

随机粗糙面上后向散射的增强

金 亚 秋

复旦大学电子工程系
1988 年 8 月 22 日收到

用基尔霍夫近似,研究了随机粗糙面向后散射方向上角度性的散射增强的理论. 所得到的极化二次散射强度的解析公式解释了随机粗糙面上多次散射的相干性, 并用来定量地计算随机粗糙面向后散射的增强.

一、引 言

波在随机粗糙面上的散射,在物理学和工程中有着广泛的应用. 近 20 年来,一直是很多领域中研究的课题. 近年来,在随机粗糙面向后散射方向上存在散射增强的实验现象引起了人们的注意^[1-5]. 然而,计算随机粗糙面散射的现有的解^[6,7]只限于单次散射. 在后向散射方向上散射的增强是由于散射波与粗糙表面多次散射的相干性而产生的^[8]. 而现今关于粗糙面多次散射的一些理论与方法^[9-11]大都是形式上的,看来还无法定量地估算多次散射的增强效应.

本文提出一个明确的公式来计算散射的增强. 波入射在一随机粗糙面上而被散射,散射的能量不仅来自单次散射,也来自高次散射. 在后向散射方向上存在散射波的相干,而由此产生了后向角度上散射场的增强. 我们对随机粗糙面上的场采用基尔霍夫近似,获得极化的双向二次散射系数的解析公式. 自然,基尔霍夫近似并不总是适用的. 但是,本文中获得的后向散射的增强显示了这一增强现象可以很合适地包括在基尔霍夫近似之中. 进一步讲,如有必要,更精确的解要求更高次的散射解. 但是,我们也证明了,后向角度上的散射增强已经可以用二次散射来解释. 二次散射的解包括了散射波的相干性,对于介质或导体的随机粗糙面向后散射的增强,给出定量的估计.

二、单次散射场

考虑一平面波入射在一随机粗糙面上,粗糙面的随机高度为 $z = \xi(x, y)$. 由惠更斯原理,粗糙面的散射场 \bar{E} , 可由粗糙面上的场 \bar{E} 和入射场 \bar{E}_i 表示为

$$\bar{E}_s(\bar{r}) = \int_A d\bar{r}_{1\rho} [i\omega\mu_0 \mathbf{g}(\bar{r}, \bar{r}_1), \nabla \times \mathbf{g}(\bar{r}, \bar{r}_1)] \cdot [\mathbf{n}_1 \times \bar{H}_i(\bar{r}_1), \mathbf{n}_1 \times \bar{E}_i(\bar{r}_1)]^T \quad (1a)$$

$$\equiv \int_A d\bar{r}_{1\rho} \mathbf{G}(\bar{r}, \bar{r}_1) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{n}_1, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \cdot \bar{E}_i(\bar{r}_1), \quad (1b)$$

其中 \bar{r} 为远场观察点, \bar{r}_1 为粗糙面上的点, \mathbf{n}_1 为该点处方向矢量, $d\bar{r}_{1\rho}$ 中下标 ρ 为横向方向, A 为波的照明面积. 自由空间中并矢格林函数写为

$$\mathbf{g}(\bar{r}, \bar{r}_1) = \left(\mathbf{I} + \frac{\nabla \nabla}{k^2} \right) \frac{\exp(ik|\bar{r} - \bar{r}_1|)}{4\pi|\bar{r} - \bar{r}_1|}, \quad (2)$$

其中 \mathbf{I} 为单位并矢, k 为波数. 在 (1b) 式中, 定义了

$$\mathbf{G}(\bar{r}, \bar{r}_1) \equiv [i\omega\mu_0 \mathbf{g}(\bar{r}, \bar{r}_1), \nabla \times \mathbf{g}(\bar{r}, \bar{r}_1)], \quad (3a)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{n}_1, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \cdot \bar{\mathbf{E}}_i(\bar{r}_1) \equiv [\mathbf{n}_1 \times \bar{\mathbf{H}}(\bar{r}_1), \mathbf{n}_1 \times \bar{\mathbf{E}}(\bar{r}_1)]^T, \quad (3b)$$

其中上标 T 为转置, \mathbf{k}_s 和 \mathbf{k}_i 分别为散射波和入射波的传播方向矢量. 由基尔霍夫近似, 表面上任一点处的场可以近似为在该点的局部切平面上应有的场. 这样, 代入 $\bar{\mathbf{E}}$ 和 $\bar{\mathbf{E}}_i$ 在这样的局部切平面上应有的关系, 易得

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{n}_1, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) = & \sqrt{1 + \alpha_x^2 + \alpha_y^2} \left[-\frac{1}{\eta} (1 - R_h)(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{k}_i) \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \right. \\ & + \frac{1}{\eta} (1 + R_v)(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{g}_i) \mathbf{p}_i + (1 + R_h)(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{q}_i) \mathbf{q}_i \\ & \left. + (1 - R_v)(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{k}_i) \mathbf{q}_i \mathbf{p}_i \right], \quad (4) \end{aligned}$$

其中 $\alpha_x = \partial \xi(x, y) / \partial x$, $\alpha_y = \partial \xi(x, y) / \partial y$, \mathbf{p}_i 和 \mathbf{q}_i 分别为 \bar{r}_1 处局部水平和垂直极化矢量, 并定义为

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{k}_i \times \mathbf{n}_1 / |\mathbf{k}_i \times \mathbf{n}_1|, \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{q}_i \times \mathbf{k}_i, \quad (5)$$

(4) 式中的 R_v , R_h 分别为局部水平和垂直极化菲涅耳反射系数, $\eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 为自由空间阻抗. 在远场近似下, 并矢格林函数 (2) 式可写为

$$\mathbf{g}(\bar{r}, \bar{r}_1) = \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} (\mathbf{h}_i \mathbf{h}_i + \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i) \exp(-i\bar{k}_i \cdot \bar{r}_1), \quad (6)$$

其中水平和垂直极化矢量 \mathbf{h}_i , \mathbf{v}_i 定义为

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{k}_i \times \mathbf{z} / |\mathbf{k}_i \times \mathbf{z}|, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{h}_i \times \mathbf{k}_i. \quad (7)$$

