

近线性悬丝对扭摆周期的影响 及其改善办法

唐 孟 希

(中山大学物理系)

1988年5月31日收到

本文从理论上分析了具有近线性弹性系数悬丝的扭摆在衰减振动时周期的变化规律,得到了与实验相符的结果,提出了如本底扣除法、双悬丝预应力法等几种消除周期变化影响、提高测量精度的方法。

一、引 言

自从17世纪末卡文笛许用扭秤测量引力常数 G 以来,由于它有结构简单、灵敏度高以及对重力场和引力场梯度变化不敏感等优点,所以近三百年来,尽管仪器制造技术、信号检测技术和数据处理技术都有了很大的进步,但扭秤以及以它为基础发展起来的扭摆在物理学的各个领域中的应用仍有增无减。除了测 G 外,扭秤和扭摆还广泛应用于非牛顿力的测量、第五种未知相互作用的测量、引力异常研究以及材料内耗研究等方面。

扭秤和扭摆在用途上可以分成两大类。一是用于静态的力矩测量。它的基本原理是利用悬丝的静扭转力矩与未知力矩相平衡,通过对悬丝扭转角的测量来确定未知力矩;另一类是用于动态的力矩测量。它的基本原理是利用悬丝和另一具有转动惯量的物体组成扭转谐振系统,通过测量系统运动参量——如谐振频率、振幅、衰减时间常数等——的变化来确定沿悬丝长度方向上的外力矩的性质。习惯上,用于静态测量的称为扭秤,用于动态测量的称为扭摆。

通常用作动态力矩测量的扭摆可分为间歇摆和自由衰减摆两种。间歇摆在工作过程中,通过某种装置,使摆在每一个周期中获得一定的能量以补偿由于悬丝的内耗和摆盘与残余空气摩擦引起的外耗而导致的能量损失。例如 Allais 的扭摆^[1]就是用一根丝线把摆盘固定在一个相同的静止位置,然后把丝线烧断使扭摆每一周期开始时都有相同的摆幅;张平华的扭摆^[2]是用一个电磁铁吸合固定在摆盘上的衔铁,待摆盘固定后,通入反向电流使电磁铁释放摆盘以达到每一周期有相同的摆幅。但由于无论采用何种补能装置都难以保证初始条件的一致性,由于补能装置的存在无法进行全周期的连续测量,针对这些缺点,人们采用于自由衰减摆。如 Saxl^[3] 和陈湘湘^[4]的扭摆,就是通过扭摆连续衰减的摆动,测量周期的变化。这种方法虽然克服了间歇摆的一些缺点,但由于悬丝弹性系数不是常数所引起的周期变化往往掩盖了由于引力和其他力所引起的周期变化。因此分析悬丝

弹性系数不是常数时扭摆的周期如何变化, 以及如何消除或扣除这种影响, 是进一步提高扭摆精度的重要途径之一。本文试图在这方面进行讨论。

二、近线性悬丝对扭摆周期的影响

我们知道, 对于严格线性的悬丝, 即恢复力矩 M_R 与扭转角 φ 严格成正比的悬丝与摆盘组成的谐振系统, 其运动微分方程为

$$J\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + c_0\varphi = 0, \quad (1)$$

其中 J 为摆盘的转动惯量, β 为阻尼系数, c_0 为弹性系数。(1)式的解为

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t + \theta_0), \quad (2)$$

其中

$$\gamma = \beta/J, \omega_0^2 = c_0/J, \quad (3)$$

φ_0, θ_0 分别为初始摆幅和初位相角。形式为(2)式的解表明摆的周期与摆幅、时间都无关。即由这样的悬丝制成的自由衰减摆, 在没有外加力矩作用下, 周期不会随时间改变。

对于实际的悬丝, 即使在严格恒温的条件下, c_0 也不可能为常数, 而是转角 φ 的函数, 即

$$c = c(\varphi). \quad (4)$$

我们把 c 按 φ 的升幂展开

$$c = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i |\varphi|^i, \quad (5)$$

