

北京光速各向异性实验的广义相对论 (及度规理论)预言值

崔世治

中山大学

1989年1月29日收到

基于广义相对论及度规引力理论的基本原理,计算了北京“光速各向异性检验”实验的预言值.结论是该实验将不可能在广义相对论传统观点和文献[1]提出的观点之间作出判断.

一、引言

根据周培源的观点^[1],北京正着手一项实验,以检测所预言的地球引力场中光速的各向异性^[2].其主旨如下:

利用一台共焦法布里-珀罗标准器 (confocal Fabry-Perot etalon, 简称为 CFPE), 分别在三种情况下测量其共振频率:

(0) 水平放置: CFPE 腔长为 d , 共振频率为 f_0 ;

(1) 竖直放置, 从下端支承(上端自由): 腔长为 $d_1 = d(1 - b_1)$, 共振频率为 f_1 ;

(2) 竖直放置, 在上端悬挂(下端自由): 腔长为 $d_2 = d(1 + b_2)$, 共振频率为 f_2 .

文献[2]认为, 下述可检测量:

$$\xi \equiv \frac{(2 + h)f_1f_2}{f_0(f_1 + f_2)},$$

$$h \equiv b_2 - b_1 = \frac{d_2 + d_1}{2d} - 2 \quad (1)$$

将反映出地球引力场中竖直与水平方向上坐标光速的差异

$$\frac{\Delta c}{c} = |\xi - 1|. \quad (2)$$

文献[1,2]并认为, 此值依赖于解场方程时坐标系的选择.

本文依据广义相对论的一般原理讨论上述实验. 在计算中, 从下列几个一般公认的基本点出发:

1) 时空具有度规, 线元为

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad (3)$$

2) 真空中光讯号的世界线为零短程线:

$$ds^2 = 0; \quad (4)$$

3) 坐标时与固有时关系为

$$d\tau = dx^0 \sqrt{-g_{00}}; \quad (5)$$

(本文取局部惯性系中真空光速值为 1.) $d\tau$ 亦即静止的标准钟所示的时间间隔;

4) 空间两邻点 x^k 与 $x^k + dx^k$ 之间的距离为

$$dl = (\gamma_{ik} dx^i dx^k)^{1/2},$$

$$\gamma_{ik} = g_{ik} - g_{0i} g_{0k} / g_{00}, \quad (6)$$

特别是对于地球引力场——静场, 可以设置时间正交系, 在其中

$$ds^2 = g_{00} dx^{02} + g_{ik} dx^i dx^k, \quad (2')$$

$$\gamma_{ik} = g_{ik}. \quad (6')$$

三维空间一段有限曲线的长度能够定义, 它就等于曲线元(6)式的积分。

此外, 地球引力场近似地看作是静态球对称的, 可以不失普遍性地采用时空坐标 t, r, θ, φ ; 时空度规仅是径向坐标 r 的函数^[3]. 地面的弱引力场中, 度规与平直度规只差一小量; 由径向运动短程线的牛顿极限可定出 $g_{00} = -(1 + 2\phi)$, ϕ 为牛顿势。

据此所作的计算均与场方程及其解的具体形式无关。

二、计算与结果

1. 折射率的影响

腔内介质的折射率对不同方向光的传播的影响表现为一个相同的因子, 它对 f_0, f_1, f_2 的影响相互抵消因而并不影响 ξ 值. 为简明起见, 下面计算 $n = 1$ 的情形。

2. 水平 CFPE 的共振频率

可设腔长沿 θ 方向, 其两端 A 及 B 的空间坐标分别为 $r_A = r_B, \theta_A$ 及 $\theta_B, \varphi_A = \varphi_B$. 由(3)–(5)式, 光讯号由 $A \rightarrow B$ 所经历的坐标时间间隔为

$$\Delta t = \int_{(A)}^{(B)} dt = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{-\frac{g_{\theta\theta}}{g_{tt}}} d\theta, \quad (7)$$

而由 A 端的标准钟计量的光往返时间为

$$\Delta\tau = 2 \sqrt{-g_{tt}^A} \Delta t. \quad (8)$$

此处 g_{tt}^A 表 A 处的 g_{tt} 值. 由于 g_{tt} 在水平方向的变化可以忽略, 故

$$\Delta\tau = 2 \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{-g_{\theta\theta}} d\theta. \quad (9)$$

上式等号右方正是腔长 d 的两倍. 另一方面, 共振条件可表为 $\omega \cdot \Delta\tau = 2k\pi$ 或 $f_0 \Delta\tau = k$. 它表明当波前返回时, 其位相与刚发出的波前相差 2π 的整数倍. 于是最后得到

$$f_0 = k/2d. \quad (10)$$

3. ξ 值的一般考察

对于竖直放置的 CFPE, 可设 A 及 B 的坐标为 r_A 及 r_B , 且 $\theta_A = \theta_B, \varphi_A = \varphi_B$. 为确定起见, 可假定 $r_B > r_A$. 当然, 对于上悬及下承两种情况, $(r_B - r_A)$ 值一般是不同的。