在高频近似下, 散射能量主要来自于稳相点的贡献. 稳相点处的法向矢量由入射和散射方向确定为

$$\mathbf{n}_{i0} = -\delta \bar{k}_0 / |\delta \bar{k}_0| = (-\alpha_{0x} \mathbf{x} - \alpha_{0y} \mathbf{y} + \mathbf{z}) / \sqrt{1 + \alpha_{0x}^2 + \alpha_{0y}^2}, \quad (8a)$$

其中下标 0 为稳相点, 且有

$$\delta \bar{k}_0 \equiv \bar{k}_i - \bar{k}_s, \quad \alpha_{0x} = -\delta k_{0x} / \delta k_{0s}, \quad \alpha_{0y} = -\delta k_{0y} / \delta k_{0s}. \quad (8b)$$

将 (6), (8) 两式代入方程 (1), 单次散射场可写为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_i^{(D)}(\bar{r}) = & \int_A d\bar{r}_{10} \mathbf{G}(\bar{r}, \bar{r}_{10}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{n}_{i0}, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \cdot \bar{\mathbf{E}}_i^{(0)}(\bar{r}_{10}) \\ = & \frac{ik \exp(ikr)}{4\pi r} (\mathbf{h}_i \mathbf{h}_i + \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{R}_0(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{e}_i E_0 \int_A d\bar{r}_{10} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \bar{r}_{10}}, \quad (9) \end{aligned}$$

其中 $\bar{\mathbf{E}}_i^{(0)}(\bar{r}_1)$ 中上标 (0) 为入射的平面波, 并写为

$$\bar{\mathbf{E}}_i^{(0)}(\bar{r}_1) = \mathbf{e}_i E_0 \exp(i\bar{k}_i \cdot \bar{r}_1), \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{h}_i \text{ 或 } \mathbf{v}_i, \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) = & \sqrt{1 + \alpha_{0x}^2 + \alpha_{0y}^2} \{ -(1 - R_h)(\mathbf{n}_{i0} \cdot \mathbf{k}_i) \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \\ & + (1 + R_v)(\mathbf{n}_{i0} \times \mathbf{q}_i) \mathbf{p}_i + (1 + R_h)[\mathbf{k}_i \times (\mathbf{n}_{i0} \times \mathbf{q}_i)] \mathbf{q}_i \\ & + (1 - R_v)(\mathbf{n}_{i0} \cdot \mathbf{k}_i)(\mathbf{k}_i \times \mathbf{q}_i) \mathbf{p}_i \}. \quad (10b) \end{aligned}$$

将 (8) 式代入 (4) 式, 即可得 (10b) 式. 然后, 可以得到单次散射强度为^[6,7]

$$\langle |\bar{E}_s^{(1)}(\bar{r})|^2 \rangle = \frac{Ak^2 E_0^2}{4r^2 \delta k_{0z}^2} |\bar{F}^{(0)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i)|^2 p_2(\alpha_{0x}, \alpha_{0y}), \quad (11)$$

其中函数 $\bar{F}^{(0)} = F_{hh}^{(0)}\mathbf{h}_i$, $F_{hv}^{(0)}\mathbf{h}_i$, $F_{vh}^{(0)}\mathbf{v}_i$, 或 $F_{vv}^{(0)}\mathbf{v}_i$, 在附录中给出. $F_{pq}(p, q = h \text{ 或 } v)$ 的下标 pq 表示入射为 q 极化和散射为 p 极化. $p_2(\alpha_{0x}, \alpha_{0y})$ 为稳相点坡度的概率密度函数. 同时, 可将 (11) 式简单地乘以阴影函数 $s(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i)$, 以包括在入射和散射射线间的阴影效应^[7,12]. 这样, 单次散射的双向散射系数可得到

$$\gamma_{pq}^{(1)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i) = \lim_{r, A \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \langle |E_{ip}^{(1)}(\bar{r})|^2 \rangle / (A \cos \theta_i E_{iq}^2). \quad (12)$$

其中的上标 (1) 与 (9, 11) 式中的上标一样, 为单次散射场. 应指出去极化的单次散射系数 $\gamma_{hv}^{(1)}$ 和 $\gamma_{vh}^{(1)}$ 为零.

三、二次散射场

如图 1 所示的二次散射中, 入射波到 \bar{r}_1 , 再由 \bar{r}_1 散射到 \bar{r}_2 上, 然后再由 \bar{r}_2 散射到观

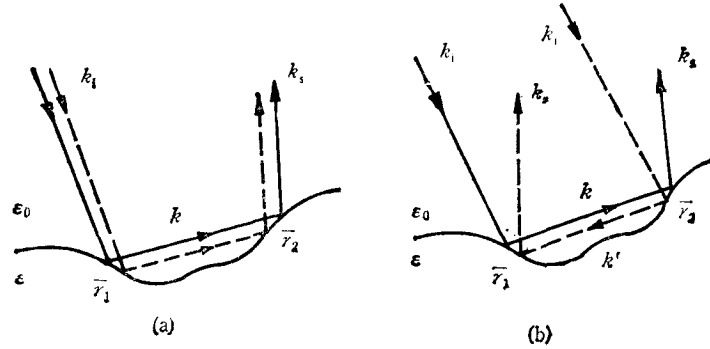


图 1 随机粗糙面上同向和反向相重的波的二次散射

察点 \bar{r} . 散射能量是由这样的相继散射波而贡献的. 以从 \bar{r}_1 发出的 \mathbf{k}_1 方向上的单次散射场, 作为 \bar{r}_2 上的人射波, 二次散射场可写为

$$\begin{aligned} \bar{E}_s^{(2)}(\bar{r}) = & \int_A d\bar{r}_{2\rho} \int_A d\bar{r}_{1\rho} \mathbf{G}(\bar{r}, \bar{r}_2) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{n}_2, \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{G}(\bar{r}_2, \bar{r}_1) \\ & \cdot \mathbf{R}(\mathbf{n}_1, \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_1) \cdot \bar{E}_i^{(0)}(\bar{r}_1). \end{aligned} \quad (13)$$

