第 38 卷 第 10 期
1989 年 10 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 38, No. 10
Oct., 1989

Dyson 玻色子表示中解的讨论

任 中 洲　　　　徐 躬 耦
南京大学物理系　　　　南京大学物理系;兰州大学现代物理系

1988年11月17日收到

本文对 Dyson 玻色子表示中的解进行了讨论. 指出解的物理内容包括动力学对称性不依赖于具体表示,可通过将 $\mathscr{H}_{\rm D}$ 的矩阵化为三角矩阵的方法求得所需的解. 在某些具体情形下这种方法非常简便.

一、引　言

在原子核集体运动的研究中,人们常采用玻色子表示. 由于 Pauli 原理,原子核哈密顿量的厄密形式的 Holstein-Primakoff 表示中,表现出玻色子间复杂的相互作用. 但如果采用非厄密的 Dyson 表示,则从其形式来说,相应于核子对的玻色子之间只存在二体作用,这要简单得多. (相应于粒子空穴对的声子表示也不太复杂.)然而由于习惯上的原因,人们似乎更倾向于使用厄密的 Holstein-Primakoff 表示. 本文将系统地讨论 Dyson 表示解的问题,指出 Dyson 表示的非厄密性不是什么本质问题,它并不带来任何困难,而由于形式简单,实际上更为方便.

二、对 Dyson 表示解的一般讨论

首先扼要地回顾 Dyson 表示的基本性质. 利用广义相干态与生成坐标方法可以求得下述结果[1]:

$$|\Psi\rangle = U|F(b^+)). \tag{1}$$

其中 U 为 Usui 算子.

$$U = (0|\exp\left[\sum_{\mu} b_\mu K_\mu^+\right]|\phi_0\rangle. \tag{2}$$

任意算子 G 的 Dyson 表示 $\mathscr{G}_{\rm D}$ 定义为 $\mathscr{G}_{\rm D}(b^+b)U^+U = U^+GU$, (3)

而 Holstein-Primakoff 表示 $\mathscr{G}_{\rm HP}$ 为 $\mathscr{G}_{\rm HP} = \mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}\mathscr{G}_{\rm D}\mathscr{N}^{\frac{1}{2}}$. (4)

其中 $\mathscr{N}$ 由下式决定:

$$\mathscr{N}\mathscr{P} = U^+U. \tag{5}$$

如果 G 是厄密的,它的 Holstein-Primakoff 表示 $\mathscr{G}_{\rm HP}$ 必然是厄密的. Dyson 表示 $\mathscr{G}_{\rm D}$ 一般不是厄密的,因为所采用的相干态基不是正交基,所以不属于最大稳定子群的厄密算子,其 Dyson 表示不厄密. 又因为总可以经变换得到正交基,所以一定可以经变换使之厄密. 从 $\mathscr{H}_{\rm D}$ 到 $\mathscr{H}_{\rm HP}$ 的变换正是这样一种变换. 故 $\mathscr{H}_{\rm D}$ 的非厄密性不是本质的, $\mathscr{H}_{\rm D}$ 的本征值仍然是实的.

从变分原理

$$\delta\frac{\langle\Psi|H|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = \delta\frac{(F|\mathscr{P}\mathscr{H}_{\rm D}\mathscr{N}\mathscr{P}|F)}{(F|\mathscr{P}\mathscr{N}\mathscr{P}|F)} = 0, \tag{6}$$

得到 $\mathscr{H}_{\rm D}$, $\mathscr{H}_{\rm D}^+$ 的本征方程如下:

$$\mathscr{H}_{\rm D}\mathscr{N}\mathscr{P}|F) = E\mathscr{N}\mathscr{P}|F), \tag{7a}$$

$$\mathscr{H}_{\mathrm{D}}^{+}\mathscr{P}|F) = E\mathscr{P}|\mathrm{F}). \tag{7b}$$

由于 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}}$ 不厄密,所以出现了相应于右矢 $\mathscr{N}\mathscr{P}|F)$ 和左矢 $\mathscr{P}|F)$ 的两个本征方程.右矢与左矢构成一双正交系,正交归一条件为

$$(F_m|\mathscr{P}\mathscr{N}\mathscr{P}|F_n) = \delta_{mn}. \tag{8}$$

双正交系的归一化系数除相因子外,还有一个相乘因子的不确定性,即对右矢 $\mathscr{N}\mathscr{P}|F)$ 乘一常数 k,同时对左矢 $\mathscr{P}|F)$ 乘一常数 k^{-1},(8) 式不变. 但归一化系数的这种不确定性,不影响任一物理量 G 的平均值和跃迁几率[2]

$$\langle\Psi_m|G|\Psi_m\rangle = (F_m|\mathscr{P}\mathscr{G}_{\mathrm{D}}\mathscr{N}\mathscr{P}|F_m), \tag{9}$$

$$|\langle\Psi_m|G|\Psi_n\rangle|^2 = (F_m|\mathscr{P}\mathscr{G}_{\mathrm{D}}\mathscr{N}\mathscr{P}|F_n) \cdot (F_n|\mathscr{P}\mathscr{N}\mathscr{G}_{\mathrm{D}}^{+}\mathscr{P}|F_m). \tag{10}$$

很明显,归一化系数的不确定性对上述两个式子不产生任何影响.

