

有扩散不稳定性的四阶反应-扩散系统的空间周期结构*

陆 启 韶

北京航空航天大学应用数理系

1988 年 12 月 30 日收到

本文利用分叉理论研究一个含参数的有扩散不稳定性的四阶反应-扩散系统的空间周期结构问题,其中扩散项服从 Cahn-Hilliard 广义扩散定律。首先通过稳定性和奇异性的分析得到从空间均匀定态产生空间周期定态的判别准则,然后利用奇异摄动方法获得这个空间周期定态的二阶近似解。本文的理论结果很好地符合文献[3]中的数值结果。

一、引 言

反应-扩散系统的时空有序耗散结构,对于探索物理、化学、生物和生态系统中众多的复杂现象的普遍规律有着重要的意义,并且密切联系着反应-扩散方程的分叉问题的研究^[1]。至今在这方面的研究绝大多数都是对二阶反应-扩散系统,例如

$$\partial x / \partial t = D_0 \nabla^2 x + f(x, \mu) \quad x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^k \quad (1)$$

进行的,式中 x 是组份浓度, μ 是分叉参数(控制参数),扩散系数矩阵 D_0 是定正的常值矩阵,即扩散项服从只有扩散稳定性的 Fick 扩散定律。在这类系统中,有序结构是通过扩散稳定性与化学不稳定性之间的竞争而产生的。

但是在实际的反应-扩散系统中,扩散系数矩阵不但会与组份浓度有关,而且可能不是定正的,即系统可能有扩散不稳定性,这时需要对扩散定律作相应的修正。例如,当扩散项服从 Cahn-Hilliard 广义扩散定律^[2]时,反应-扩散系统由下面的方程描述:

$$\partial x / \partial t = \nabla \cdot [D(x) \nabla x] - p \nabla^4 x + f(x, \mu) \quad x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^k. \quad (2)$$

这时还可能通过另一种方式,即扩散不稳定性与化学稳定性的竞争产生多种有序结构。文献[3]讨论了一个这样的反应-扩散系统,从热力学分析、稳定性分析和数值模拟的结果,可以发现不同的时空有序结构。由于在实际系统中,扩散不稳定性是比较常见的,因此对有扩散不稳定性的反应-扩散系统的深入研究,有助于探讨耗散结构新的形成机理,从而进一步揭示反应-扩散现象的复杂性。

本文利用分叉理论对文献[3]中的反应-扩散系统的定态空间周期结构进行详细的研究。首先利用稳定性和奇异性的分析建立了从空间均匀定态产生空间周期定态的判别准

* 国家自然科学基金和航空科学基金资助的课题。

侧,并讨论了这个空间周期结构的性质,再由奇异摄动方法得到二阶近似解.本文的理论结果与文献[3]中的数值模拟结果是一致的.

二、空间周期定态分叉的奇异性分析

考虑在一维空间(坐标为 r)中的四阶非线性反应-扩散方程^[3]

$$\frac{\partial x}{\partial t} = D_0 \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - 2\omega x) \frac{\partial x}{\partial r} \right] - p \frac{\partial^4 x}{\partial r^4} + k[-\xi^3 + 3a\xi - (3 + \beta)a^2\xi + (1 + \beta)a^3] \equiv F(x, \beta), \quad (3)$$

式中 $\xi = x \exp[\omega(1 - 2x)]$; $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}$; 常数 $\omega \in \mathbb{R}, a \neq 0, k, D_0, p > 0$; 分叉参数为 $\beta \in \mathbb{R}$. 在(3)式中,扩散项服从 Cahn-Hilliard 广义扩散定律, $D(x) = D_0(1 - 2\omega x)$; 反应项取考虑到非理想修正的 Schlögl 模型^[3,4]. (3)式的定态解 $x(r)$ 满足定态方程

$$F(x, \beta) = 0. \quad (4)$$

特别地,(3)式的空间均匀定态解 x_s 满足方程

$$-\xi_s^3 + 3a\xi_s - (3 + \beta)a^2\xi_s + (1 + \beta)a^3 = 0. \quad (5)$$

(5)式的解通常不是唯一的,其数目也会随 β 变化.