在一般的精度要求下, 通常可以忽略 g_{tt} 在腔长范围内的变化. 一个与上段完全类似

的推理将导致

$$f_1 = k/2d_1, f_2 = k/2d_2. \quad (11)$$

此式和(10)式代入(1)式,得

$$\xi \equiv 1, \text{ 即 } |\xi - 1| \equiv 0. \quad (12)$$

4. 计及 g_{rr} 变化时的 ξ 值

将 g_{rr} 作泰勒展开,只取头两项,可得光在竖直腔中往返所需的固有时间间隔为

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= 2\sqrt{-g_{tt}^A} \int_{r_A}^{r_B} \sqrt{-g_{rr}(r)/g_{tt}(r)} dr \\ &\approx 2 \int_{r_A}^{r_B} \left[1 + \left(\frac{g_{ttr}}{g_{tt}} \right)_{r_A} (r - r_A) \right]^{-1/2} \sqrt{g_{rr}} dr \\ &\approx 2 \int_{r_A}^{r_B} \sqrt{g_{rr}} dr - \left(\frac{g_{ttr}}{g_{tt}} \right)_{r_A} \int_{r_A}^{r_B} (r - r_A) \sqrt{g_{rr}} dr \\ &= 2D - \left(\frac{g_{ttr}}{g_{tt}} \right)_{r_A} \mu D, \end{aligned} \quad (13)$$

式中 D 可分别代表 d_1 及 d_2 , 而 $0 \leq \mu \leq (r_B - r_A)$. 故

$$\left| \frac{\Delta\tau}{2D} - 1 \right| \lesssim \left| (r_B - r_A) \left(\frac{g_{ttr}}{2g_{tt}} \right)_{r_A} \right|. \quad (14)$$

上述不等式右方表示计及 g_{ttr} 时共振频率与(11)式的相对差异,由(1)式易见它也是 $|\xi - 1|$ 的预期值.

在地球引力场中, $g_{tt} = -(1 + 2\phi) \approx -1$; $\frac{1}{2} g_{ttr} = -\phi_{,r} = g$ (重力加速度);又 $g_{rr} \approx 1$, 故 $(r_B - r_A) \approx D$. 据此,

$$|\xi - 1| \lesssim g \cdot D. \quad (15)$$

合理地假定 $D \sim 10^2 \text{cm}$, 并注意到在几何单位中 $g \sim 10^{-18} \text{cm}^{-1}$, 可知 $|\xi - 1|$ 的上限为 10^{-16} 级.

三、讨 论

1. 本文的计算及结果适用于真空球对称情况下,引力场方程的各种解,而与坐标系的选择无关.

2. 注意到前提(3)–(6)式适用于所有度规引力理论,且本文的计算与场方程的具体形式无关,故所得结果应该也是所有度规理论的共同结论.

3. 在广义相对论中,“坐标光速”并不是一个具有直接测量意义的量. 由于我们归根结底只能借光线和标准钟去计量“距离”,在引力场中一点的邻域,单位固有时间间隔内光线掠过的固有距离必定恒为标准值(几何单位中为1), (10)和(11)式是理所当然的. 当必须计及竖直 CFPE 腔的广延性时,由于各点标准钟的时率有差异,故从 A 端看来, $\Delta\tau/2D$ 将略异于1,如(14)式;这也可以说成是“光速”略异于1. 我们算出其相对差异为 $(g \cdot D)$ 级,这与经典文献中关于加速观测者的讨论相符合^[4]. 在度规理论的框架内,北京实验中的 $|\xi - 1|$ 值实质上只反映了引力场对标准钟时率的影响.

4. 当然,若引入另外的时空度量手段和约定,即修改前提(5)和(6)式,可能导致与本文不同的理论结果。例如文献[2]预言 $|5-1|$ 值与所选取的坐标系有关,对Schwarzschild坐标及谐和坐标分别为 10^{-16} 及 10^{18} 级。按文献[1]的观点,实验结果预期为后者。(顺便指出,文献[2]似未计及光速在腔内的变化,不难算出由此带来的误差最大亦可达 $g_{rr} \cdot D/g_r \sim g \cdot D \sim 10^{-16}$ 级。)考虑到广义相对论的预言值为 $\lesssim 10^{-16}$,北京实验看来不象能在广义相对论的传统观点与文献[1]所建议的观点之间作出判断。

[1] 周培源,中国科学A辑,(4)(1982),334.

[2] Li Yongqui *et al.*, in International Symposium on Experimental Gravitational Physics, Guangzhou China, ed. by P. F. Michelson *et al.*, (1987).

[3] 例如,温伯格著,引力论和宇宙论,邹振隆等译,科学出版社,(1980),196—197.

[4] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation W. H. Freeman & Company, San Francisco, (1973), p.p.165;168.

EXPECTATION TO THE TEST IN BEIJING FOR ANISOTROPY OF THE LIGHT VELOCITY (ON GENERAL RELATIVITY AND METRIC THEORIES)

CUI SHI-ZHI

Zhongshan University, Guangzhou

(Received 29 January 1989)

ABSTRACT

On the basis of general relativity and metric theories of gravity, the expectation to the test in Beijing for anisotropy of the velocity of light was evaluated. The conclusion is that, according to this test, no judgement can be made between the viewpoint of conventional general relativity and that proposed in ref. [1].