

孤子方程求解的投影矩阵法¹⁾

肖 奕

华中理工大学物理系

1989 年 2 月 20 日收到

本文全面论述了孤子方程求解的投影矩阵法。不仅导出孤子解间的变换关系(孤子变换),而且导出以前未明确得到的呼吸子解之间的变换关系(呼吸子变换),并一般地证明了孤子解的非奇异性。

一、引 言

近年来,许多非线性现象的描述都涉及到孤子方程(如 Sine-Gordon 方程、非线性 Schrödinger 方程、KdV 方程和 MKdV 方程等等),孤子概念得到越来越广泛的应用。孤子方程的求解也就越来越具有实际意义。另一方面,在孤子理论的发展过程中,孤子方程的求解方法也一直是研究的重要课题。到目前,已出现了逆散射法^[1-4], Riemann 问题方法^[5,6], Bäcklund 变换方法^[7], Hirota 方法^[8]和 Darboux 变换方法^[9]等。在文献^[10]中报道了一种简单的求解方法——投影矩阵法。在本文中将对这种方法进行全面的论述,并进一步讨论对实孤子方程的特殊处理。下面将具体求解复 MKdV 方程(CMKdV 方程)和它对应的实方程——MKdV 方程,推广到一般情况是很直接的。

二、CMKdV 方程的投影矩阵法

CMKdV 方程具有如下形式:

$$q_t + 6|q|^2 q_x + q_{xxx} = 0, \quad (1)$$

式中 q 为 x, t 的函数,且满足

$$q \rightarrow 0 \quad \text{当} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (2)$$

(1)式可用二阶本征方程表示为

$$F_x(x, t, \lambda) = L(x, t, \lambda)F(x, t, \lambda), \quad (3)$$

$$F_t(x, t, \lambda) = M(x, t, \lambda)F(x, t, \lambda), \quad (4)$$

式中

$$L(x, t, \lambda) = -i\lambda\sigma_3 + U, \quad (5)$$

$$M(x, t, \lambda) = -4i\lambda^3\sigma_3 + 4\lambda^2U - 2i\lambda(U_x + U^2)\sigma_3 + U_xU - UU_x.$$

1) 本工作是在上海交通大学物理系完成的。

$$+ 2U^3 - U_{xx}, \quad (6)$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -\bar{q} & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

λ 为本征值, F 为 2×2 矩阵本征函数, σ_3 为泡利矩阵, “ $\bar{q}$ ” 表示 q 的复数共轭.

由于下面要涉及到含不同孤子数目的解, 把与 n 孤子解有关的量如下标 n .

1. 孤子变换

投影矩阵法求孤子解的基本思想是从 $(n-1)$ 孤子解求 n 孤子解(孤子变换), 即

$$F_n(x, t, \lambda) = B_n(x, t, \lambda) F_{n-1}(x, t, \lambda). \quad (8)$$

要找出用 F_{n-1} 表示的 B_n 的明显形式. 除特别需要, 下面将不明显写出变量 x 和 t .

$B_n(\lambda)$ 满足的方程可由(3)和(4)式得到

$$\partial_x B_n(\lambda) = L_n(\lambda) B_n(\lambda) - B_n(\lambda) L_{n-1}(\lambda), \quad (9)$$

$$\partial_t B_n(\lambda) = M_n(\lambda) B_n(\lambda) - B_n(\lambda) M_{n-1}(\lambda). \quad (10)$$

因为当 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 时,

$$F_n(\lambda) \rightarrow F_{n-1}(\lambda). \quad (11)$$

可以假定 $B_n(\lambda)$ 有如下形式:

$$B_n(\lambda) = I + \frac{\lambda_n - \lambda}{\lambda - \lambda_n} P_n(\lambda_n), \quad (12)$$

式中 λ_n 为任意变换参数, I 为 2×2 单位矩阵, 并假定 $P_n(\lambda_n)$ 不依赖于 λ . 把(12)式代入(9)式, 在 $\lambda \rightarrow \lambda_n$ 和 $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}_n$ 时, 分别得到

$$\partial_x P_n = L_n(\lambda_n) P_n - P_n L_{n-1}(\lambda_n), \quad (13)$$

$$-\partial_x P_n = L_n(\bar{\lambda}_n) - L_{n-1}(\bar{\lambda}_n) - (L_n(\lambda_n) P_n - P_n L_{n-1}(\lambda_n)). \quad (14)$$