原子核的动力学对称性意味着 H 是动力学群及其子群的 Casirmir 算子所组成. 假定 G 是任一 Casirmir 算子,则 $[H, G] = 0.$ (11)

因 Dyson 表示保持代数结构不变,故有 $[\mathscr{H}_{\mathrm{D}}, \mathscr{G}_{\mathrm{D}}] = 0.$ (12)

表明在 Dyson 表示中仍保持原子核系统原有的动力学对称性不变.

$\mathscr{H}_{\mathrm{D}}$ 的矩阵不仅可以通过变换使之化为对角矩阵,还可通过变换化为三角矩阵. 可以认为三角矩阵是对角矩阵的推广. 可以从三角矩阵立即求出本征解.

为了明确起见,假设 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}}$ 的矩阵化成了上三角矩阵

$$(\mathscr{H}_{\mathrm{D}})_{mn} = 0 \qquad m > n.$$

此时,方程

$$\|(\mathscr{H}_{\mathrm{D}})_{mn} - E\delta_{mn}\| = 0$$

的解为

$$E(n_0) = (\mathscr{H}_{\mathrm{D}})_{n_0 n_0},$$

$$\mathscr{N}\mathscr{P}|F_{n_0}) = \sum_{n=0}^{n_0} C_n^{(n_0)}(n).$$

存在动力学对称性时,可以找到一种标志这种动力学对称性的表象,使 $\mathscr{H}_{\mathrm{D}}$ 的矩阵同时化为三角矩阵

$$\mathscr{H}_{\mathrm{D}}(n=0) = E_0|n=0).$$

在某些较特殊的情形,可以直接写出相应的基矢的一般形式,则上述方程可以用来确定其中的待定参数,从而具体确定这种表象.

三、显示四体关联的单能级 $SO(8)$ 模型[3]

考虑两类核子处在一个单 l 能级,受成对力作用的模型

$$H = \varepsilon N_F + 2\lambda_\sigma \sum_\alpha B_\alpha^+(\sigma)B_\alpha(\sigma) + 2\lambda_\tau \sum_\mu B_\mu^+(\tau)B_\mu(\tau), \tag{13}$$

其中

$$N_F = \sum_{mm_sm_t} a^+_{mm_sm_t} a_{mm_sm_t}$$

$$\begin{aligned} B_\alpha^+(\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[a^+a^+]^{010}_{0\alpha 0}, & B_\alpha(\sigma) &= (B_\alpha^+(\sigma))^+, \\ B_\mu^+(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[a^+a^+]^{001}_{00\mu}, & B_\mu(\tau) &= (B_\mu^+(\tau))^+ \end{aligned} \tag{14}$$

分别表示核子数算子，产生(湮没)轨道角动量 $L=0$，自旋 $S=1$，投影 $M_S=\alpha$，同位旋 $T=0$，投影 $M_T=0$ 和 $L=0$，$S=0$，$M_S=0$，$T=1$，$M_T=\mu$ 的核子对算子。ε 表示单粒子能量，$2\lambda_\sigma$ 和 $2\lambda_\tau$ 表示两类成对力的强度。

上面十三个算子和下述十五个算子

$$S_\alpha=[a^+\tilde{a}]^{010}_{0\alpha0},\quad T_\mu=[a^+\tilde{a}]^{001}_{00\mu},\quad Y_{\alpha\mu}=[a^+\tilde{a}]^{011}_{0\alpha\mu},\tag{15}$$
$$\left(\tilde{a}_{m\ m_s\ m_t}^{l\ 1/2\ 1/2}=(-)^{l+m+1/2+m_s+1/2+m_t}a^{l\ 1/2\ 1/2}_{-m\ -m_s\ -m_t}\right)$$