在下面的讨论中,设(3)式的解 $x(r, t)$ 满足空间周期性条件(周期为 l):

$$x(r + l, t) = x(r, t), \quad (6)$$

且有

$$x(0, t) = x_s. \quad (7)$$

取扰动

$$u(r, t) = x(r, t) - x_s, \quad (8)$$

它满足方程

$$\partial u / \partial t = F(u + x_s, \beta) \equiv \Phi(u, \beta) \quad (9)$$

和定解条件

$$u(r + l, t) = u(r, t), u(0, t) = 0. \quad (10)$$

定解问题(9),(10)式显然有基本定态解 $u = 0$. 于是(3)式的从空间均匀定态解 x_s 产生分叉解 $x(r, t)$ 的问题,可转化为(9)式的从基本定态解 $u = 0$ 产生分叉解 $u(r, t)$ 的问题.

(9)式的基本定态解的线性化方程为

$$\partial u / \partial t = L(\beta)u \equiv \Phi_u(0, \beta)u, \quad (11)$$

线性微分算子

$$L(\beta) = D_0(1 - 2\omega x_s) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - p \frac{\partial^4}{\partial r^4} + s(\beta), \quad (12)$$

式中

$$s(\beta) = k[-3\xi_s^2 + 6a\xi_s - (3 + \beta)a^2](1 - 2\omega x_s)\xi_s/x_s, \quad (13)$$

$$\xi_s = x_s \exp[\omega(1 - 2x_s)]. \quad (14)$$

记函数空间 $\mathcal{X} = \{u | u(r) \in C^4(\mathbb{R}), u(r + l) = u(r), u(0) = 0\}$. 易知 $L(\beta)$ 在 $\mathcal{X}$ 中的特征函数系为

$$v_m = \sin \frac{2\pi mr}{l} \quad m = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

式中 m 是波数. 与 v_m 相应的特征值为

$$\lambda(\beta, m) = s(\beta) - p(2\pi/l)^4 m^2(m^2 + b), \quad (16)$$

式中

$$b = D_0(l/2\pi)^4(1 - 2\omega x_s)/p. \quad (17)$$

对于 β 和 m 的任何数值, $\lambda(\beta, m)$ 都只取实数值, 因此由分叉的一般理论知道, (9) 式从基本定态解产生的分叉只能是定态分叉.

定态分叉值 β_c 对应基本定态解稳定性的临界状态, 即 $L(\beta_c)$ 的特征值 $\lambda(\beta_c, m) = 0$. 由此得到稳定性临界曲线

$$\beta_c = \beta_c(m) \equiv \frac{1}{a^2} \left[(6a\xi_s - 3\xi_s^2) - \frac{x_s p}{k(1 - 2\omega x_s)\xi_s} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 m^2(m^2 + b) \right] - 3. \quad (18)$$

注意到 $k > 0$, $p > 0$, $\xi_s/x_s = \exp[\omega(1 - 2x_s)] > 0$, 因此稳定性临界曲线有两种形式:

1) 当 $x_s > 1/2\omega$ 时, 稳定性临界曲线如图 1(a) 所示, 它在 $\mu = \sqrt{-(1/b)}$ 处有最小值 $\beta_\mu = \beta_c(\mu)$. 对于给定的 m 值, 当 $\beta < \beta_c(m)$ 时基本定态解是稳定的, 而当 $\beta > \beta_c(m)$ 时是不稳定的. 考虑到 μ 不一定刚好是正整数, 取紧靠 μ 的第一临界波数 m_0 (正整数), 使得对一切正整数 $m \neq m_0$ 有 $\beta_c(m) \geq \beta_c(m_0) = \beta_0$. 设零是算子 $L_0 = L(\beta_0)$ 的简单特征值 (在这里不讨论零是 L_0 的二重特征值的退化情形). 于是当 β 增大时, 基本定态解首先在 β_0 处对波数为 m_0 的扰动失去稳定性.

