子数算符. 根据文献 [7] 与 (5), (13b) 式, 不难证明

$$\frac{1}{2} \gamma_1 - \gamma_2 \geq 0, \quad \sigma_0 \leq 1. \quad (15)$$

其中  $\sigma_0$  是多模压缩光场中的宽带量子成份引起的原子初始泵浦.  $\theta$  是与光场量子起伏的压缩方向有关的角. 一般情况下  $0 \leq \theta < \pi^{[10]}$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  和  $\sigma_0$  可以取满足 (15) 式的任意值. 然而对理想多模压缩光场, 有

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma(1 + 2\sinh^2 r); \quad \gamma_2 = \gamma \sinh r \cosh r, \\ r &= r(0); \quad \theta = \varphi; \quad \sigma_0 = \frac{1}{1 + 2\sinh^2 r}. \end{aligned} \quad (16)$$

由 Bloch 方程 (14), 可以看到, 压缩光场与原子相互作用导致了原子偶极算符对  $\sigma^+$  与  $\sigma$  之间的关联耦合, 耦合系数正比于  $\gamma_2$ , 当  $\gamma_2 = 0$  时, 结果回到经典相干驱动.

#### 四、原子稳态极化

本文中, 假定压缩光场具有恒定的平均振幅, 即

$$\varepsilon = \frac{\langle 2|\mu|1\rangle \cdot \langle \hat{E}^{(+)} \rangle}{\hbar}$$

是常数, 在这种情况下, 方程 (14) 具有稳态解, 即

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma^+ \rangle^* = \frac{iN\sigma_0 \mathbf{g} \cdot \langle \hat{E}^{(+)} \rangle \left[ \gamma_2 e^{-i\Delta\phi} + \frac{1}{2} \gamma_1 - i\Delta\omega_a \right]}{\frac{1}{4} \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \Delta\omega_a^2 + 2|\mathbf{g} \cdot \langle \hat{E}^{(+)} \rangle|^2 \left( 1 + \frac{2\gamma_2}{\gamma_1} \cos \Delta\phi \right)}, \quad (17a)$$

$$\langle \sigma_+ \rangle = - \frac{N\sigma_0 \left[ \frac{1}{4} \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \Delta\omega_a^2 \right]}{\frac{1}{4} \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \Delta\omega_a^2 + 2|\mathbf{g} \cdot \langle \hat{E}^{(+)} \rangle|^2 \left( 1 + \frac{2\gamma_2}{\gamma_1} \cos \Delta\phi \right)}. \quad (17b)$$

其中  $\mathbf{g} \equiv \frac{\langle 2|\mu|1\rangle}{\hbar}$ ,  $\Delta\phi \equiv 2(\theta - \phi)$ .  $0 \leq \phi = \tan^{-1} \frac{\langle \hat{E}_2 \rangle}{\langle \hat{E}_1 \rangle} < \pi$  是光场的相干激发方向<sup>[2]</sup>. (17a) 式立即给出原子系综的稳态极化强度

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}, t) &= N\langle \mu \rangle = \text{Tr} \left( \rho \sum_{\mu} \sigma_{\mu} \right) + \text{c.c.} \\ &= \mu_{12} \langle \sigma \rangle e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $\mu_{12} \equiv \mu_{21}^* = \langle 1|\mu|2\rangle$ .

#### 五、原子稳态吸收与色散

多模压缩光在原子介质中传播, 一方面引起原子介质极化, 另一方面极化作为新的辐射源将再次产生辐射场, 整个过程是一个自治过程. 根据量子力学原理, 光场的矢势算符  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  满足海森堡方程

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t), H]. \quad (19)$$

当空间不存在自由电荷时, 场-原子系统的哈密顿量有一般形式<sup>[13]</sup>

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left[ \varepsilon \hat{\mathbf{A}}^2 + \frac{1}{\mu} (\nabla \times \hat{\mathbf{A}})^2 \right] dV - \int_V \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{A}} dV. \quad (20)$$

其中  $\varepsilon$  是原子介质的介电常数,  $\mu$  是磁导率,  $V$  是介质的体积,  $\mathbf{J}$  是电流密度算符. 应用熟知的关系  $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$  和  $\mathbf{J} = \mathbf{P}$ , (19) 与 (20) 式立即给出量子场的传播方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (21)$$