我们假定散射强度仅由紧密地挨在一起的相关点所贡献的(换言之, 图 1 中邻近点散射的虚线射线是无限接近实线射线的). 这样, 由图 1(a), (b) 描述的散射强度可近似写为

$$\begin{aligned} \langle |\bar{E}_s^{(2)}(\bar{r})|^2 \rangle = & \left\langle \int_A d\bar{r}_{2\rho} \int_A d\bar{r}_{1\rho} |\mathbf{G}(\bar{r}, \bar{r}_2) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{n}_2, \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{G}(\bar{r}_2, \bar{r}_1) \right. \\ & \cdot \mathbf{R}(\mathbf{n}_1, \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i) \cdot \bar{E}_i^{(0)}(\bar{r}_1)|^2 \rangle + \left\langle \int_A d\bar{r}_{2\rho} \int_A d\bar{r}_{1\rho} \mathbf{G}(\bar{r}, \bar{r}_2) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{n}_2, \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i) \right. \\ & \cdot \mathbf{G}(\bar{r}_2, \bar{r}_1) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{n}_1, \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i) \cdot \bar{E}_i^{(0)}(\bar{r}_1) \cdot \mathbf{G}^*(\bar{r}, \bar{r}_1) \cdot \mathbf{R}^*(\mathbf{n}_1, \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i) \\ & \left. \cdot \mathbf{G}^*(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{n}_2, \mathbf{k}_i', \mathbf{k}_i) \cdot \bar{E}_i^{(0)*}(\bar{r}_2) \right\rangle = \langle |\bar{E}_s^{(2+)}(\bar{r})|^2 \rangle + \langle |\bar{E}_s^{(2-)}(\bar{r})|^2 \rangle, \end{aligned} \quad (14)$$

其中第一个平均(即上标+)是由同向相重合的波所贡献的(图 1(a)), 而第二个平均(即上标-)是由反向重合的波所贡献的(图 1(b)). 这情况类同于倍兹-萨尔彼特方程的费尔曼图中梯形项和交叉项的分析^[13]. 当观察点偏离后向散射方向时, 第二个平均就变小; 而在后向散射的方向上, 第二项平均就迅速增大至与第一个平均相同的值. 这样, 就产生了后向散射方向上角度性的增强.

使用(2)式并矢格林函数的傅里叶变换, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\bar{r}, \bar{r}_2) &= \int d\bar{k}_\rho \mathbf{g}^\pm(\bar{k}_\rho, z, z_2) e^{i\bar{k}_\rho \cdot (\bar{r}_\rho - \bar{r}_{2\rho})} \\ &= \frac{i}{8\pi^2} \int d\bar{k}_\rho \frac{1}{k_z} [\mathbf{h}(\pm k_z) \mathbf{h}(\pm k_z) + \mathbf{v}(\pm k_z) \mathbf{v}(\pm k_z)] e^{i\bar{k}_\rho \cdot (\bar{r}_\rho - \bar{r}_{2\rho})} \\ &\quad \times e^{\pm i k_z (z - z_2)}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中 \pm 分别相对应于 $z > z_2$ 和 $z < z_2$, 且有

$$\int d\bar{k}_\rho = k^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

在讨论散射增强的问题中, 认为多次散射的作用明显的. (15)式中的传播常数 k 应理解为有效的复传播常数, 它与自由空间中的 k_0 不同, 且应与下垫面介质和表面粗糙的统计分布有关. k 的虚部, $k'' = \kappa_c/2$, 这里的 κ_c 为消光系数. 这情况类同于离散散射粒子的多次散射. 在那里, 引进了有效传播常数, 它与散射粒子的介电常数和体积比有关. 将格林函数 $\mathbf{g}(\bar{r}, \bar{r}_2)$ 和 $\mathbf{g}(\bar{r}_2, \bar{r}_1)$ 的傅里叶变换代入方程(14), 并在高频近似下, 取 \bar{r}_1 和 \bar{r}_2 处坡度为稳相点的值(它们分别由 $\mathbf{k}_i - \mathbf{k}$ 和 $\mathbf{k} - \mathbf{k}_i$ 确定), 我们得到方程(14)等号右端的第一个平均值.

$$\begin{aligned} \langle |\bar{E}_i^{(2)}(\bar{r})|^2 \rangle &= \left\langle \int_A d\bar{r}_{2\rho} \int_A d\bar{r}_{1\rho} \int d\bar{k}_\rho |\mathbf{g}^\pm(\bar{k}_\rho, z, z_2) e^{i\bar{k}_\rho \cdot (\bar{r}_\rho - \bar{r}_{2\rho})} \right. \\ &\quad \left. \cdot \int d\bar{k}'_\rho \mathbf{R}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \cdot \mathbf{g}^\pm(\bar{k}'_\rho, z_2, z_1) e^{i\bar{k}'_\rho \cdot (\bar{r}_{2\rho} - \bar{r}_{1\rho})} \cdot \mathbf{R}_0(\mathbf{k}', \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{e}_i E_0 e^{i\mathbf{k}_i \cdot \bar{r}_1} \right\rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

在散射方向上, 令 $\bar{k}_\rho = \bar{k}'_\rho$, 并重写 \bar{k}'_ρ 为 \bar{k}_ρ . 完成上式的运算, 得到

$$\begin{aligned} \langle |\bar{E}_i^{(2+)}(\bar{k}_{\rho s}, z)|^2 \rangle &= \left\langle 2\pi^4 \int d\bar{k}_\rho \frac{1}{(8\pi^2)^2 |\bar{k}_{zs}|^2 |k_z|^2} |\bar{F}^{(+)}(\bar{k}_s, \bar{k}, \bar{k}_i)|^2 \right. \\ &\quad \left. \cdot e^{2(k''_z \mp k''_z)z_2} e^{-2(k''_{z1} \mp k''_{z2})z_1} \right\rangle, \end{aligned} \quad (17)$$