2) 当 $x_s < 1/2\omega$ 时, 稳定性临界曲线如图 1(b) 所示, 它在 $m = 0$ 处有最大值 $\beta_c(0)$. 对于给定的 m 值, 当 $\beta > \beta_c(m)$ 时基本定态解是稳定的, 而当 $\beta < \beta_c(m)$ 时是不稳定的. 取第一临界

波数 $m_0 = 1$, $\beta_0 = \beta_c(1)$. 这时零是算子 L_0 的简单特征值. 于是当 β 减小时, 基本定态解首先在 β_0 处对波数为 1 的扰动失去稳定性.

现在讨论定态方程

$$\Phi(u, \beta) = 0 \quad u \in \mathcal{X}, \beta \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

在 $(0, \beta_0)$ 附近的分叉性态. $\Phi: \mathcal{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Y}$ 由 (9) 式等号右边给出, 函数空间

$$\mathcal{Y} = \{u | u(r) \in C(\mathbb{R}), u(r+l) = u(r)\}, \quad (20)$$

并定义内积

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \int_0^l u_1(r) u_2(r) dr. \quad (21)$$

将空间 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 分别作直和解

$$\mathcal{X} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}_1, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{R}, \quad (22)$$

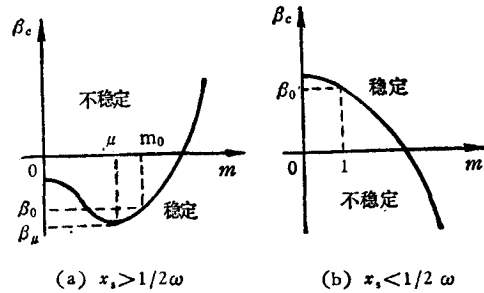


图 1

其中 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{R}$ 分别是 L_0 的零空间和值域,

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{N}^\perp = \{u | u \in \mathcal{X}, \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in \mathcal{N}\},$$

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{R}^\perp = \{u | u \in \mathcal{Y}, \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in \mathcal{R}\}.$$

由于零是线性算子 L_0 的简单特征值, 它对应的一个特征函数是 $v^* = \sin 2\pi m_0 r / l$, 因此

$$\mathcal{N} = \text{span}\{v^*\}.$$

此外, 易证 L_0 是 $\mathcal{X}$ 上的自伴算子, 即 $L_0^* = L_0$, 从而 L_0^* 的零空间 $\mathcal{N}^*$ 就是 L_0 的零空间 $\mathcal{N}$, 故有

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{R}^\perp = \mathcal{N}^* = \mathcal{N}.$$

令 P 为从 $\mathcal{Y}$ 到 $\mathcal{R}$ 的正交投影算子, 则方程(19)等价于

$$P\Phi(u, \beta) = 0, \quad (23a)$$

$$(I - P)\Phi(u, \beta) = 0, \quad (23b)$$

式中 I 为恒等算子. 由(22)式得知, $u \in \mathcal{X}$ 可以表示为

$$u = v + w, \quad v \in \mathcal{N}, \quad w \in \mathcal{M}_1. \quad (24)$$

把上式代入(23a)式, 得到

$$P\Phi(v + w, \beta) = 0.$$

由此解出 $w = w(v, \beta)$, 再代入(23b)式, 便得到在子空间 $\mathcal{M}_2$ 中的约化方程

$$\varphi(v, \beta) \equiv (I - P)\Phi(v + w(v, \beta), \beta) = 0. \quad (25)$$

如果记 $v = \xi v^*$, $\xi \in \mathbb{R}$, 则方程(25)等价于下面的标量方程:

$$g(\xi, \beta) \equiv \langle v^*, \varphi(\xi v^*, \beta) \rangle = 0. \quad (26)$$

考虑到 P 是投影算子, 方程(26)最后写成

$$g(\xi, \beta) \equiv \langle v^*, \Phi(\xi v^* + w(\xi v^*, \beta), \beta) \rangle = 0 \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (27)$$

于是原来的定态方程(19)在 $(u, \beta) = (0, \beta_0)$ 附近的分叉问题化为一维方程(27)在 $(\xi, \beta) = (0, \beta_0)$ 附近的分叉问题.