其中  $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$  是介质的折射率. 作为简化处理, 我们认为光场沿  $z$  方向传播, 即

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} = k_z.$$

在这种情况下, 场和极化强度可写成

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{z}, t) &= \hat{E}^{(+)}(\mathbf{z}, t)e^{-i\omega t + ikz} + \text{c.c.}, \\ \mathbf{P}(\mathbf{z}, t) &= \hat{P}^{(+)}(\mathbf{z}, t)e^{-i\omega t + ikz} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $\hat{E}^{(\pm)}(\mathbf{z}, t)$  与  $\hat{P}^{(\pm)}(\mathbf{z}, t)$  是时空慢变算符. 在慢变近似下, (21) 与 (22) 式给出  $\hat{E}^{(\pm)}(\mathbf{z}, t)$  的传播方程

$$\frac{d\hat{E}^{(\pm)}(\mathbf{z}, t)}{dz} + \frac{n}{c} \frac{\partial \hat{E}^{(\pm)}(\mathbf{z}, t)}{\partial t} = i \frac{\omega c \mu}{2n} \hat{P}^{(\pm)}(\mathbf{z}, t). \quad (23)$$

对于实际的探测系统, 它只能检测量子系统的宏观特性. 由量子力学原理, 宏观可观测量是相应算符的量子平均. 考虑到场与极化之间的自治性, 场-原子系统最终将达到它的稳态, 因此  $\frac{\partial \hat{E}^{(\pm)}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{P}^{(\pm)}}{\partial t} = 0$ . 由 (17a) 和 (18) 式, 宏观极化强度为

$$\langle \hat{P}^{(+)} \rangle = \langle \hat{P}^{(-)} \rangle^* = \text{Tr}(\rho_{a-t} \hat{P}^{(+)}) = \mu_{12} \langle \sigma \rangle \quad (24)$$

对 (23) 式进行量子平均, 最终得到宏观自治场振幅  $E^{(\pm)} = \text{Tr}(\rho_{a-t} \hat{E}^{(\pm)}(\mathbf{z}, t) \cdot \hat{e})$  的传输方程

$$\frac{dE^{(\pm)}}{dz} = \left[ \frac{1}{2} \alpha(\omega) \pm i \Delta k(\omega) \right] E^{(\pm)}, \quad (25)$$

$$\alpha(\omega) = - \frac{\frac{\hbar}{2} N |\mu_{12}|^2 \sigma_0}{n^2 \hbar \epsilon_0} \frac{\frac{1}{2} \gamma_1 + \gamma_2 \cos \Delta \phi}{\frac{1}{4} \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \Delta \omega_a^2 + 2 |g|^2 |E^{(+)}|^2 \left( 1 + \frac{2\gamma_2}{\gamma_1} \cos \Delta \phi \right)}, \quad (26a)$$

$$\Delta k(\omega) = \frac{\frac{\hbar}{2} N |\mu_{12}|^2 \sigma_0}{2n^2 \hbar \epsilon_0} \frac{\Delta \omega_a + \gamma_2 \sin \Delta \phi}{\frac{1}{4} \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \Delta \omega_a^2 + 2 |g|^2 |E^{(+)}|^2 \left( 1 + \frac{2\gamma_2}{\gamma_1} \cos \Delta \phi \right)}, \quad (26b)$$

$\alpha(\omega)$  和  $\Delta k(\omega)$  依赖于宏观自治场振幅的平方  $|E^{(\pm)}|^2$ . 它们是原子系统对压缩光的宏观非线性吸收与色散系数. 由 (26a) 式, 我们看到原子的吸收线型呈洛仑兹型. 忽略饱和和加宽, 即  $2 |g|^2 |E^{(+)}|^2 \ll \gamma$  时, 吸收线型半宽

$$\Delta \nu = \sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2^2}.$$

由第二、三两节的讨论,  $\Delta \nu$  依赖于光场的噪声起伏光谱密度. 一般情况下, 压缩光场的噪声光谱有任意的分布,  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  可以在  $\frac{1}{2} \gamma_1 - \gamma_2 \geq 0$  的范围内任意取值. 如图 1(a)–(c) 分别给出了忽略饱和和加宽情况下的原子吸收线型. 在图 1(a) 中,  $\Delta \nu > \gamma$ , 吸收线型呈现超自然线宽特性; 而图 1(c) 中,  $\Delta \nu < \gamma$ , 吸收线型展现亚自然线宽特征. 作为比较, 图 1(b) 中给出了通常的自然线宽吸收线型. 由 (16) 式定义的  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$ , 不难证明  $\Delta \nu = \sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2^2} = \gamma$ . 这表明图 1(b) 是理想多模压缩光场中的原子吸收线型. 当饱和和效应不可忽略时, 吸收线型被展宽. 回到 (29a) 式, 展宽后的线宽为