上两式相加得到

$$L_n(\bar{\lambda}_n) - L_{n-1}(\bar{\lambda}_n) = (L_n(\bar{\lambda}_n) - L_n(\lambda_n)) P_n - P_n (L_{n-1}(\bar{\lambda}_n) - L_{n-1}(\lambda_n)). \quad (15)$$

将上式代入(14)式得到

$$\begin{aligned} \partial_x P_n &= L_{n-1}(\bar{\lambda}_n) P_n - P_n L_{n-1}(\lambda_n) - P_n (L_{n-1}(\bar{\lambda}_n) - L_{n-1}(\lambda_n)) P_n \\ &\quad + (L_n(\bar{\lambda}_n) - L_n(\lambda_n)) (P_n^2 - P_n). \end{aligned} \quad (16)$$

同样可得到

$$\begin{aligned} \partial_t P_n &= M_{n-1}(\bar{\lambda}_n) P_n - P_n M_{n-1}(\lambda_n) - P_n (M_{n-1}(\bar{\lambda}_n) - M_{n-1}(\lambda_n)) P_n \\ &\quad + (M_n(\bar{\lambda}_n) - M_n(\lambda_n)) (P_n^2 - P_n). \end{aligned} \quad (17)$$

显然, (16)和(17)式具有投影矩阵解 ($P_n^2 = P_n$), 并且正是我们需要的形式,

$$P_n(\lambda_n) = F_{n-1}(\bar{\lambda}_n) \begin{pmatrix} \bar{b}_n \\ 1 \end{pmatrix} (b_n, 1) F_{n-1}^{-1}(\lambda_n) / (b_n, 1) F_{n-1}^{-1}(\lambda_n) F_{n-1}(\bar{\lambda}_n) \begin{pmatrix} \bar{b}_n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

式中 b_n 为任意常数.

另外, 由

$$L_n^+(\lambda) = -L_n(\lambda), \quad M_n^+(\lambda_n) = -M_n(\lambda), \quad (19)$$

不难证明 P_n 是厄密矩阵, 即

$$P_n^+(\lambda_n) = P_n(\lambda_n). \quad (20)$$

这样, $P_n(\lambda_n)$ 可方便地表示为

$$P_n(\lambda_n) = |n-1\rangle\langle n-1| / \langle n-1|n-1\rangle, \quad (21)$$

$$|n-1\rangle = \begin{pmatrix} u_{n-1}(\lambda_n) \\ v_{n-1}(\lambda_n) \end{pmatrix} = F_{n-1}(\lambda_n) \begin{pmatrix} \bar{b}_n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\langle n-1| = [|n-1\rangle]^\dagger. \quad (23)$$

(8) 式是波函数 F 之间的变换, q 或 U 之间的关系由(15)式决定. (15)式可重写为

$$U_n = U_{n-1} + i(\lambda_n - \lambda_{n-1})[\sigma_3, P_n]. \quad (24)$$

(8)和(24)式就构成 CMKdV 方程的孤子变换, 式中 $P_n(\lambda_n)$ 由(18)式给出.

利用孤子变换求解首先要选定基态解 ($n=0$). 可以选真空态 ($U_0=0$) 做为基态, 也可选其它形式的基态. 这样不但可求出纯孤子解(对应真空态), 也可求出其它类型的孤子解. 而且投影矩阵法不但可以求出势 q , 同时还简单给出对应的波函数 $F(\lambda)$. 这一点很重要, 因为许多情况波函数是必须知道或者有直接物理意义的^[11-13].