由于 $(\xi, \beta) = (0, \beta_0)$ 是函数 g 的奇异点, 即

$$g(0, \beta_0) = 0, \quad g_\xi(0, \beta_0) = 0. \quad (28)$$

因此可以利用奇异性理论去分析方程(27)在奇异点 $(0, \beta_0)$ 附近的分叉性态^[4]. 为此需要先计算函数 g 在 $(0, \beta_0)$ 处的某些导数, 然后进行判断. 根据由文献[5]给出的公式, 有下面的计算结果:

$$1) \quad g_\beta(0, \beta_0) = \langle v^*, \Phi_\beta(0, \beta_0) \rangle. \quad (29)$$

通过直接计算得到

$$\Phi_\beta(0, \beta_0) = k(-a^2 \xi_s + a^2).$$

代入(29)式便有

$$g_\beta(0, \beta_0) = 0. \quad (30)$$

2) 类似地可以得到

$$g_{\beta\beta}(0, \beta_0) = g_{\beta\beta\beta}(0, \beta_0) = \dots = 0. \quad (31)$$

$$3) \quad g_{\xi\xi}(0, \beta_0) = \langle v^*, [\Phi_{\xi\xi}(0, \beta_0)](v^*, v^*) \rangle. \quad (32)$$

通过直接计算得到

$$\begin{aligned}
 [\Phi_{uu}(0, \beta_0)](v^*, v^*) &= \frac{\partial}{\partial v_1} \frac{\partial}{\partial v_2} \Phi(v_1 v_1 + v_2 v_2, \beta_0) \Big|_{v_1=v_2=v^*} \\
 &= q_1 \sin^2 \frac{2\pi m_0 r}{l} + q_2 \cos^2 \frac{2\pi m_0 r}{l},
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 q_1 &= 6k(a - \xi_s)(1 - 2\omega x_s)^2(\xi_s/x_s)^2 \\
 &\quad - 2k\omega[-\xi_s^2 + 6a\xi_s - (3 + \beta_0)a^2](1 - \omega x_s)(\xi_s/x_s) \\
 &\quad + 4\omega D_0 m_0^2 (2\pi/l)^2, \\
 q_2 &= -4\omega D_0 m_0^2 (2\pi/l)^2.
 \end{aligned}$$

代入(32)式便求出

$$g_{\xi\xi}(0, \beta_0) = 0. \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad g_{\xi\xi\xi}(0, \beta_0) &= \langle v^*, [\Phi_{uuu}(0, \beta_0)](v^*, v^*, v^*) \rangle \\
 &\quad - 3\langle v^*, [\Phi_{uu}(0, \beta_0)](v^*, U) \rangle,
 \end{aligned} \quad (34)$$

式中

$$U = L_0^{-1} P[\Phi_{uu}(0, \beta_0)](v^*, v^*). \quad (35)$$

且 $L_0^{-1}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{M}_1$ 是线性算子 L_0 在 $\mathcal{M}_1$ 上的限制 $L_0|_{\mathcal{M}_1}$ 的逆算子.

通过直接计算得到

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \langle v^*, [\Phi_{uuu}(0, \beta_0)](v^*, v^*, v^*) \rangle \\
 &= (3/8)lk[-6(1 - 2\omega x_s)^3(\xi_s/x_s)^3 \\
 &\quad - 16\omega^2\beta_0(1 - \omega x_s)(\xi_s/x_s)].
 \end{aligned} \quad (36)$$

由(35)式知道 $U(r)$ 满足线性微分方程

$$\begin{aligned}
 L_0 U &= P[\Phi_{uu}(0, \beta_0)](v^*, v^*) \\
 &= q_1 \sin^2 \frac{2\pi m_0 r}{l} + q_2 \cos^2 \frac{2\pi m_0 r}{l}.
 \end{aligned}$$