构成 $SO(8)$ 代数。N_F，S_α，T_μ，$Y_{\alpha\mu}$ 共十六个算子构成 $U(4)$ 子代数。N_F，S_α，$B^+_\alpha(\sigma)$，$B_\alpha(\sigma)$ 构成 $SO(5)$ 子代数，记为 $SO(5,\sigma)$。N_F，T_μ，$B^+_\alpha(\tau)$，$B_\alpha(\tau)$ 也构成 $SO(5)$ 子代数，记为 $SO(5,\tau)$。S_α，T_μ 分别构成 $SO(3)$ 子代数，记为 $SO(3,\sigma)$，$SO(3,\tau)$，哈密顿量的对称群为 $SO(3,\sigma)\otimes SO(3,\tau)$。

(13) 式所示的哈密顿量 H 可用 $SO(8)$ 代数以及它的子代数的 Casirmir 算子表示。

$$\begin{aligned}H=&aC_2[SO(8)]+bC_2[SU(4)]+cC_2[SO(5,\sigma)]\\&+dC_2[SO(5,\tau)]+eC_2[SO(3,\sigma)]+fC_2[SO(3,\tau)]\\&+g\cdot N_F+h\cdot N_F^2.\end{aligned}\tag{16}$$

其中 N_F 为核子数算子，N_F 亦即 $C_1[SO(8)]$。

下面讨论几种极限情形。

(1) 当 $\lambda_\tau=0$ 时

$$\begin{aligned}H=&\left[\varepsilon+\lambda_\sigma\left(1-\frac{N_F-12}{4(2l+1)}\right)\right]N_F\\&+\lambda_\sigma[C_2[SO(5,\sigma)]-C_2[SO(3,\sigma)]-(2l+4)].\end{aligned}\tag{17a}$$

(2) 当 $\lambda_\sigma=0$ 时

$$\begin{aligned}H=&\left[\varepsilon+\lambda_\tau\left(1-\frac{N_F-12}{4(2l+1)}\right)\right]N_F\\&+\lambda_\tau[C_2[SO(5,\tau)]-C_2[SO(3,\tau)]-(2l+4)]\end{aligned}\tag{17b}$$

(3) 当 $\lambda_\sigma=\lambda_\tau=\lambda$ 时

$$\begin{aligned}H=&\left[\varepsilon+\lambda\left(1-\frac{N_F-24}{4(2l+1)}\right)\right]N_F\\&+\lambda[C_2[SO(8)]-C_2[SU(4)]-(2l+7)].\end{aligned}\tag{17c}$$

故有下述动力学对称性：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & SO(5,\sigma)\otimes SO(3,\tau) \arrow[dr, dash] & \\ SO(8) \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & SO(5,\tau)\otimes SO(3,\sigma) \arrow[r, dash] & SO(3,\sigma)\otimes SO(3,\tau). \\ & SU(4) \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}\tag{18}$$

下面我们考虑先辈数为零的系统，利用生成坐标方法，求 Dyson 玻色子表示，将构成角动量为零的核子对用相应的玻色子表示，则此核子系统的任意状态 $|\Psi\rangle$ 可表为

$$|\Psi\rangle=UP|F),\tag{19}$$

$$U=(0|\exp\left[\sum_\alpha b_\alpha(\sigma)B^+_\alpha(\sigma)+\sum_\mu b_\mu(\tau)B^+_\mu(\tau)\right]|0\rangle$$

其中 P 为投影算子，引入 P 使 $P|F)$ 与 $|\Psi\rangle$ 一一对应。

可以按一定程序求得哈密顿量H的 Dyson 玻色子表示如下:

$$\mathscr{H}_D = 2\varepsilon\hat{n}_B + 2\lambda_\sigma\left(1 - \frac{\hat{n}_B - 1}{2l+1}\right)\hat{n}_\sigma + \frac{6\lambda_\sigma}{2l+1}(\gamma_\sigma^+ - \gamma_\tau^+)\gamma_\sigma$$

$$+ 2\lambda_\tau\left(1 - \frac{\hat{n}_B - 1}{2l+1}\right)\hat{n}_\tau + \frac{6\lambda_\tau}{2l+1}(-1)(\gamma_\sigma^+ - \gamma_\tau^+)\gamma_\tau. \tag{20}$$

其中

$$\begin{aligned} &\hat{n}_B = \hat{n}_\sigma + \hat{n}_\tau = A/2\ (A\ \text{为总核子数}), \\ &\hat{n}_\sigma = \sum_\alpha b_\alpha^+(\sigma) b_\alpha(\sigma), \\ &\hat{n}_\tau = \sum_\mu b_\mu^+(\tau) b_\mu(\tau), \\ &\hat{\gamma}_\sigma^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}[b^+(\sigma)b^+(\sigma)]^{00} \qquad \hat{\gamma}_\sigma = (\hat{\gamma}_\sigma^+)^+, \\ &\hat{\gamma}_\tau^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}[b^+(\tau)b^+(\tau)]^{00} \qquad \hat{\gamma}_\tau = (\hat{\gamma}_\tau^+)^+. \end{aligned} \tag{21}$$

其中 $\mathscr{H}_D$ 并不厄密,但在下面可以看到不难求出它的本征解,而且可以看到很容易给出相应的守恒量.