上面给出的结果都是用矩阵形式表示的. 下面给出用势 q 直接表示的孤子变换. 取(24)式的矩阵(1,2)元, 利用 $P_n(\lambda_n)$ 的如下形式:

$$P_n(\lambda_n) = \frac{1}{2} \operatorname{sech} \alpha_{n-1}(\lambda_n) \begin{pmatrix} \exp(\alpha_{n-1}(\lambda_n)) & \exp(i\beta_{n-1}(\lambda_n)) \\ \exp(-i\beta_{n-1}(\lambda_n)) & \exp(-\alpha_{n-1}(\lambda_n)) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

得到

$$q_n = q_{n-1} + i(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \operatorname{sech}[\alpha_{n-1}(\lambda_n)] \exp[i\beta_{n-1}(\lambda_n)], \quad (26)$$

式中

$$e^{\alpha_{n-1}(\lambda_n) + i\beta_{n-1}(\lambda_n)} = \Gamma_{n-1}(\lambda_n) \equiv \frac{u_{n-1}(\lambda_n)}{v_{n-1}(\lambda_n)} \quad (\alpha_{n-1}, \beta_{n-1} \text{ 为实数, } v_{n-1}(\lambda_n) \neq 0). \quad (27)$$

(26)式就是用 q 直接表示的孤子变换. 在(26)式中, 令 $n=1$, 取基态为真空态 ($q_0=0$), 就是熟知的 CMKdV 方程的单孤子解^[14].

2. 双孤子变换

从孤子变换, 可以推出 l 孤子变换, 即直接从 n 孤子解到 $(n+l)$ 孤子解的变换 (l 为任意正整数). 这里只推导双孤子变换, 因为 CMKdV 方程的双孤子变换是推导 MKdV 方程呼吸子变换的基础, 同时它本身也是一种广义的非线性叠加公式.

由孤子变换(8)和(24)式马上得到

$$F_{n+2}(\lambda) = D_{n+2}(\lambda) F_n(\lambda), \quad (28)$$

$$U_{n+2} = U_n + i(\lambda_{n+1} - \lambda_{n+1})[\sigma_3, P_{n+1}(\lambda_{n+1})] + i(\lambda_{n+2} - \lambda_{n+2})[\sigma_3, P_{n+2}(\lambda_{n+2})], \quad (29)$$

$$D_{n+2}(\lambda) = B_{n+2}(\lambda) B_{n+1}(\lambda). \quad (30)$$

由(18)和(20)式不难证明下式成立:

$$P_{n+2}(\lambda_{n+2}) = \frac{B_{n+1}(\lambda_{n+2}) P_{n+1}(\lambda_{n+2}) B_{n+1}^+(\lambda_{n+2})}{\operatorname{tr}[B_{n+1}(\lambda_{n+2}) P_{n+1}(\lambda_{n+2}) B_{n+1}^+(\lambda_{n+2})]}, \quad (31)$$

式中 tr 表示矩阵求迹.

把(31)式代入(30)式,并利用

$$B_n^+(\lambda) = B_n^{-1}(\lambda), \quad (32)$$

可把 $D_{n+2}(\lambda)$ 对称地表示为

$$D_{n+2}(\lambda) = I + \frac{\lambda_{n+1} - \bar{\lambda}_{n+1}}{\lambda - \lambda_{n+1}} D^{(1)} + \frac{\lambda_{n+2} - \bar{\lambda}_{n+2}}{\lambda - \lambda_{n+2}} D^{(2)}, \quad (33)$$

式中

$$D^{(1)} = \left(I + \frac{\lambda_{n+2} - \bar{\lambda}_{n+2}}{\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2}} P_{n+1}(\lambda_{n+2}) \right) P_{n+1}(\lambda_{n+1}) / m, \quad (34)$$

$$m = I + \frac{(\lambda_{n+1} - \bar{\lambda}_{n+1})(\lambda_{n+2} - \bar{\lambda}_{n+2})}{(\lambda_{n+1} - \bar{\lambda}_{n+2})(\bar{\lambda}_{n+1} - \lambda_{n+2})} \text{tr}[P_{n+1}(\lambda_{n+1})P_{n+1}(\lambda_{n+2})]. \quad (35)$$

$D^{(2)}$ 由 $D^{(1)}$ 中 λ_{n+1} 和 λ_{n+2} 相互替换得到.

(29)式这时成为

$$U_{n+2} = U_n + i(\lambda_{n+1} - \bar{\lambda}_{n+1})[\sigma_3, D^{(1)}] + i(\lambda_{n+2} - \bar{\lambda}_{n+2})[\sigma_3, D^{(2)}]. \quad (36)$$

(33)和(36)式构成 CMKdV 方程的双孤子变换.