其中上标''为虚数部分; 函数

$$\begin{aligned} \bar{F}^{(+)}(\bar{k}_s, \bar{k}, \bar{k}_i) &= [\mathbf{h}(k_{sz}) \mathbf{h}(k_{sz}) + \mathbf{v}(k_{sz}) \mathbf{v}(k_{sz})] \cdot \mathbf{R}_0(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}) \\ &\quad \cdot [\mathbf{h}(\pm k_z) \mathbf{h}(\pm k_z) + \mathbf{v}(\pm k_z) \mathbf{v}(\pm k_z)] \cdot \mathbf{R}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{e}_i E_0 \end{aligned} \quad (18a)$$

$$= \begin{cases} F_{hh}^{(+)} = F_{hh}^{(2+)} F_{hh}^{(1+)} + F_{hv}^{(2+)} F_{vh}^{(1+)} \\ F_{vv}^{(+)} = F_{vv}^{(2+)} F_{vv}^{(1+)} + F_{vh}^{(2+)} F_{hv}^{(1+)} \\ F_{hv}^{(+)} = F_{hv}^{(2+)} F_{vv}^{(1+)} + F_{hh}^{(2+)} F_{hv}^{(1+)} \\ F_{vh}^{(+)} = F_{vh}^{(2+)} F_{hh}^{(1+)} + F_{vv}^{(2+)} F_{vh}^{(1+)} \end{cases} \quad (18b)$$

其中 $F_{pq}^{(2+)}$, $F_{pq}^{(1+)}$ ($p, q = h$ 或 v) 在附录中给出, $\bar{k} = \bar{k}_\rho + k_z \mathbf{z}$.

(17)式中的散射场是由所有的统计分布的一对点 \bar{r}_1, \bar{r}_2 所贡献的. 这一对点被波照明到, 没有被遮盖, 在它们中间也没有挡住射线的障碍物. 因此, 任何可能会挡住入射射

线 k_i , 或挡住散射射线 k, k_i 的阴影作用, 应予以考虑. 我们把这阴影函数形式上写为^[14]

$$s(k_i, \alpha_{10})s(k, \alpha_{10}, \alpha_{20}(\rho))s(k_i, \alpha_{20}). \quad (19)$$

其中 α_{10}, α_{20} 分别为稳相点 \bar{r}_1, \bar{r}_2 处的坡度, 并由下式给出:

$$\alpha_{10} = -(\bar{k}_{1\rho} - \bar{k}_\rho)/(\bar{k}_{1z} - \bar{k}_z), \quad \alpha_{20} = -(\bar{k}_{2\rho} - \bar{k}_\rho)/(\bar{k}_{2z} - \bar{k}_z). \quad (20)$$

对表面上所有可能的 $z_2 = \xi_2, z_1 = \xi_1$ 作平均, 两点之间的距离

$$|\bar{r}_2 - \bar{r}_1| = \sqrt{\rho^2 + (\xi_2 - \xi_1)^2},$$

得到

$$\begin{aligned} \langle |\bar{E}_s^{(2+)}(\bar{k}_{\rho s}, z)|^2 \rangle &= (2\pi)^4 \int d\bar{k}_\rho \frac{1}{(8\pi^2)^2 |k_{zs}|^2 |k_z|^2} |\bar{F}^{(+)}(\bar{k}_s, \bar{k}_i, \bar{k}_i)|^2 \\ &\cdot \int_0^\infty d\rho \int_{-\infty}^\infty d\xi_1 \int_{-\infty}^\infty d\xi_2 p_6[\xi_1(0), \xi_2(\rho), \alpha_{10}, \alpha_{20}] s(k_i, \alpha_{10}) s(k, \alpha_{10}, \alpha_{20}) s(k_s, \alpha_{20}) \\ &\cdot \exp[2(k''_{zs} \mp k''_z)\xi_2] \exp[-2(k''_{z1} \mp k''_z)\xi_1], \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $p_6(\xi_1, \xi_2, \alpha_{10}, \alpha_{20})$ 为两点联合高度和坡度的概率密度函数. 将在下一节给出 (21) 式的具体计算. 由 (21) 式, 可得到 (14) 式中第一个平均的双向散射系数

$$\gamma_{pq}^{(2+)}(k_s, k_i) = 4\pi k_0^3 \cos^2 \theta_1 \frac{\langle |\bar{E}_{sp}^{(2+)}(\bar{k}_{\rho s}, z)|^2 \rangle}{E_{0q}^2}. \quad (22)$$

现在回到方程 (14) 等号右端的第二个平均, 得

$$\begin{aligned} \langle |\bar{E}_s^{(2-)}(\bar{r})|^2 \rangle &= \left\langle \int_A d\bar{r}_{2\rho} \int_A d\bar{r}_{1\rho} \int d\bar{k}_\rho \mathbf{g}^+(\bar{k}_\rho, z, z_2) e^{i\bar{k}_\rho \cdot (\bar{r}_{2\rho} - \bar{r}_{1\rho})} \int d\bar{k}'_\rho \mathbf{R}_0(k, k') \right. \\ &\cdot \mathbf{g}^+(\bar{k}'_\rho, z_2, z_1) e^{i\bar{k}'_\rho \cdot (\bar{r}_{2\rho} - \bar{r}_{1\rho})} \cdot \mathbf{R}_0(k', k_i) \cdot \mathbf{e}_i E_0 e^{i\bar{k}'_\rho \cdot \bar{r}_1} \\ &\cdot \int d\bar{\beta}'_\rho \mathbf{g}^{+*}(\bar{\beta}'_\rho, z, z_1) e^{-i\bar{\beta}'_\rho \cdot (\bar{r}_{2\rho} - \bar{r}_{1\rho})} \int d\bar{\beta}'_\rho \mathbf{R}_0(\beta, \beta') \\ &\cdot \mathbf{g}^+(\bar{\beta}'_\rho, z_1, z_2) e^{-i\bar{\beta}'_\rho \cdot (\bar{r}_{1\rho} - \bar{r}_{2\rho})} \cdot \mathbf{R}_0(\beta', k_i) \cdot \mathbf{e}_i E_0 e^{-i\bar{k}'_\rho \cdot \bar{r}_2} \left. \right\rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