ε_i 都是小量。在一级近似下, 取 $c = c_0 + \varepsilon |\varphi|$ 。

对于满足不等式

$$c_0 \gg |\varepsilon \varphi| \quad (7)$$

的悬丝, 我们不妨称之为近线性悬丝。我们可以用微扰法求出满足(6)式时方程(1)的解, 进而找出周期变化的规律, 也可以直接用等效线性化的方法求出周期变化的规律。

这时, 扭摆运动方程为

$$J\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + (c_0 + \varepsilon |\varphi|)\varphi = 0. \quad (8)$$

我们用线性关系式

$$M_e = c_e \varphi \quad (9)$$

来代替非线性特性

$$M_R = (c_0 + \varepsilon |\varphi|)\varphi, \quad (10)$$

并选择恰当的 c_e 使

$$I = \int_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} (M_e - M_R)^2 d\varphi \quad (11)$$

具有极小值。式中 $\varphi_{\max}$ 为某时刻扭摆的最大摆幅。计算(11)式, 得

$$I = \frac{2}{3} (c_e - c_0)^2 \varphi_{\max}^3 - \varepsilon (c_e - c_0) \varphi_{\max}^4 + \frac{2}{5} \varepsilon^2 \varphi_{\max}^5, \quad (12)$$

在(12)式中对 c_e 求偏导数并令其为零, 即

$$\frac{\partial I}{\partial c_e} = \frac{4}{3} c_e \varphi_{\max}^3 - \frac{4}{3} c_0 \varphi_{\max}^3 - \varepsilon \varphi_{\max}^4 = 0, \quad (13)$$

解得

$$c_e = c_0 + \frac{3}{4} \varepsilon \varphi_{\max}. \quad (14)$$

经线性化后方程(8)变成 $J\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \left(c_0 + \frac{3}{4} \varepsilon \varphi_{\max}\right) \varphi = 0$ (15)

角频率 ω 满足

$$\omega' = \omega'(t) = \frac{1}{J} \left[c_0 + \frac{3}{4} \varepsilon \varphi_{\max}(t) \right], \quad (16)$$

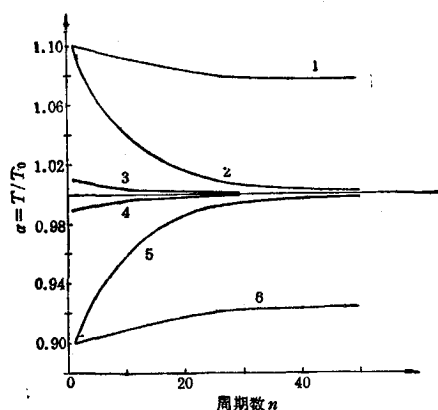


图 1 不同 $A(=3\varepsilon\varphi_0/8c_0)$ 和 r 时,非线性扭摆周期 T_0 与线性扭摆周期 T 之比与周期数 n 的依赖关系(设 $\omega = 1$)

曲线 1 为 $A = -0.1, r = 0.01$; 曲线 2 为 $A = -0.1, r = 0.1$;
曲线 3 为 $A = -0.01, r = 0.1$; 曲线 4 为 $A = 0.01, r = 0.1$;
曲线 5 为 $A = 0.1, r = 0.1$; 曲线 6 为 $A = 0.1, r = 0.01$

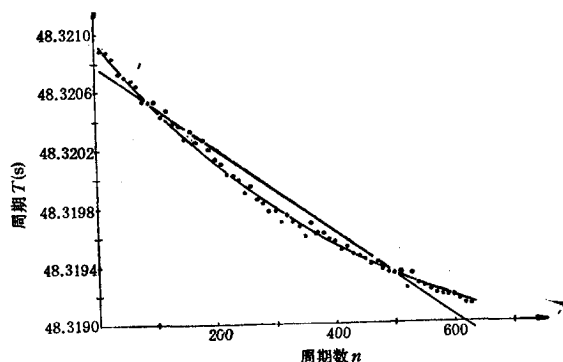


图 2 扭摆周期实测结果(中山大学引力物理研究室 1987 年 9 月 26 日 9 至 17 时)