同孤子变换一样,双孤子变换(36)式也可直接用势 q 表示. 取(36)式的矩阵 $(1, 2)$ 元,并利用(25)式得到

$$q_{n+2} = q_n - (M_n(n+1, n+2) + M_n(n+2, n+1)) / N_n, \quad (37)$$

式中

$$M_n(l, k) = 2\eta_l \text{sech}\alpha_n(\lambda_l) \exp(i\beta_n(\lambda_l)) \cdot [(\xi_l - \xi_k)^2 + (\eta_l^2 - \eta_k^2) + 2i\eta_l(\xi_l - \xi_k)\tanh\alpha_n(\lambda_k)], \quad (38)$$

$$N_n = (\xi_{n+1} - \xi_{n+2})^2 + (\eta_{n+1}^2 - \eta_{n+2}^2) - 2\eta_{n+1}\eta_{n+2}\text{sech}\alpha_n(\lambda_{n+1})\text{sech}\alpha_n(\lambda_{n+2}) \cdot [\sinh\alpha_n(\lambda_{n+1})\sinh\alpha_n(\lambda_{n+2}) + \cos(\beta_n(\lambda_{n+1}) - \beta_n(\lambda_{n+2}))], \quad (39)$$

$$\lambda_l = \xi_l + i\eta_l. \quad (40)$$

在(37)式中,取 $n = 0$, $q_0 = 0$, 就得到 MKdV 方程的双孤子解.

三、MKdV 方程的投影矩阵法

MKdV 方程是 CMKdV 方程中 q 为实数的情况,即^[23]

$$q = \bar{q} \quad \text{或} \quad U = \bar{U}. \quad (41)$$

因此, MKdV 方程的孤子变换和双孤子变换可由 CMKdV 方程的对应变换加实数条件(41)式得到. 下面将看到,同时还得到另一种变换,这就是呼吸子变换.

1. 孤子变换

MKdV 方程的孤子变换形式上与 CMKdV 方程的一样,只是由于实数条件(41)式的限制,它要满足一些条件.

由于 q 的实数性, $L_n(\lambda)$ 满足下式:

$$\bar{L}_n(\lambda) = L_n(-\bar{\lambda}). \quad (42)$$

这样可得到

$$\partial_x \bar{F}_n(\lambda) = L_n(-\lambda) \bar{F}_n(\lambda). \quad (43)$$

这说明

$$\bar{F}_n(\lambda) = C_n F_n(-\lambda). \quad (44)$$

由时间部分, 也可得到同样的公式, 所以 C_n 是与 x, t 无关的常数. 由(2)式可推得 $C_n = C_{n-1}$, 所以可令 $C_n = 1$. 这在 $q_0 = 0$ 是严格满足的, 因为这时 $\bar{F}_0(\lambda) = F_0(-\lambda)$. 因此得到

$$\bar{F}_n(\lambda) = F_n(-\lambda). \quad (45)$$

由上式有

$$B_n(\lambda) = \bar{B}_n(-\lambda), \quad (46)$$

即

$$I + \frac{\lambda_n - \bar{\lambda}_n}{\lambda - \lambda_n} P_n = I + \frac{\lambda_n - \bar{\lambda}_n}{\lambda + \lambda_n} P_n. \quad (47)$$

由于 P_n 与 λ 无关, 要使上式成立必须有

$$\lambda_n = -\bar{\lambda}_n, \quad P_n = \bar{P}_n. \quad (48)$$

这说明, 对 MKdV 方程 λ_n 被限制在虚轴上^[14].

(45)和(48)式表明

$$\Gamma_{n-1}(\lambda_n) = \bar{\Gamma}_{n-1}(\bar{\lambda}_n). \quad (49)$$

即 $\Gamma_{n-1}(\lambda_n)$ 是实的, 所以

$$\beta_{n-1}(\lambda_n) = \begin{cases} 0 & \Gamma_{n-1}(\lambda_n) > 0; \\ \pi & \Gamma_{n-1}(\lambda_n) < 0. \end{cases} \quad (50)$$

这时(26)式成为

$$q_n = q_{n-1} + \sigma i(\lambda_n - \bar{\lambda}_n) \operatorname{sech} \alpha_{n-1}(\bar{\lambda}_n) \quad (\sigma = \pm 1 \text{ 当 } \Gamma_{n-1} \geq 0). \quad (51)$$