令 $\bar{k}_\rho = \bar{k}_{\rho s}$, 并重写 \bar{k}'_ρ 为 \bar{k}_ρ , 易得

$$\begin{aligned} \langle |\bar{E}_s^{(2-)}(\bar{k}_{\rho s}, z)|^2 \rangle &= \left\langle (2\pi)^4 \int d\bar{k}_\rho \mathbf{g}^+(\bar{k}_{\rho s}, z, z_2) e^{-i\bar{k}_{\rho s} \cdot \bar{r}_{2\rho}} \cdot \mathbf{R}_0(k_s, k) \right. \\ &\cdot \mathbf{g}^+(\bar{k}_\rho, z_2, z_1) e^{i\bar{k}_\rho \cdot (\bar{r}_{2\rho} - \bar{r}_{1\rho})} \cdot \mathbf{R}_0(k, k_i) \cdot \mathbf{e}_i E_0 e^{i\bar{k}_\rho \cdot \bar{r}_1} \\ &\cdot \mathbf{g}^{+*}(\bar{k}_{\rho s}, z, z_1) e^{i\bar{k}_{\rho s} \cdot \bar{r}_{1\rho}} \cdot \mathbf{R}_0(k_s, k_i) \cdot \mathbf{g}^{+*}(\bar{k}_{1\rho}, z_1, z_2) \\ &\cdot e^{-i\bar{k}_{1\rho} \cdot (\bar{r}_{1\rho} - \bar{r}_{2\rho})} \cdot \mathbf{R}_0^*(k_i, k_s) \cdot \mathbf{e}_i E_0 e^{-i\bar{k}_\rho \cdot \bar{r}_2} \left. \right\rangle, \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $\bar{k}_i \equiv \bar{k}_i + \bar{k}_s - \bar{k}$. 将格林函数的傅里叶变换代入 (24) 式, 并对可能的 $z_1 = \xi_1, z_2 = \xi_2$ 取平均, 并计入阴影效应, 与 (21) 式类同地得到

$$\begin{aligned} \langle |\bar{E}_s^{(2-)}(\bar{k}_{\rho s}, z)|^2 \rangle &= (2\pi)^4 \int d\bar{k}_\rho \frac{1}{(8\pi^2)^2 |k_{zs}|^2 |k_z|^2} \bar{F}^{(+)}(\bar{k}_s, \bar{k}_i, \bar{k}_i) \bar{F}^{(-)*}(\bar{k}_s, \bar{k}_i, \bar{k}_i) \\ &\cdot \int_0^\infty d\rho \int_{-\infty}^\infty d\xi_1 \int_{-\infty}^\infty d\xi_2 p_6[\xi_1(0), \xi_2(\rho), \alpha_{10}, \alpha_{20}] s(k_i, \alpha_{10}) s(k, \alpha_{10}, \alpha_{20}) s(k_s, \alpha_{20}) \\ &\cdot e^{i(k''_{zs} \mp k''_z + i(k''_{zs} + k''_{z1})\xi_2 - i(k''_{z1} \mp k''_z + i(k''_{zs} + k''_{z1})\xi_1))} \end{aligned} \quad (25)$$

其中上标'为实数部分; 函数 $\bar{F}^{(-)}$ 类似于 (18) 式中的 $\bar{F}^{(+)}$, 在附录中给出. 于是得到

(14) 式中第二个平均的双向散射系数

$$r_{p\theta}^{(2-)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) = 4\pi k_0^2 \cos^2 \theta_i \langle |E_{p\theta}^{(2-)}(\bar{\mathbf{k}}_{0s}, \mathbf{z})|^2 \rangle / E_{0\theta}^2 \quad (26)$$

四、角度性的散射增强

比较方程 (25) 与 (21), 不难看出 (25) 式相同于 (21) 式, 只要用 $k'_s + i\Delta'$ 来取代 k'_s , 这里 $\Delta' \equiv k'_{zs} + k'_{zi}$. 在下面完成对 ξ_1, ξ_2 的积分之后, 在方程 (25) 中会出现一项

$$\exp\{-2\sigma^2(1-c^2)[\Delta'^2 - (k''_{zs} \pm k''_{zi})^2]\}, \quad (27)$$

其中的 $c \equiv \langle \xi_1 \xi_2 \rangle / \sigma^2$ 为正规化的相关函数, σ^2 为方差. 当观察方向远远偏开后向散射方向时, $\Delta' = k'_{zs} + k'_{zi} \gg k'_s$. 这样, $r_s^{(2-)}$ 就远小于 $r_s^{(2+)}$, 可忽略不计. 然而, 当观察方向接近后向散射方向, Δ' 趋于零, 这样 $r_s^{(2+)}$ 和 $r_s^{(2-)}$ 的区别就消失了. 在后向散射方向上, $\Delta' = 0$, $r_s^{(2-)}$ 达到最大值, 并与 $r_s^{(2+)}$ 相等. 这就产生了沿后向散射方向的角度性的散射增强.

为简单起见, 忽略高度 (ξ_1, ξ_2) 和坡度 (α_{10}, α_{20}) 之间的相关性, 即

$$p_0(\xi_1, \xi_2, \alpha_{10}, \alpha_{20}) \approx p_2(\xi_1, \xi_2) p_4(\alpha_{10}, \alpha_{20}).$$

这样来考虑方程 (21) 和 (25) 中对 ξ_1 和 ξ_2 的积分

$$I^{(+)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 p_2(\xi_1, \xi_2) e^{i(k''_{zs} + k''_{zi})\xi_2} e^{-(k''_{zi} + k''_{zs})\xi_1}, \quad (28a)$$

$$I^{(-)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 p_2(\xi_1, \xi_2) e^{i(k''_{zi} + k''_{zs} + i\Delta')\xi_2} e^{-(k''_{zi} + k''_{zs} + i\Delta')\xi_1}, \quad (28b)$$