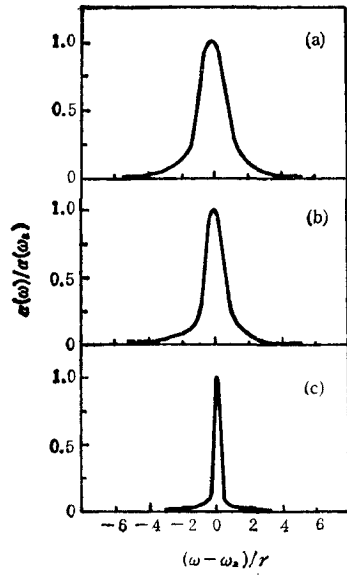


图1 原子未饱和吸收线型 (a)  $\gamma_1/\gamma = 2, \gamma_2/\gamma = 0.1$ ; (b) 理想压缩光场; (c)  $\gamma_1/\gamma = 2, \gamma_2/\gamma = 0.99$

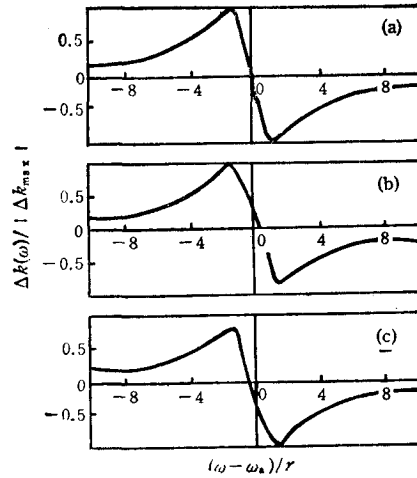


图2 原子未饱和色散关系 (a)  $\Delta\phi = 0$  或  $\pi$ ; (b)  $\Delta\phi = \pi/2$ ; (c)  $\Delta\phi = 3\pi/2$ ; 所有情况下  $\gamma_1/\gamma = 2, \gamma_2/\gamma = 0.1$

$$\Delta\nu_s = \sqrt{\Delta\nu^2 + 8|g|^2|E^{(+)}|^2\left(1 + \frac{2\gamma_2}{\gamma_1} \cos \Delta\phi\right)}. \quad (27)$$

如果  $\Delta\phi = \pi$  (即  $\theta - \phi = \pi/2$ ) 和  $\gamma_1 \simeq 2\gamma_2$ , 饱和加宽可以被消除。此外,由(27)式还可以看出,对于其它的  $\Delta\phi$  角,只要  $\Delta\phi$  在二、三象限取值,饱和加宽均被减小,我们称这种由于场的量子效应导致的饱和效应的减弱为“量子场诱致消饱和”现象。类似于原子的吸收,在多模压缩光场中,原子的色散行为也显示出不同于相干光驱动时的特征。根据(26b)式,在一般情况下,色散零点位于  $\omega = \omega_a + \gamma_2 \sin \Delta\phi$ 。仅当  $\Delta\phi = 0$

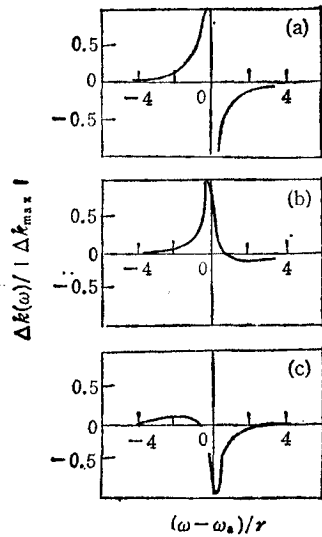


图3 原子未饱和色散关系 (a)  $\Delta\phi = 0$  或  $\pi$ ; (b)  $\Delta\phi = \pi/2$ ; (c)  $\Delta\phi = 3\pi/2$ ; 所有情况下  $\gamma_1/\gamma = 2, \gamma_2/\gamma = 0.99$