另外, 因为 $\Gamma_{n-1}(\lambda_n)$ 满足

$$\partial_x \Gamma_{n-1}(\lambda_n) = (1 + \Gamma_{n-1}^2(\lambda_n)) q_{n-1} - 2i \lambda_n \Gamma_{n-1}(\lambda_n). \quad (52)$$

也即 $\alpha_{n-1}(\lambda_n), \beta_{n-1}(\lambda_n)$ 满足

$$\partial_x \alpha_{n-1}(\lambda_n) = 2 q_{n-1} \cos \beta_{n-1}(\lambda_n) \cosh \alpha_{n-1}(\lambda_n) - 2 \eta_n, \quad (53)$$

$$\partial_x \beta_{n-1}(\lambda_n) = 2 q_{n-1} \sin \beta_{n-1}(\lambda_n) \sinh \alpha_{n-1}(\lambda_n) - 2 \xi_n. \quad (54)$$

(51)式也可以表为

$$q_n = -q_{n-1} + 2\sigma \frac{\partial}{\partial x} \tan^{-1} \exp(\alpha_{n-1}(\lambda_n)). \quad (55)$$

2. 双孤子变换和呼吸子变换

对于双孤子变换, 仍有(45)式成立. 这时推得

$$D(\lambda) = \bar{D}(-\lambda). \quad (56)$$

即

$$I + \frac{\lambda_{n+1} - \bar{\lambda}_{n+1}}{\lambda - \lambda_{n+1}} D^{(1)} + \frac{\lambda_{n+2} - \bar{\lambda}_{n+2}}{\lambda - \lambda_{n+2}} D^{(2)} = I + \frac{\lambda_{n+1} - \bar{\lambda}_{n+1}}{\lambda + \bar{\lambda}_{n+1}} D^{(1)}$$

$$+ \frac{\lambda_{n+2} - \bar{\lambda}_{n+2}}{\lambda + \bar{\lambda}_{n+2}} D^{(2)}. \quad (57)$$

由于 $D^{(1)}$ 和 $D^{(2)}$ 与 λ 无关, 要使上式成立只有二种可能. 一是

$$\lambda_{n+1} = -\bar{\lambda}_{n+1}, \quad \lambda_{n+2} = -\bar{\lambda}_{n+2}, \quad (58)$$

$$D^{(1)} = \bar{D}^{(1)}, \quad D^{(2)} = \bar{D}^{(2)}. \quad (59)$$

另一种是

$$\lambda_{n+1} = -\lambda_{n+2}, \quad D^{(1)} = \bar{D}^{(2)}. \quad (60)$$

第一种情况就是双孤子变换, 第二种情况是熟知的呼吸子解的情况^[14], 因此对应的变换为呼吸子变换.

需要指出, 呼吸子变换不可能由同一方程的孤子变换得到, 因为孤子变换 λ_n 在虚轴上, 而呼吸子变换 λ_n 是关于虚轴两两对称. 但呼吸子变换可由对应复方程的双孤子变换加实数条件得到. 原则上可以象求孤子变换那样通过解微分方程求呼吸子变换, 但实际上相当困难, 这可从 CMKdV 方程双孤子变换的形式看出. 因此借助 CMKdV 方程的双孤子变换求 MKdV 方程呼吸子变换. 这是实方程需要特殊处理的地方.

最后用 q 直接表示双孤子和呼吸子变换. 对于双孤子变换, 有

$$\beta_n(\lambda_{n+1}) = 0, \pi; \beta_n(\lambda_{n+2}) = 0, \pi. \quad (61)$$

这时(37)式简化为

$$q_{n+2} = q_n \pm \delta [2\eta_{n+1} \cosh \alpha_n(\lambda_{n+2}) - \epsilon 2\eta_{n+2} \cosh \alpha_n(\lambda_{n+1})] / [\cosh^2 \alpha_+ + \delta^2 \sinh^2 \alpha_-] \\ \left(\epsilon = \pm \text{ 当 } \beta_n(\lambda_{n+1}) = \beta_n(\lambda_{n+2}); \beta_n(\lambda_{n+1}) = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \text{ 取 } \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right), \quad (62)$$