由于 $U \in \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{R}$, 故可求出

$$U(r) = c_1 + c_2 \cos \frac{4\pi m_0 r}{l} = (c_1 + c_2) \cos \frac{2\pi m_0 r}{l},$$

式中

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{q_1 + q_2}{2s(\beta_0)} \\
 c_2 &= \frac{q_2 - q_1}{2} \left[s(\beta_0) - 16pm_0^2 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 - 4D_0 m_0^2 (1 - 2\omega x_s) \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \right]^{-1}.
 \end{aligned}$$

这里函数 s 由(13)式给出. 进一步计算得到

$$\begin{aligned}
 e_2 &= \langle v^*, [\Phi_{uu}(0, \beta_0)](v^*, U) \rangle \\
 &= l(2c_1 - c_2)(q_1 + q_2 + 2\omega D_0 m_0^2)/4.
 \end{aligned} \quad (37)$$

于是由(34), (36)和(37)式得到

$$g_{\xi\xi\xi}(0, \beta_0) = e_1 - 3e_2. \quad (38)$$

$$5) \quad g_{\xi\beta}(0, \beta_0) = \langle v^*, [\Phi_{u\beta}(0, \beta_0)]v^* \rangle$$

$$-\langle v^*, [\Phi_{uu}(0, \beta_0)](v^*, V) \rangle. \quad (39)$$

式中 $V = L_0^{-1} P \Phi_\beta(0, \beta_0)$.

通过直接计算得到

$$\Phi_{u\beta}(0, \beta_0) = -ka^2(1 - 2\cos x_s)(\xi_s/x_s),$$

故有

$$e_3 = \langle v^*, [\Phi_{u\beta}(0, \beta_0)]v^* \rangle = -kla^2(1 - 2\cos x_s)(\xi_s/x_s)/2. \quad (40)$$

此外, 可以求出

$$V(r) = \frac{k(-a^2\xi_s + a^3)}{s(\beta_0)} \left(1 - \cos \frac{2\pi m_0 r}{l}\right).$$

由此得到

$$e_4 = \langle v^*, [\Phi_{uu}(0, \beta_0)](v^*, V) \rangle = \frac{kl(-a^2\xi_s + a^3)(q_1 + q_2 + 2\omega D_0 m_0^2)}{2s(\beta_0)}. \quad (41)$$

于是由(39), (40)和(41)式得到

$$g_{\xi\beta}(0, \beta_0) = e_3 - e_4. \quad (42)$$

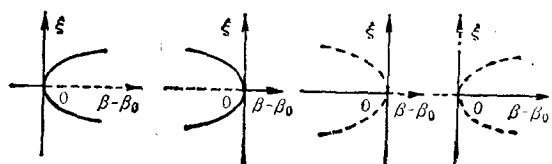
从上面得到的结果知道, 对于(27)式中的函数 $g(\xi, \beta)$, 在奇异点 $(0, \beta_0)$ 处必定有 $g_\beta(0, \beta_0) = g_{\xi\xi}(0, \beta_0) = 0$. 根据函数奇异性的识别理论结果(见文献[5]的第二章), 得到如下的分叉判别准则: 如果 $g_{\xi\xi\xi}(0, \beta_0) \neq 0$, $g_{\xi\beta}(0, \beta_0) \neq 0$, 则 $g(\xi, \beta)$ 在 $(0, \beta_0)$ 附近强等价于规范形

$$h(\xi, \beta) = r\xi^3 + \delta(\beta - \beta_0)\xi, \quad (43)$$

式中 $r = \text{sgn}(g_{\xi\xi\xi}(0, \beta_0))$, $\delta = \text{sgn}(g_{\xi\beta}(0, \beta_0))$, 即存在函数 $R(\xi, \beta)$ 和 $S(\xi, \beta)$, 使得在 $(0, \beta_0)$ 附近有

$$g(\xi, \beta) = S(\xi, \beta)h(R(\xi, \beta), \beta). \quad (44)$$

从而方程(27)的解在 $(0, \beta_0)$ 处出现叉形分叉. 当 r 和 δ 取不同数值时的分叉图形见图 2 (在图上实线表示稳定解, 虚线表示不稳定解).