— 为用线性方程回归; 标准差为 $1.56 \times 10^{-6}s$; 相对精度为 3.2×10^{-6} ;
- - 为用(20)式回归; 标准差为 $3.20 \times 10^{-6}s$; 相对精度为 6.6×10^{-7}

在阻尼 δ 的作用下,

$$\varphi_{\max}(t) = \varphi_0 e^{-\gamma t}, \quad (17)$$

所以

$$\omega^2 = \frac{1}{J} \left(c_0 + \frac{3}{4} \varepsilon \varphi_0 e^{-\gamma t} \right) = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3\varepsilon\varphi_0}{4c_0} e^{-\gamma t} \right). \quad (18)$$

考虑 ε 存在时的周期 T 和 ε 不存在时的周期 T_0 之比 α , 由于(7)式的存在,有

$$\alpha = \frac{T}{T_0} = \frac{\omega_0}{\omega} = \left(1 + \frac{3\varepsilon\varphi_0}{4c_0} e^{-\gamma t} \right)^{-1/2} \quad (19)$$

$$\approx 1 - \frac{3\varepsilon\varphi_0}{8c_0} e^{-\gamma t}. \quad (20)$$

当 $\varepsilon > 0$ 时, $\alpha < 1$; 当 $\varepsilon < 0$ 时, $\alpha > 1$. 且无论 ε 为何值, 均有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha = 1$, 即

时间足够长时悬丝的非线性对扭摆周期的影响趋于消失. 对于不同的 $A \left(= \frac{3\varepsilon\varphi_0}{8c_0} \right)$ 及 r 值, α 随周期数 n 的变化规律见图 1. 图 2 是我们用扭摆作实验的实测结果. 可以看出, 这对应于 $\varepsilon < 0$ 的情形.

三、改善悬丝非线性影响的几种方法

1. 从(20)式可以看出, 作为改善非线性影响的第一个途径是尽量减少 ε 和 φ_0 的值. 减少 ε 值可以通过两种途径去实现: 一是选用 ε 较小的材料, 二是选择截面为圆形的悬丝. 从弹性力学可知, 任何具有非圆截面的悬丝, 在理论上都不可能有恒定的弹性系数.

选择较小的 φ_0 角, 可以减少非线性影响, 但对于常用作扭摆周期测量的光电检测电路, 当摆角 $\varphi_{\max} (= \varphi_0 e^{-\gamma t})$ 较小时, 检测电路的抗干扰能力会降低, 即外来的振动干扰容易使光电检测电路误触发. 因此, 既要选用较小的起始摆角 φ_0 , 又要维持较长的稳定工作时间, 就应选择较小的 γ 值, 即除了采用特殊的熔炼、轧制和热处理工艺以减少金属组织的内耗外, 还应采用轴对称结构的摆盘并提高扭摆工作空间的真空度, 以减少由于空气分子而引起的外耗.

对于要求摆盘具有非零质量四极矩的扭摆, 可以通过改变摆盘内部结构来实现, 但摆盘外形仍应保持轴对称.

2. 改善非线性影响可以采用本底扣除法, 即在实测周期中扣除形如(20)式的非线性本底, 以突出其他外力矩的影响.