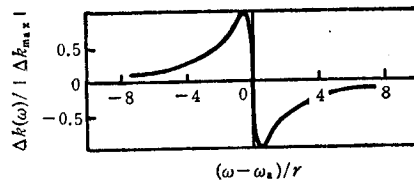


图4 相干光驱动下的原子未饱和色散关系

或  $\pi$  时,它才与原子跃迁频率一致。对于其它的  $\Delta\phi$  值 ( $\Delta\phi < 2\pi$ ), 色散零点相对于原

子跃迁频率发生移位, 移位大小为  $\gamma_2 \sin \Delta\phi$ . 略去饱和, 我们就几种不同的情况给出了原子的色散曲线. 我们发现色散曲线的对称性依赖于  $\Delta\phi$ . 只有在  $\Delta\phi = 0$  与  $\pi$  时, 它才是对称的. 对  $\Delta\phi < \pi$  正色散的极大值大于负色散极大值(见图 2(b) 和图 3(b)). 然而, 对  $\Delta\phi > \pi$ , 图 2(c) 和图 3(c) 给出相反的结论. 便于比较, 图 4 中我们给出了相干驱动的原子的色散曲线, 它是色散零点  $\omega_a$  为对称的.

## 六、Kramers-Kronig 关系

由文献 [14], 原子的吸收和色散与复极化率  $\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)$  之间存在如下关系:

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= -\frac{k}{n^2} \chi''(\omega), \\ \Delta k(\omega) &= \frac{k}{\partial n^2} \chi'(\omega). \end{aligned} \quad (28)$$

(26) 和 (28) 式给出

$$\begin{aligned} \chi'(\omega) &= \frac{N|\mu_{12}|^2\sigma_0}{\hbar\varepsilon_0} \frac{\Delta\omega_a + \gamma_2 \sin \Delta\phi}{\frac{1}{4} \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \Delta\omega_a^2 + 2|\mathbf{g}|^2|E^{(+)}|^2 \left(1 + \frac{2\gamma_2}{\gamma_1} \cos \Delta\phi\right)}, \\ \chi''(\omega) &= \frac{N|\mu_{12}|^2\sigma_0}{\hbar\varepsilon_0} \frac{\frac{1}{2} \gamma_1 + \gamma_2 \cos \Delta\phi}{\frac{1}{4} \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \Delta\omega_a^2 + 2|\mathbf{g}|^2|E^{(+)}|^2 \left(1 + \frac{2\gamma_2}{\gamma_1} \cos \Delta\phi\right)}. \end{aligned} \quad (29)$$

由复变函数理论, 如果复极化率  $\chi(\omega)$  在下复半  $\omega$  平面 (或上半平面) 内没有极点, 则它的实部与虚部满足如下的 Kramers-Kronig 关系<sup>[14]</sup>:

$$\begin{aligned} \chi'(\omega) &= \frac{1}{\pi} \text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \\ \chi''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \end{aligned} \quad (30)$$

P. V. 代表柯西积分主值. 由 (29) 式, 我们可以把  $\chi(\omega)$  写成如下形式:

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= \frac{N|\mu_{12}|^2\sigma_0}{\hbar\varepsilon_0} \left\{ \omega_a - \omega + \gamma_2 \sin \Delta\phi - i \left( \frac{1}{2} \gamma_1 + \gamma_2 \cos \Delta\phi \right) \right\} / \left\{ \omega - \left[ \omega_a \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i \sqrt{\frac{1}{4} \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + 2|\mathbf{g}|^2|E^{(+)}|^2 \left(1 + \frac{2\gamma_2}{\gamma_1} \cos \Delta\phi\right)} \right] \right\} \\ &\quad \times \left\{ \omega - \left[ \omega_a + i \sqrt{\frac{1}{4} \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + 2|\mathbf{g}|^2|E^{(+)}|^2 \left(1 + \frac{2\gamma_2}{\gamma_1} \cos \Delta\phi\right)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

很明显, 当  $\gamma_1 = \gamma$  和  $\gamma_2 = 0$  (对应相干驱动),  $\chi(\omega)$  在不计饱和影响时有一单极点  $\omega = \omega_a + \frac{1}{2} i\gamma$ , 这时 Kramers-Kronig 关系被满足. 然而, 当饱和效应不能忽略时,  $\chi(\omega)$  有两个极点同时分属上下复半平面, Kramers-Kronig 关系不再成立. 我们知道,