(a) $r = -1, \delta = 1$, (b) $r = -1, \delta = -1$, (c) $r = 1, \delta = 1$, (d) $r = 1, \delta = -1$

图 2

由图 2 见到, 当 $r = -1, \delta = 1$ (或 -1) 时, 方程(27)在 $(0, \beta_0)$ 处有从基本定态解产生的超临界 (或亚临界) 稳定分叉解. 这个结果表明在上述条件下, 对于由方程(3)描述的反应-扩散系统, 当 β 在 β_0 附近且 $\beta > \beta_0$ (或 $\beta < \beta_0$) 时, 存在从空间均匀定态 x_s 产生的稳定的定态空间周期状态 $x(r, \beta)$

$$\begin{aligned} x &= x_s + u = x_s + \xi v^* + \omega(\xi v^*, \beta) \\ &= x_s + \xi \sin \frac{2\pi m_0 r}{l} + O(\xi^2), \end{aligned} \quad (45)$$

式中 $\xi = \xi(\beta)$ 是方程(27)的分叉解, 它满足 $\xi(0) = 0$. 由(45)式见到, 这个空间周期结

构以波数等于 m_0 的模态为主部。

对于文献[3]的数值例子(取 $\omega = 3.0$, $a = 1.2199$, $D_0 = 24.23$, $p = 13.0$, $k = 1.0$, $l = 64.0$, $x_s = 0.1943$ 。经过与文献[3]的作者查核,这里已将 D_0 和 p 的数值订正),根据本文的稳定性分析结果,因为 $x_s > 1/2\omega$, $\mu = 4.004$, 故有 $m_0 = 4$, $\beta_0 = \beta_c(4) = -0.2$ 。(38)和(42)式的计算结果给出 $g_{\xi\xi\xi}(0, -0.2) = -1.738 \times 10^7$, $g_{\xi\beta}(0, -0.2) = 49.57$, 因此 $\gamma = -1$, $\delta = 1$ 。由本文的奇异性分析的判别准则得知,当 β 在 -0.2 附近且 $\beta > -0.2$ 时,应当从不稳定的空间均匀定态 x_s 产生一个波数为 4 的稳定的空间周期状态。这与文献[3]的数值模拟结果一致。

三、空间周期定态分叉的摄动解

上面已经利用奇异性理论方法得到方程(3)的解出现空间周期定态分叉的条件,这里用奇异摄动方法求出这个分叉解。考虑定态方程

$$F(x, \beta) = 0, \quad (46)$$

式中 $x \in C^1(\mathbb{R})$, 且 $x(r)$ 满足条件(6)和(7)式。

取小参数 ε , 且在点 $(x, \beta) = (x_s, \beta_0)$ 附近取展开式

$$x = x_s + u = x_s + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots, \quad (47)$$

$$\beta = \beta_0 + \varepsilon \beta_1 + \varepsilon^2 \beta_2 + \cdots, \quad (48)$$

式中 $u_i \in \mathcal{H} (i = 1, 2, \cdots)$ 。将(47)和(48)式代入(46)式,并比较 ε 的各同次幂的系数,便得到各阶近似方程。

一阶近似方程是

$$L_0 u_1 = 0, \quad u_1 \in \mathcal{H}. \quad (49)$$

于是求出

$$u_1 = A v^* = A \sin \frac{2\pi m_0 r}{l}, \quad (50)$$

式中常数 A 待定。

二阶近似方程是

$$\begin{aligned} L_0 u_2 &= \theta u_1^2 + k a^2 \beta_1 (1 - 2\omega x_s) (\xi_s/x_s) u_1 \\ &\quad + 2\omega D_0 (du_1/dr)^2 + 2\omega D_0 u_1 (d^2 u_1/dr^2) \\ &\equiv \phi_2(r, \beta_1) \quad u_2 \in \mathcal{H}, \end{aligned} \quad (51)$$