设周期实测值为 $T_{\exp}(t)$, 按(20)式, 周期的理论值应为 $T_{\text{th}}(t) = T_0 - A_{\exp}(-\gamma t)$. 为了确定参数 T_0 , A 和 γ , 我们可以选择三个时刻 t_1 , t_2 和 t_3 , 由方程组

$$T_0 - A_{\exp}(-\gamma t_i) = T_{\exp}(t_i) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (21)$$

的解作为 T_0 , A 和 γ 的初值, 用计算机进行逐次逼近, 使方差

$$\phi(T_0, A, \gamma) = \sum_i [T_{\exp}(t_i) - T_0 + A_{\exp}(-\gamma t_i)]^2 \quad (22)$$

达到极小, 以求得回归方程, 并进而求出标准差

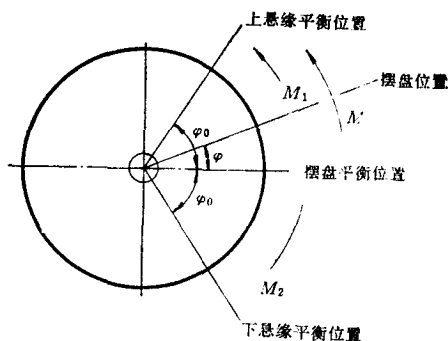


图3 用双悬丝预应力法减少非线性效应

$$\delta T = \sqrt{\phi_{\min}(T_0, A, \gamma)/n}. \quad (23)$$

这时 $\Delta T(t) = T_{\exp}(t) - T_{\text{th}}(t)$ 可以较好地反映扭摆的噪声水平 and 外力矩对扭摆的作用.

作为实验结果, 我们对 1987 年 9 月 26 日 9 至 17 时中山大学引力物理研究室的扭摆实测数据进行分析, 结果见图 2. 若对实验数据用线性方程

$$T(t) = 48.320783 - 6.0 \times 10^{-7}t \quad (24)$$

进行回归,标准差为 1.56×10^{-4} s, 相对精度为 3.2×10^{-6} . 若用(20)式进行回归,

$$T(t) = 48.318500 + 5.12 \times 10^{-3} \exp(-4.45 \times 10^{-3}t), \quad (25)$$

则标准差为 3.20×10^{-5} s, 相对精度为 6.6×10^{-7} . 由此可见,(20)式与实验结果符合得较好,用这个方法可以改善扭摆的精度.

3. 除了以上两种方法外,我们还可以通过合理设置悬丝的工作状态使非线性影响自行抵消,这种方法我们不妨称之为双悬丝预应力法.

如图3所示,我们把摆盘固定于上下两根非线性特性完全相同的悬丝之间,并使其中的一根相对于另一根转过一个角度 $2\varphi_0$. 由于悬丝的对称性,在静平衡时摆盘所处的位置会使两根悬丝都有 φ_0 的预置偏转角.

把摆盘起动,在任一位置 φ , 上悬丝的实际扭转角为 $\varphi_0 - \varphi$. 在具有非线性特性的悬丝上产生的弹性恢复力矩为

$$M_1 = (c_0 + \varepsilon|\varphi_0 - \varphi|)(\varphi_0 - \varphi), \quad (26)$$

同理,下悬丝的实际扭转角为 $\varphi_0 + \varphi$, 产生的弹性恢复力矩为

$$M_2 = (c_0 + \varepsilon|\varphi_0 + \varphi|)(\varphi_0 + \varphi). \quad (27)$$

当满足 $|\varphi| < \varphi_0$ 时,总的弹性恢复力矩为

$$M = M_1 - M_2 = -2(c_0 + 2\varepsilon\varphi_0)\varphi. \quad (28)$$

方程(28)表明,这时恢复力矩为 φ 的线性函数,即悬丝的一阶非线性影响不再存在. 这时等效弹性系数

$$c_{eq} = 2(c_0 + 2\varepsilon\varphi_0). \quad (29)$$

- [1] M. Allais, *Aerospace Eng.*, (N9-10) (1959), 1946.
- [2] 张平华, *物理学报*, **29**(1980), 1479.
- [3] E. Saxl, *Nature*, **203** (1964), 4941.
- [4] 陈湘湘, *物理学报*, **31**(1982), 1289.