$\chi(\omega)$  在下半平面内(或上半平面内)没有极点是被动线性系统的要求<sup>[14]</sup>, 随饱和效应的增强, 系统的线性特征被破坏, 因此 Kramers-Kronig 关系自然不能满足. 对于多模压缩光场,  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  有任意的非零值, 即使饱和效应被忽略时,  $\chi(\omega)$  仍然在上下复半平面内有两个极点  $\omega = \omega_a - i\sqrt{\frac{1}{4}\gamma_1^2 - \gamma_2^2}$  和  $\omega = \omega_a + i\sqrt{\frac{1}{4}\gamma_1^2 - \gamma_2^2}$ . 因此除了

$$\Delta\nu = \sqrt{\frac{1}{4}\gamma_1^2 - \gamma_2^2} \simeq 0$$

外, 一般情况下, Kramers-Kronig 关系是不成立的. 原子在多模压缩光场中的这一特征是由场的量子特性所决定的. 它与原子吸收线型的亚自然、超自然线宽与色散零点的移动是互相对应的.

## 七、结 论

我们从多模压缩光场与原子 Bloch 方程出发, 获得了原子稳态吸收与色散. 我们发现, 在不同条件下, 原子的吸收线型呈现亚自然与超自然线宽现象, 而且有可能导致消饱和和加宽. 此外, 原子的色散则显示出色散零点的移动和色散曲线的不对称现象. 这些现象表明压缩光场有可能作为一种新的光源而在光谱学中得到应用. 最后值得提到的是, 我们所讨论的多模相互作用模型与单模相互作用模型<sup>[12]</sup>是有本质区别的, 后者中, 原子-场系统不可能达到稳态.

- [ 1 ] D. F. Walls, *Nature (London)*, **306**(1983), 141.
- [ 2 ] H. P. Yuen, *Phys. Rev.*, **A13**(1976), 2226; C. W. Gardiner and C. M. Savage, *Opt. Commun.*, **50**(1984), 173.
- [ 3 ] Ling-An Wu, H. J. Kimble *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 2520; R. M. Shelby, M. D. Levenson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 691.
- [ 4 ] C. W. Gardiner, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 1917.
- [ 5 ] G. J. Milburn, *Phys. Rev.*, **A34**(1986), 4882.
- [ 6 ] H. Ritsch and P. Zoller, *Opt. Commun.*, **64**(1987), 523.
- [ 7 ] C. M. Caves, *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 1817.
- [ 8 ] D. Stoler, *Phys. Rev.*, **D1**(1970), 3217.
- [ 9 ] E. Y. C. Lu, *Lett. Nuovo Cimento*, **2**(1971), 1241.
- [ 10 ] C. M. Caves and B. L. Schumaker, *Phys. Rev.*, **A31**(1985), 3068; B. L. Schumaker and C. M. Caves, *Phys. Rev.*, **A31**(1985), 3098.
- [ 11 ] B. R. Mollow, *Annals of Physics*, **52**(1969), 464.
- [ 12 ] G. J. Milburn, *Optica Acta*, **31**(1984), 671.
- [ 13 ] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, John Wiley, (1973), p. 306.
- [ 14 ] A. Yariv, *Quantum electronics*, Wiley & Son, New York, (1975).
- [ 15 ] Tan Weihan and Gu Min, *Phys. Rev.*, **A34**(1986), 4070.

## ATOMIC ABSORPTION AND DISPERSION IN SQUEEZED LIGHT FIELD

ZHANG WEI-PING TAN WEI-HAN

*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*

(Received 11 June 1988)

### ABSTRACT

In this paper, the optical Bloch equations of a two-level atom ensemble driven by squeezed light field are derived. Based on these equations, we calculate the atomic absorption and dispersion. The results show that for different squeezing conditions of the field fluctuations, atomic absorption-lineshape exhibits sub-or super-natural linewidth phenomenon. Atomic dispersion depends on the squeezing direction and coherent excitation direction of the driving field. When these two directions are not parallel or perpendicular to each other, the dispersion zero-point shows a shift to the transition frequency of the atom.