式中 $\theta = k[3x_s(1 - 6\omega x_s + 18\omega^2 x_s^2)(\xi_s/x_s)^3 - 3a(1 - 8\omega x_s + 8\omega^2 x_s^2)(\xi_s/x_s)^2 - 2\omega a^2(3 + \beta_0)(1 - \omega x_s)(\xi_s/x_s)]$ 。

把(50)式代入(51)式等号右边,并利用(51)式的 Fredholm 可解性条件

$$\langle v^*, \phi_2(r, \beta_1) \rangle = 0, \quad (52)$$

得到

$$\beta_1 = 0. \quad (53)$$

从而(51)式可以整理成

$$L_0 u_2 = \frac{\theta A^2}{2} - \left[\frac{\theta}{2} - 2 \omega D_0 m_0^2 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \right] A^2 \cos \frac{4 \pi m_0 r}{l}.$$

由此求出

$$u_2 = A^2 \left[B_1 + B_2 \cos \frac{4 \pi m_0 r}{l} - (B_1 + B_2) \cos \frac{2 \pi m_0 r}{l} \right], \quad (54)$$

式中

$$\begin{aligned} B_1 &= \theta / (2 s(\beta_0)), \\ B_2 &= \left[-\frac{\theta}{2} + 2 \omega D_0 m_0^2 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \right] \left[s(\beta_0) - 16 p m_0^4 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 \right. \\ &\quad \left. - 4 D_0 (1 - 2 \omega x_s) m_0^2 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \right]^{-1}. \end{aligned}$$

三阶近似方程是

$$\begin{aligned} L_0 u_3 &= E_1 u_1 u_2 + E_2 u_1^3 + k a^2 \beta_2 (1 - 2 \omega x_s) (\xi_s / x_s) u_1 \\ &\quad + 4 \omega D_0 (du_1 / dr) (du_2 / dr) + 2 \omega D_0 u_1 (d^2 u_2 / dr^2) \\ &\quad + 2 \omega D_0 u_2 (d^2 u_1 / dr^2) \\ &\equiv \phi_3(r, \beta_2) \quad u_3 \in \mathcal{K}, \end{aligned} \quad (55)$$

式中

$$\begin{aligned} E_1 &= k [6 x_s (1 - 6 \omega x_s + 6 \omega^2 x_s^2) (\xi_s / x_s)^3 \\ &\quad - 6 a (1 - 8 \omega x_s + 8 \omega^2 x_s^2) (\xi_s / x_s)^2 \\ &\quad - 4 \omega a^2 (3 + \beta_0) (1 - \omega x_s) (\xi_s / x_s)], \\ E_2 &= k [(1 - 18 \omega x_s + 54 \omega^2 x_s^2 - 36 \omega^3 x_s^3) (\xi_s / x_s)^3 \\ &\quad + 12 \omega a (1 - 4 \omega x_s + 8 \omega^2 x_s^2 / 3) (\xi_s / x_s)^2 \\ &\quad + 2 \omega a^2 (3 + \beta_0) (1 - 2 \omega x_s / 3) (\xi_s / x_s)]. \end{aligned}$$

把(50)和(54)式代入(55)式等号右边,并利用(55)式的 Fredholm 可解性条件

$$\langle v^*, \phi_3(r, \beta_2) \rangle = 0, \quad (56)$$

得到

$$\beta_2 = \sigma A^2, \quad (57)$$

式中

$$\begin{aligned} \sigma &= - \left[\left(B_1 - \frac{B_2}{2} \right) E_1 + \frac{3}{4} E_2 + \frac{8 \pi^2}{l^2} \omega D_0 m_0^2 \left(\frac{B_2}{2} - B_1 \right) \right] \\ &\quad \cdot [k a^2 (1 - 2 \omega x_s) (\xi_s / x_s)]^{-1}. \end{aligned} \quad (58)$$