假定粗糙表面高度分布为高斯分布, 并写为

$$p_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-c^2}} \exp[-a_0\xi_1^2 - c_0\xi_1\xi_2 - a_0\xi_2^2], \quad (29a)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\sigma^2(1-c^2)}, \quad c_0 = -\frac{c}{\sigma^2(1-c^2)}, \quad c = e^{-\rho^2/l^2}, \quad (29b)$$

其中 l 为相关长度. 将 (29) 式代入 (28b) 式, 并对 ξ_2 积分. 当 $\xi_2 \geq \xi_1$ 时, 用上标 u 作标记, 即波从 ξ_1 至 ξ_2 为上升, 得到

$$\begin{aligned} I^{(-)u} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\{-2\sigma^2(1-c^2)[\Delta'^2 - (k''_{zs} - k''_{zi})^2]\} \\ &\times \exp[-i4\sigma^2(1-c^2)\Delta'(k''_{zs} - k''_{zi})] \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\frac{\xi_1}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left\{-\frac{\xi_1^2}{2\sigma^2} + 2[(1-c)(i\Delta' + k''_{zi}) - (k''_{zi} - ck''_{zs})]\xi_1\right\} \\ &\times \operatorname{erfc}\left\{\frac{\xi_1}{\sqrt{2}\sigma} \sqrt{(1-c)/(1+c)} - \sqrt{2}\sigma\sqrt{1-c^2} [k''_{zs} - k''_{zi} - i\Delta']\right\}. \end{aligned} \quad (30a)$$

其中 $\operatorname{erfc}\{z\} \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt$ 为误差函数.

对于 $\xi_2 < \xi_1$, 记为上标 d , 即波为下行, 得到

$$\begin{aligned}
I^{(-)} = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\{-2\sigma^2(1-c^2)[\Delta'^2 - (k''_x + k''_z)^2]\} \exp[i4\sigma^2(1-c^2)\Delta'(k''_x + k''_z)] \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} d\frac{\xi_1}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left\{-\frac{\xi_1^2}{2\sigma^2} - 2[(1-c)(i\Delta' + k''_z) + (k''_x - ck''_z)]\xi_1\right\} \\
& \times \left\{2 - \operatorname{erfc}\left[\frac{\xi_1}{\sqrt{2}\sigma} \sqrt{(1-c)/(1+c)}\right.\right. \\
& \left.\left. - \sqrt{2}\sigma\sqrt{1-c^2}(k''_x + k''_z + i\Delta')\right]\right\}. \quad (30b)
\end{aligned}$$

(27a) 式中的 $I^{(+)}$ 简单地相同于 (30a) 和 30(b) 式, 仅令 $\Delta' = 0$ 即可。

我们看到, 当 $\Delta' \gg k''_x + k''_z$, 由于指数地衰减, $I^{(-)}$ 远小于 $I^{(+)}$. 而当观察方向趋近后向散射方向, $0 \leftarrow \Delta' \approx k''_x \pm k''_z$, $I^{(-)}$ 就接近于 $I^{(+)}$. 这就在后向散射方向一个小角度范围内产生了增强效应. 增强的角度宽度取决于 (27) 式中的因子, 即

$$\exp\{-2(2\pi\sigma/\lambda)^2(1-c^2)[(\cos\theta_s - \cos\theta_i)^2 - (k''/k')^2(1/\cos\theta_s \pm 1/\cos\theta_i)^2]\}.$$

在 ξ_1 和 ξ_2 之间遮断散射的阴影函数 $s(\mathbf{k}, \bar{\alpha}_{10}, \bar{\alpha}_{20})$ 需要加以考虑. 它取决于相关点 \bar{r}_1 和 \bar{r}_2 的坡度、高度, 以及它们之间的距离. 这是一个复杂的函数^[14], 需要对各种可能的 ξ_1, ξ_2 和 ρ 进行积分. 我们进一步假定 $c \approx 0$. 这相当于假定稳相点 \bar{r}_1 和 \bar{r}_2 的高度不相关. 当相关长度小于稳相点之间平均距离时, 这假定是成立的. 这一假定不是我们的基本理论必不可少的, 而是用来使我们容易得到简明的解析结果和数值计算. 采用下面的阴影函数:

$$s(\mathbf{k}, \bar{\alpha}_{10}, \bar{\alpha}_{20}) = \theta(\cot\theta - \alpha_1, \alpha_2 - \cot\theta) \cos\theta_s \exp[-(2\sqrt{2}\sigma/l)\tan\theta(\rho/l)], \quad (31)$$

其中因子 $\sqrt{2}\sigma/l$ 为均方根坡度; 函数

$$\theta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 和 } y \text{ 均大于 } 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, \quad (32)$$

其中 $\alpha_1 \equiv \alpha_{1x} \cos\phi + \alpha_{1y} \sin\phi$, $\alpha_2 \equiv \alpha_{2x} \cos\phi + \alpha_{2y} \sin\phi$ 考虑了自我阴影效应^[14], (31) 式中的 θ 与此处的 ϕ 分别为射线 \mathbf{k} 与 \mathbf{z} 的夹角和水平方位角. 阴影函数可理解为当 $\cot\theta =$ 平均坡度 $\sqrt{2}\sigma/l$, 且 $\rho = l$ 时, 阴影函数 ≈ 0.1 ; 当 θ 或 $\rho/l \rightarrow 0$ 时, 阴影函数接近于 1 (无阴影). 还有阴影函数

$$s(\mathbf{k}_1, \bar{\alpha}_{10})s(\mathbf{k}_2, \bar{\alpha}_{20}) \approx s(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \quad (33)$$