DISCUSSION ON EFFECT OF APPROXIMATE LINEAR SUSPENSION WIRE ON PERIOD OF TORSIONAL PENDULUM AND METHODS OF IMPROVEMENT

TANG MENG-XI

(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou)

ABSTRACT

In this paper, the property of variance of period of the torsional pendulum with approximate linear elastic coefficient in damped vibration is analysed theoretically. The results corresponding to experiment are obtained. Several methods used to reduce variance of the period and to improve measurement precision are developed, such as method of eliminating background variance and method of double suspension wires, on which prestressing force is added.

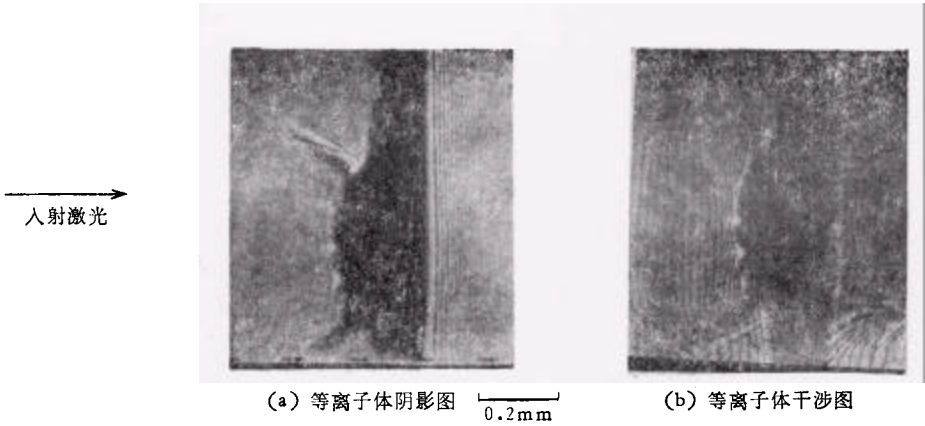


图 2

表明在热等离子体与冷的固体靶物质的交界处存在着形似“牛角尖”状的大尺度
等离子体喷流结构

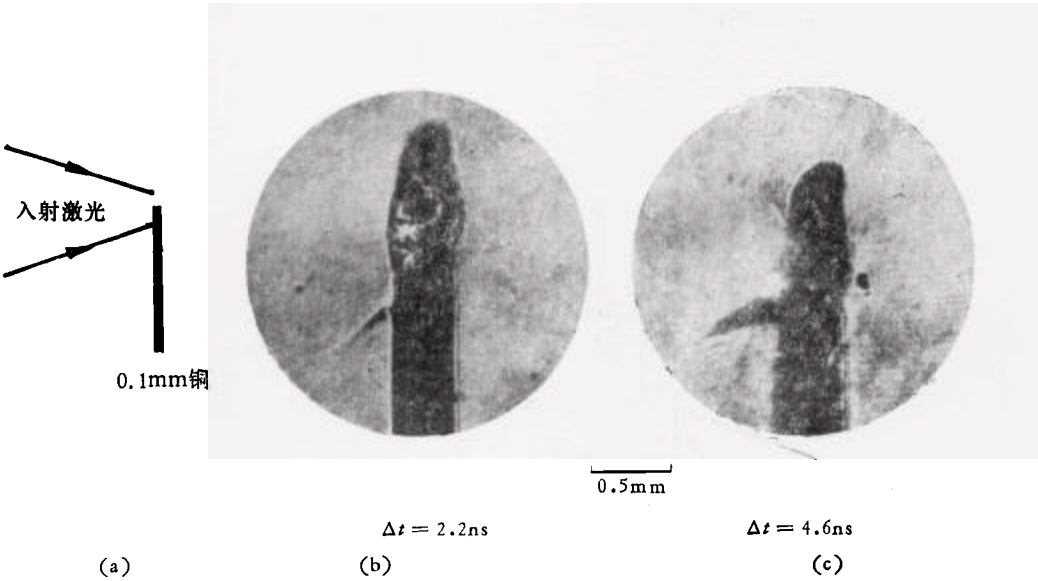


图 3 同一次打靶中得到的阴影图

表明在特殊的激光辐照靶的条件下(见图(a)),“牛角尖”状的喷流仅出现在冷
的靶物质与热等离子体交界处.铜箔靶厚为 0.1mm,功率密度为 4.0×10^{13}
W/cm², 探针光平行于焦线