于是当 $\sigma \neq 0$ 时,由(48)和(57)式有

$$\beta - \beta_0 = \sigma (\varepsilon A)^2 + O(\varepsilon^3). \quad (59)$$

这表明当 $\sigma > 0$ 时有超临界定态分叉,而当 $\sigma < 0$ 时有亚临界定态分叉. 此外,由(59)式有

$$\varepsilon A = \pm \left| \frac{\beta - \beta_0}{\sigma} \right|^{1/2} + O(\varepsilon^3). \quad (60)$$

于是直到二阶近似,方程(46)的空间周期分叉解可以写成

$$\begin{aligned}
 x(r, \beta) = x_s &\pm \left| \frac{\beta - \beta_0}{\sigma} \right|^{1/2} \sin \frac{2\pi m_0 r}{l} \\
 &+ \frac{\beta - \beta_0}{\sigma} \left[B_1 + B_2 \cos \frac{4\pi m_0 r}{l} - (B_1 + B_2) \cos \frac{2\pi m_0 r}{l} \right] \\
 &+ O(|\beta - \beta_0|^{3/2}).
 \end{aligned} \quad (61)$$

对于文献[3]的数值例子, 根据(58)式可以求出 $\sigma = 79.64$, 从而波数 $m_0 = 4$ 的空间周期定态分叉解的一阶近似有

$$x - x_s = \pm 0.1206 \sqrt{\beta - \beta_0} \sin \frac{8\pi r}{l} + O(|\beta - \beta_0|). \quad (62)$$

若取 $\beta_0 = -0.2$, $\beta = -0.1990$, 由(62)式得到的空间周期分叉解的波形和振幅(3.5435×10^{-3})都与文献[3]的结果(振幅为 3.5×10^{-3})符合得非常好。

四、结 论

本文的结果表明, 对于四阶反应-扩散系统(3)式, 无论它是扩散不稳定的还是扩散稳定的, 都有可能通过扩散不稳定性与化学稳定性(或扩散稳定性与化学不稳定性)之间的竞争产生多种形式的空间周期结构。可以预期, 四阶反应-扩散系统有着比通常的二阶反应-扩散系统丰富得多的分叉现象, 因此 Cahn-Hilliard 广义扩散机理进一步扩展了耗散结构理论的研究和应用范围。本文对由方程(3)描述的系统的空间周期定态分叉问题的理论分析方法同样适用于其他的四阶反应-扩散系统。

文献[3]的数值计算结果指出, 从上述空间周期结构还会进一步产生同时随时间和空间变化的有序结构。

作者对李如生教授的有益讨论表示感谢。

- [1] G. Nicolis and L. Prigogine *Self-Organization in Nonequilibrium Systems*, John Wiley and Sons, (1977).
- [2] W., Cahn *Trans. Metall. Soc. of AIME*, 242(1968), 166.
- [3] 李如生, 物理化学学报, 2(1986), 437.
- [4] F. C., Schlögl, *Z. Physik*, 253(1972), 147.
- [5] M. Golubitsky and D. G. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. I, Springer-Verlag, (1985).

SPATIALLY PERIODIC STRUCTURES OF A FOURTH ORDER REACTION-DIFFUSION SYSTEM WITH DIFFUSION INSTABILITY

LU QI-SHAO

Department of Applied Mathematics and Physics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics

(Received 30 December 1988)

ABSTRACT

Spatially periodic structures of a parameterized fourth order reaction-diffusion system with diffusion instability, where the diffusion term is governed by Cahn-Hilliard's generalized diffusion law, are studied by means of bifurcation theory. A criterion of bifurcation for generating spatially periodic steady states from spatially homogeneous steady states is provided through stability and singularity analysis. The second order approximation of spatially periodic steady states is obtained by singular perturbation technique. The theoretical results in this paper are in good accordance with numerical results in [3].