第38卷 第11期 物 理 学 报 Vol. 38, No. 11
1989年11月 ACTA PHYSICA SINICA Nov., 1989

关于含二次非线性项受迫振动系统的混沌现象

陈 立 群
鞍山钢铁学院
1989年1月9日收到

本文用 Melnikov 方法得到了含二次非线性项受迫振动系统的混沌阈值，分析了参数对阈值的影响，与以往用近似二维叠代和数值积分的结果进行了比较.

一、引 言

文献[1]用数值方法研究了含二次非线性项受迫振动系统

$$\ddot{x} + k'\dot{x} + x - x^2 = \mu' \cos \Omega t \tag{1}$$

的混沌现象，本文用解析方法研究同一系统，并与文献[1]的结果进行了比较.

二、混沌阈值的确定与分析

把(1)式改写为受摄动的 Hamilton 可积系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + x^2 + \varepsilon(\mu \cos \Omega t - ky), \tag{2}$$

式中 $\varepsilon\mu = \mu'$, $\varepsilon k = k'$. 当 $\varepsilon = 0$ 时，(2)式为可积系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + x^2. \tag{3}$$

(3)式有双曲鞍点 $H(1,0)$ 和同宿轨道

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{1}{6}. \tag{4}$$

可积出从 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 出发的同宿轨道参数方程为

$$x_0(t) = 1 - \frac{3}{2}\operatorname{sech}^2 \frac{t}{2}, \quad y_0(t) = \frac{3}{2}\operatorname{sech}^2 \frac{t}{2} \tanh \frac{t}{2}. \tag{5}$$

对应于同宿轨道的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\mu \cos \Omega(t+\tau) - k y_0(t)] y_0(t) dt \\ &= -\frac{3}{2}\mu \sin \Omega\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \Omega t \operatorname{sech}^2 \frac{t}{2} \tanh \frac{t}{2} dt \\ &\quad - \frac{9}{4} k \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4 \frac{t}{2} \tanh^2 \frac{t}{2} dt. \end{aligned} \tag{6}$$

易知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}^4\frac{t}{2}\tanh^2\frac{t}{2}\,dt=\frac{8}{15},\tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\Omega t\operatorname{sech}^2\frac{t}{2}\tanh\frac{t}{2}\,dt=\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\Omega t\operatorname{sech}^2\frac{t}{2}\,dt.\tag{8}$$

借助复变函数论中的残数定理，可以求出

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\Omega t\operatorname{sech}^2\frac{t}{2}\,dt=4\pi\Omega\operatorname{csch}(\pi\Omega).\tag{9}$$

(7)，(8)和(9)式代入(6)式得

$$M(\tau)=-6\pi\mu\Omega^2\operatorname{csch}(\pi\Omega)\sin\Omega\tau-\frac{6}{5}k.\tag{10}$$

令

$$\mu_c=\frac{\sinh(\pi\Omega)}{5\pi\Omega^2}k',\tag{11}$$

则当且仅当 $\mu'=\dfrac{\mu}{k}k'$ 满足 $\mu'>\mu_c$ 时，$M(\tau)$ 才可能有简单零点，即(2)式有横截同宿环，(1)式有混沌解[2]。

由(11)式知，Ω 不变时，μ_c 与 k' 成正比。当 k' 不变时，注意到

$$\frac{\partial\mu_c}{\partial\Omega}=\frac{\pi\Omega\cosh(\pi\Omega)-2\sinh(\pi\Omega)}{5\pi\Omega^3}k'=\frac{(\pi\Omega-2)e^{\pi\Omega}+(\pi\Omega+2)e^{-\pi\Omega}}{10\pi\Omega^3}k'.\tag{12}$$

易验证当 $\Omega>\Omega_0=0.609566$ 时，有 $\partial\mu_c/\partial\Omega>0$。故当 $\Omega>\Omega_0$ 时，μ_c 随着 Ω 的增加而增大。

三、与数值结果的比较

文献[1]中对于(1)式的混沌现象的数值研究有如下结果：1)利用近似的二维叠代知固定 $k'=0.3$，$\Omega=1.5$ 时，(1)式在 $\mu'=\mu_\infty\approx1.42386$ 处进入混沌。2) 利用微分方程的数值解法知 $k'=0.2$，$\Omega=1.7$，$\mu_0=0.512$ 时，(1)式存在混沌解。

由(11)式知，$k'=0.3$，$\Omega=1.5$ 时，$\mu_{c1}=0.472409$；$k'=0.2$，$\Omega=1.7$ 时，$\mu_{c2}=0.459634$。

注意到 μ_∞ 与 μ_c 相差较大，可能是由于下例原因。就解析结果而言，1) Melnikov 方法是一阶近似方法，且要求(2)式中 ε 为小量，在实际问题中，ε 并非很小，因而 μ_c 是近似值；2) $\mu'>\mu_c$ 仅是必要条件而非充分必要条件。就数值结果而言；3) μ_∞ 是由近似的 Poincarè 映象得到的，与准确值相比误差；4) 二维映象的结果与初值选择有关[3]；5) μ_∞ 仅是由倍周期分岔进入混沌所确定的，还可能存在进入混沌的其它途径。其中原因 2) 和 4)尤为重要。

μ_0 与 μ_{c2} 较为接近，但仍有 $\mu_0>\mu_{c2}$，可能是因为混沌解与周期解或倍周期解共存而混沌解的吸引范围较小，在数值试验中不易找到。

尽管有数值上的不一致，但解析方法与数值方法所确定的阈值的变化趋势是一致的。

[1] 倪皖荪、魏荣爵，物理学报，34(1985)，503.
[2] K. Tomita, *Physics Reports*, 86 (1982), 113.
[3] 郝柏林，物理学进展，3(1983)，329.

ON THE PHENOMENA OF CHAOS IN A FORCED VIBRATION SYSTEM WITH A SQUARE NONLINEAR TERM

CHEN LI-QUN

Anshan Institute of Iron and Steel Technology

(Received 9 January 1989)

ABSTRACT

In this paper, the threshold of chaos in a forced vibration system with a square nonlinear term is given by using the Melnikov method. The effects of parameters on the threshold are analyzed. The known results obtained respectively by approximate 2-D iterated map and by numerically integrating the differential equation are compared with the results here.