在这一具体例子基底可由六类玻色子的数目来标记,同时也可以由某一群链的相应的量子数来标记. 按照后一种方案来表述时,量子数 n_B, S, S_z, T, T_3 都是严格的量子数,与另一量子数相应的自由度,应与 $\hat{S}^2\hat{S}_z$ $\hat{T}^2\hat{T}_3$ 互易. 在这个例子中出现在 $\mathscr{H}_D$ 中的四粒子结团的产生,湮没算子 γ_σ^+, γ_σ, γ_τ^+, γ_τ 正满足这一要求. 它们的任意的线性组合也满足这一要求

$$\begin{aligned} \alpha^+(\theta) &= \cos\theta\gamma_\sigma^+ - \sin\theta\gamma_\tau^+ \qquad \alpha(\theta) = (\alpha^+(\theta))^+, \\ \beta^+(\theta) &= \sin\theta\gamma_\sigma^+ + \cos\theta\gamma_\tau^+ \qquad \beta(\theta) = (\beta^+(\theta))^+. \end{aligned} \tag{22}$$

由于 n_B 是严格守恒量,故基矢可由下述量子数标记:

$$\begin{aligned} |n; n_B, SS_zTT_3) = &(\alpha^+)^{n_B-S-T-2n}(\beta_+)^n \\ &(S_+)^{S+S_z}(b_{-1}^+(\sigma))^S \\ &(T_+)^{T+T_3}(b_{-1}^+(\tau))^T|0). \end{aligned} \tag{23}$$

现在我们讨论三种极限情形.

现在寻找一组合适基矢,即选择合适的θ值,使得在某个极限情形,哈密顿量的矩阵变成三角矩阵,表征这组基矢的n成为好量子数. 为明确起见,假定 $\mathscr{H}_D$ 的矩阵变成了上三角矩阵,$(\mathscr{H}_D)_{n'n} = 0$, $n' > n$. 也就是说 $\mathscr{H}_D$ 作用于 $|n; n_BSS_zTT_3)$, 不能使 β^+ 的幂次升高. 所以 $|n = 0; n_BSS_zTT_3)$ 必然是 $\mathscr{H}_D$ 的本征解. 从这一方程可以定出 θ 之值. 定出 θ 值后,完全确定了 $(\mathscr{H}_D)_{n'n}(n' \leqslant n)$, 也就可以立即求出所需的本征解.

下面分别讨论三种极限情形.

(1) $\lambda_\tau = 0$

要求 $|n = 0; n_BSS_zTT_3)$ 是本征方程的解,就必须有

$$(\gamma_\sigma^+ - \gamma_\tau^+)\gamma_\sigma | n = 0;\ n_B SS_z TT_3) = k | n = 0;\ n_B SS_z TT_3),$$

这就要求 $\theta = \pi/2$，相应地 $k = 0$. 于是

$$|n; n_B, SS_z TT_3) = (\gamma_\tau^+)^{\frac{n_B - S - T - 2n}{2}} (\gamma_\sigma^+)^n$$

$$(S_+)^{S+S_z}(b_{-1}^+(\sigma))^S (T_+)^{T+T_3}(b_{-1}^+(\tau))^T |0)$$

$$(\mathscr{H}_D)_{mn} = \left[2\varepsilon n_B + 2\lambda_\sigma(2n + S)\left(1 - \frac{n_B - 1}{2l + 1}\right) + \frac{4\lambda_\sigma}{2l + 1} n(S + n + 1/2)\right]\delta_{mn}$$

$$- \frac{4\lambda_\sigma}{2l + 1} n(S + n + 1/2)\delta_{m+1,n},$$

于是求得

$$E(n_0;\ n_B ST) = (\mathscr{H}_D)_{n_0 n_0}$$

$$= 2\varepsilon n_B + 2\lambda_\sigma(2n_0 + S)\left(1 - \frac{n_B - 1}{2l + 1}\right) + \frac{4\lambda_\sigma}{2l + 1} n_0\left(S + n_0 + \frac{1}{2}\right),$$

$$\mathscr{N}\mathscr{P} | F(n_0)\rangle = \sum_{n=0}^{n_0} C_n^{(n_0)} | n; n_B SS_z TT_3).$$

系数 $C_{n(<n_0)}^{(n_0)}$ 可通过递推关系用 $C_{n_0}^{(n_0)}$ 表示，而 $C_{n_0}^{(n_0)}$ 由归一化条件决定. 这里的量子数 n_0 实际上就是 $C_2[SO(5)]$ 的量子数.