由文献 [12] 给定. 将 (30) 和 (31-33) 式代入 (25) 或 (26) 式, 得到

$$\begin{aligned}
r_{pq}^{(2-)} = & \frac{\pi \cos^2\theta_i}{\cos\theta_s} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{l}{2\sqrt{2}\sigma} p_s(\bar{\alpha}_{10}, \bar{\alpha}_{20}) s(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \\
& \times (F_{pq}(\bar{k}_s, \bar{k}_\rho + k_{z\mathbf{z}}, \bar{k}_i) F_{pq}^*(\bar{k}_s, \bar{k}_{1\rho} + k_{1z\mathbf{z}}, \bar{k}_i) \cos[4\sigma^2\Delta'(k''_x + k''_{zi} - 2k''_z)]) \\
& \times \frac{1}{2} \exp\{-2\sigma^2[\Delta'^2 - (k''_x - k''_z)^2]\} \exp\{-2\sigma^2[\Delta'^2 - (k''_{zi} - k''_z)^2]\} \\
& + F_{pq}(\bar{k}_s, \bar{k}_\rho - k_{z\mathbf{z}}, \bar{k}_i) F_{pq}^*(\bar{k}_s, \bar{k}_{1\rho} - k_{1z\mathbf{z}}, \bar{k}_i) \cos[4\sigma^2\Delta'(k''_x + k''_{zi} + 2k''_z)] \\
& \times \frac{1}{2} \exp\{-2\sigma^2[\Delta'^2 - (k''_x + k''_z)^2]\} \exp\{-2\sigma^2[\Delta'^2 - (k''_{zi} + k''_z)^2]\}. \quad (34)
\end{aligned}$$

$r_{pq}^{(2+)}$ 简单地类同于 (34) 式, 只要令 $\Delta' = 0$.

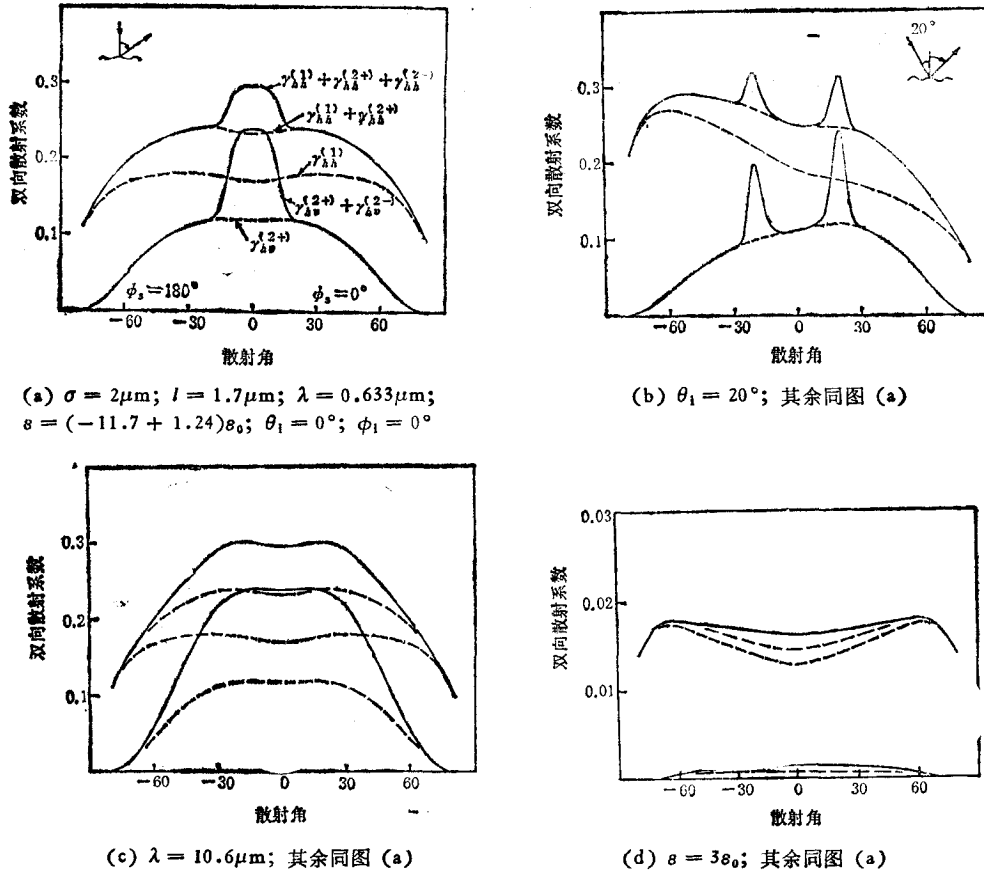


图2 双向散射系数及散射增强和散射角的关系

对方程 (11) 和 (12) 的单次散射双向散射系数 $\gamma_{pp}^{(1)}$, 二次散射的 $\gamma_{pq}^{(2+)}$ 和 $\gamma_{pq}^{(2-)}$ 作了数值计算, 在图 2(a) 至 (d) 中给出 $\gamma_{hh}^{(1)}$, $\gamma_{hh}^{(1)} + \gamma_{hh}^{(2+)}$, $\gamma_{hh}^{(1)} + \gamma_{hh}^{(2+)} + \gamma_{hh}^{(2-)}$, 以及 $\gamma_{hh}^{(2+)}$, $\gamma_{hh}^{(2+)} + \gamma_{hh}^{(2-)}$. 表明了几种不同情况下, 由 $\gamma_{pq}^{(2-)}$ 引起的增强效应。

我们可以看到, 后向散射的角度性增强取决于 $\gamma_{pq}^{(2-)}$ 的变化。比较图 2(a) 和 (b), 可以看到当 $\theta_i = 0^\circ$ 时, 后向散射增强的角度分布最宽, 当 θ_i 偏离 0° 时, 散射增强的角度宽度就变得尖锐。当 θ_i 趋近 θ_i , $\theta_i = \theta_i + \Delta\theta$. 这样, $\Delta' \approx k' \sin \theta_i \Delta\theta$. 当 $\theta_i = 0^\circ$ 时, $\Delta' \rightarrow 0$ 的速度为最快, 因此散射增强的宽度为最宽。当平均坡度 $\sqrt{2} \sigma/l$ 增大时, 角度宽度也会变得尖锐。当入射波波长增大(图 2(c)), 对应地可看成是粗糙面 $\sqrt{2} \sigma/l$ 变小, 角度性的增强会变得很宽, 而不易明辨。当粗糙面的下垫介质具有低反射率的介质时(图 2(d)), 过宽的角度性增强也不易明辨。有关参数都在图中标明。这些数值结果与现有的实验观察完全一致^[5]。