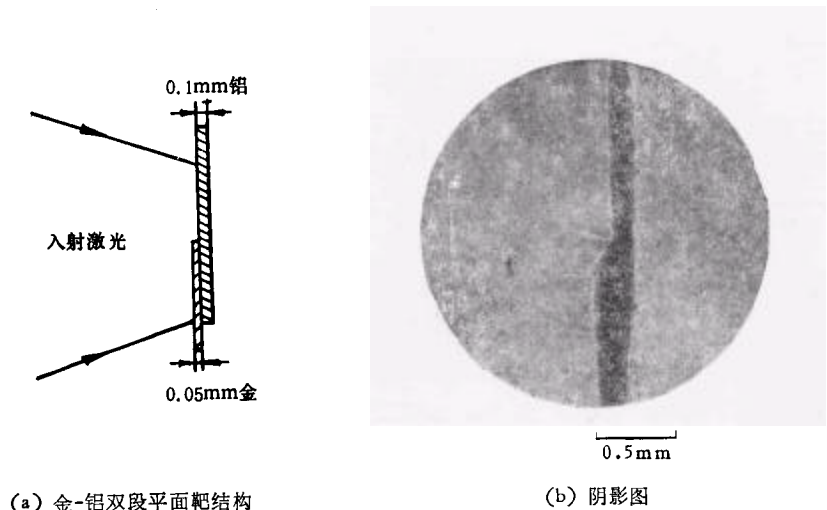


图 4

表明在两种等离子体的交界处,出现了等离子体喷流,喷流指向铝等离子体. 激光焦线长为2mm,垂直于两种靶物质的交界线,功率密度为 $1.0 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$. 激光焦线的上半部和下半部分别辐照在铝和金上. 探针光平行于二靶的交界线

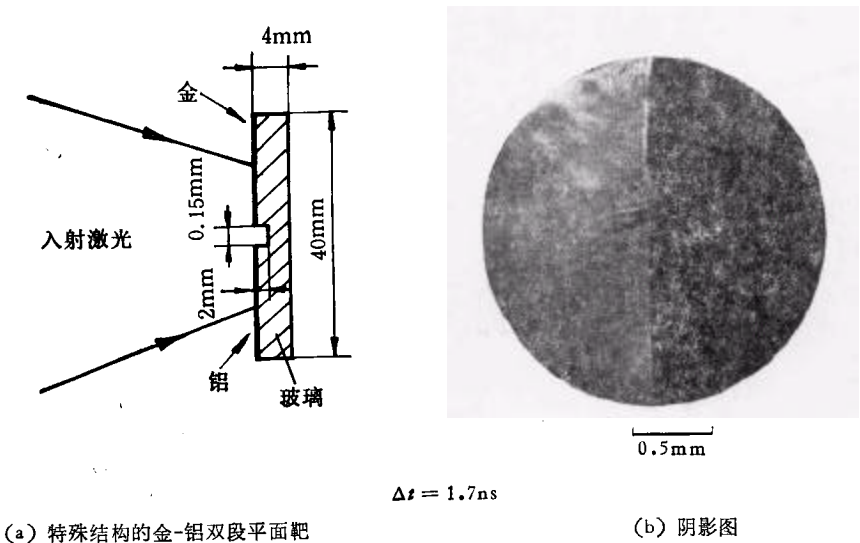


图 5

表明在金和铝靶的间隙处,出现了大尺度的等离子体喷流,喷流指向铝等离子体. 激光焦线长为 1.6mm,功率密度为 $5.2 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$, 激光辐照方式类似图 4. 探针光平行于金铝的间隙