(2) $\lambda_\sigma = 0$

这和情形(1)相似，只要将 $\sigma, \tau;\ S,\ T$ 置换，即得所需结果.

(3) $\lambda_\sigma = \lambda_\tau = \lambda$

要求 $|n = 0;\ n_B SS_z TT_3)$ 是本征方程的解，就必须有

$$(\gamma_\sigma^+ - \gamma_\tau^+)(\gamma_\sigma - \gamma_\tau) | n = 0;\ n_B SS_z TT_3) = k | n = 0;\ n_B SS_z TT_3)$$

这就要求 $\theta = \pi/4$，相应地 $k = \frac{1}{6}[(n_B + 2)^2 - (S + T + 2)^2]$，故

$$|n; n_B SS_z TT_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_\sigma^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_\tau^+\right)^{\frac{n_B - S - T - 2n}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_\sigma^+ + \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_\tau^+\right)^n$$

$$\cdot (S_+)^{S+S_z}(b_{-1}^+(\sigma))^S (T_+)^{T+T_3}(b_{-1}^+(\tau))^T |0),$$

$$(\mathscr{H}_D)_{mn} = \left[2\varepsilon n_B + 2\lambda\left(1 - \frac{n_B - 1}{2l + 1}\right)n_B + \frac{\lambda}{2l + 1}((n_B + 2)^2 - (T + S + 2n\right.$$

$$\left. + 2)^2)\right]\delta_{mn} + \frac{4\lambda}{2l + 1} n(S - T)\delta_{m+1,n} + \frac{4\lambda}{2l + 1} n(n - 1)\delta_{m+2,n}.$$

于是求得

$$E(n_0; n_B ST) = (\mathscr{H}_D)_{n_0 n_0}$$

$$= 2\varepsilon n_B + 2\lambda\left(1 - \frac{n_B - 1}{2l + 1}\right) n_B + \frac{\lambda}{2l + 1}[(n_B + 2)^2 - (T + S + 2n + 2)^2]$$

$$\mathscr{N}\mathscr{P} | F(n_0)\rangle = \sum_{n=0}^{n_0} C_n^{(n_0)} | n;\ n_B SS_z TT_3).$$

系数 $C_{n(<n_0)}^{(n_0)}$ 可通过递推关系用 $C_{n_0}^{(n_0)}$ 表示，$C_{n_0}^{(n_0)}$ 则由归一化条件确定.

此时 n_0 为好量子数,实际上就是 $SU(4)$ 的 Casimir 算子的量子数.

对于不属于上面三种极限情形的一般情形,求不出这样一种表象. 可以固定 θ 值(例如 $\theta = 0$),直接用数值法求解.

四、总 结

本文所讨论的内容可概括为两点:

1. 解的物理内容不依赖于具体表示,所以不一定要把 $\mathscr{H}_D$ 化到 $\mathscr{H}_{HP}$,可以直接在 Dyson 表示中求解,给出所需结果.

2. 可以通过变换将 $\mathscr{H}_D$ 的矩阵化为三角矩阵以求出本征解. 存在动力学对称性时,可以找到一种标志这种动力学对称性的表象,使 $\mathscr{H}_D$ 的矩阵同时化为三角矩阵. 如果这种表象的基矢的一般形式已知,则能够很容易地得出所需解.

[1] Xu Gong-ou, Wang Shun-jin and Yang Ya-tian, *Phys, Rev.*, **C36** (1988), 2085.

[2] 徐躬耦,高能物理与核物理,**12**(1988),252; C.T.Li, *Phys, Lett.*, **120B** (1983), 251; K. Takada, *Nucl, Phys.*, **A439** (1985), 489.

[3] 任中洲、徐躬耦,高能物理与核物理,**12**(1988),116.

DISCUSSION ON THE SOLUTIONS IN DYSON BOSON REPRESENTATION

REN ZHONG-ZHOU

Department of Physics, Nanjing University

XU GONG-OU

Department of Physics, Nanjing University;

Department of Modern Physics, Lanzhou University

(Received 17 November 1988)

ABSTRACT

The solutions in Dyson boson representation are discussed in this paper. We point out that the physical essence of the solutions, including dydamical symmetry, is independent of the concrete representation. The solutions can be obtained by transforming the matrix of $\mathscr{H}_D$ into triangular matrix. In some situations, this method is very simple.