五、结 论

用基尔霍夫近似和稳相法, 我们得到了随机粗糙面的极化双向二次散射系数的解析

公式. 这一公式包含了粗糙面上同向和反向相重合的波的相干作用. 后者即反向相重合波的相干性引起了后向散射方向上角度性的增强, 因为它的变化取决于 $k'_{iz} + k'_{is}$ 与 k'_z 的比较. 在后向散射方向上, $k'_{iz} + k'_{is} = 0$, 散射增强取得最大值; 而在远离后向散射方向, $k'_{iz} + k'_{is} \gg k'_z$, 则反向相重合波的相干性忽略不计, 而无散射增强. 散射增强的角度性分布取决于 σ/λ , σ/l , θ_i , 下垫介质的介电常数 ϵ , 和其它一些参数(如 k''/k'). 采用合适的阴影函数, 这一公式用来计算随机粗糙面的双向二次散射和散射增强效应, 所得数值结果与实验一致.

本工作得到霍英东教育基金会的资助, 谨致谢意.

附 录

$$\begin{aligned} F_{hh}^{(d)} &= M_d[(v_b \cdot k_a)(v_a \cdot k_b)R_{hd} + (h_b \cdot k_a)(h_a \cdot k_b)R_{vd}], \\ F_{hv}^{(d)} &= M_d[(h_b \cdot k_a)(v_a \cdot k_b)R_{hd} - (v_b \cdot k_a)(h_a \cdot k_b)R_{vd}], \\ F_{vh}^{(d)} &= M_d[(v_b \cdot k_a)(h_a \cdot k_b)R_{hd} - (h_b \cdot k_a)(v_a \cdot k_b)R_{vd}], \\ F_{vv}^{(d)} &= M_d[(h_b \cdot k_a)(h_a \cdot k_b)R_{hd} + (h_b \cdot k_a)(v_a \cdot k_b)R_{vd}] \end{aligned}$$

其中, 对于(11)式, $d=0$, $a=i$, $b=s$;

对于(18)和(25)式, 有

$$\begin{cases} d=1+ \\ a=i \\ b=1, k_1 \equiv k \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} d=1- \\ a=i \\ b=1, k_1 \equiv k_i + k_s - k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d=2+ \\ a=1 \\ b=s, k_1 \equiv k \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} d=2- \\ a=1 \\ b=s, k_1 \equiv k_i + k_s - k. \end{cases}$$

$$M_d = |\delta k_d|^2 / (k |k_a \times k_b|^2 \delta k_{da}),$$

其中 $\delta k_{1+} \equiv k_1 - \bar{k}$, $\delta k_{1-} \equiv \bar{k} - k_1$, $\delta k_{2+} \equiv k - k_1$, $\delta k_{2-} \equiv k_1 - \bar{k}$. 局部的菲涅耳反射系数为

$$R_{hd} = \frac{\cos \theta_{ld} - \sqrt{\epsilon_{1n} - \sin^2 \theta_{ld}}}{\cos \theta_{ld} + \sqrt{\epsilon_{1n} - \sin^2 \theta_{ld}}}, \quad R_{vd} = \frac{\epsilon_{1n} \cos \theta_{ld} - \sqrt{\epsilon_{1n} - \sin^2 \theta_{ld}}}{\epsilon_{1n} \cos \theta_{ld} + \sqrt{\epsilon_{1n} - \sin^2 \theta_{ld}}}$$

其中 $\epsilon_{1n} = \epsilon/\epsilon_0$, 局部角 $\cos \theta_{ld} = -n \cdot k_a$, n 为稳相点 ξ_1 或 ξ_2 处的法向矢量, 下标 l 为局部角.

- [1] F. Becker, P. Ramanantsizchena and M. Stoll, *Appl. Opt.*, 24(1985), 365.
- [2] E. R. Mendez and K. A. O'Donnell, *Opt. Commun.*, 61(1987), 91.
- [3] A. R. McGurn, A. A. Maradudin and V. Celli, *Phys. Rev.*, B31(1984), 235; *ibid.*, (1985), 4866.
- [4] V. Celli, A. A. Maradudin, A. M. Marvin and A.R. McGurn, *J. Opt. Soc. Am.*, A2(1985), 2225.
- [5] K. A. O'Donnell and E. R. Mendez, *J. Opt. Soc. Am.*, A4(1987), 1194.
- [6] P. Beckmann and A. Spizzichino, *The scattering of electromagnetic waves from rough surface*, Pergamon, New York, (1963).
- [7] F. G. Bass and I. M. Fucks, *Wave scattering from statistically rough surfaces*, Pergamon, New York, (1979).
- [8] D. A. de Wolf, *IEEE Trans. Ant. Propag.*, AP 19(1971), 254.
- [9] J. A. DeSanto, *J. Math. Phys.*, 27(1986), 377.
- [10] G. S. Brown, *IEEE Trans. Ant. Propag.*, AP-32 (1984), 1308.
- [11] G. S. Brown, *IEEE Trans. Ant. Propag.*, AP-33(1985), 48.
- [12] M. I. Sancer, *IEEE Trans. Ant. Propag.*, AP-17 (1969), 577.
- [13] Y. Q. Jin and J. A. Kong, *J. Math. Phys.*, 26(1985), 994.
- [14] Y. Q. Jin, *J. Appl. Phys.*, 63(1988), 1286.

ENHANCEMENT OF BACK-SCATTERING FROM A RANDOMLY ROUGH SURFACE

JIN YA-QIU

Department of Electronic Engineering, Fudan University, Shanghai

(Received 22 August 1988)

ABSTRACT

Theoretical evaluation of the angular scattering enhancement around the back-scattering direction from a randomly rough surface is studied by employing the Kirchhoff approach. An analytic expression of polarized double-scattered intensity that takes into account the coherence of multiple scattering from the rough surface is used to quantitatively evaluate the scattering enhancement around the back-scattering direction from such a surface.