式中

$$\delta = \frac{\eta_{n+1} + \epsilon \eta_{n+2}}{\eta_{n+1} - \epsilon \eta_{n+2}}, \quad \alpha_{\pm} = [\alpha_n(\lambda_{n+1}) \pm \alpha_n(\lambda_{n+2})] / 2. \quad (63)$$

利用(53)式, (62)式还可简化为

$$q_{n+2} = q_n \mp 2 \frac{\partial}{\partial x} \tan^{-1} [\delta \sinh \alpha_- / \cosh \alpha_+] \quad (64)$$

或

$$\tan \left(\frac{\omega_{n+2} - \omega_n}{2} \right) = \pm \left(\frac{\eta_{n+1} + \eta_{n+2}}{\eta_{n+1} - \eta_{n+2}} \right) \tan \left(\frac{\omega_{n+1} - \omega'_{n+1}}{2} \right), \quad (65)$$

式中 $\omega_n = q_n$, ω'_{n+1} 是当 λ_{n+1} 取 λ_{n+2} 的值时的 ω_{n+1} .

(62), (64)和(65)式是 MKdV 方程双孤子变换的三种形式, 其中(65)式就是通常所说的 MKdV 方程的非线性叠加公式^[13].

对于呼吸子变换, (45)和(60)式表明

$$\Gamma_n(\lambda_{n+1}) = \bar{\Gamma}_n(\lambda_{n+2}), \quad (66)$$

即

$$\alpha_n(\lambda_{n+1}) = \alpha_n(\lambda_{n+2}), \quad \beta_n(\lambda_{n+1}) = -\beta_n(\lambda_{n+2}). \quad (67)$$

这时(37)式可写成

$$q_{n+2} = q_n - 4\eta_{n+1} \operatorname{sech} \alpha_n(\lambda_{n+1}) [\cos \beta_n(\lambda_{n+1}) - (\eta_{n+1}/\xi_{n+1}) \sin \beta_n(\lambda_{n+1}) \tanh \alpha_n(\lambda_{n+1})] /$$

$$[1 + (\eta_{n+1}/\xi_{n+1})^2 \sin^2 \beta_n(\lambda_{n+1}) \operatorname{sech}^2 \alpha_n(\bar{\lambda}_{n+1})]. \quad (68)$$

利用(53)和(54)式,上式可简化为

$$q_{n+1} = q_n + 2 \frac{\partial}{\partial x} \tan^{-1}[(\eta_{n+1}/\xi_{n+1}) \sin \beta_n(\lambda_{n+1}) / \cosh \alpha_n(\bar{\lambda}_{n+1})]. \quad (69)$$

(68)和(69)式是 MKdV 方程呼吸子变换的两种形式. 对于 MKdV 方程,呼吸子变换与孤子变换一样,是一种基本变换. 目前还没有在文献中看到过呼吸子变换.

四、 n 孤子解的非奇异性

这里只需证明 CMKdV 方程 n 孤子解的非奇异性, MKdV 方程的可由它推出.

要求 q_n 非奇异,也就是要求 $P_l(\lambda_l)$ ($l = 1, 2, \dots, n$) 都非奇异. 这首先要使 $F_{l-1}(\lambda_l)$ 和 $F_{l-1}^{-1}(\lambda_l)$ 存在. 因为

$$\det B_l(\lambda) = (\lambda - \lambda_l) / (\lambda - \bar{\lambda}_l), \quad (70)$$

$$F_l(\lambda) = B_l(\lambda) B_{l-1}(\lambda) \cdots B_1(\lambda) F_0(\lambda), \quad (71)$$

$$\det F_0(\lambda) = 1 \quad (\text{因 } q_0 = 0). \quad (72)$$

有

$$\det F_{l-1}(\lambda_l) = \prod_{m=1}^{l-1} \frac{\lambda_l - \lambda_m}{\lambda_l - \bar{\lambda}_m}, \quad (73)$$

$$\det F_{l-1}^{-1}(\lambda_l) = \prod_{m=1}^{l-1} \frac{\lambda_l - \bar{\lambda}_m}{\lambda_l - \lambda_m}. \quad (74)$$

因此要使 $F_{l-1}(\lambda_l)$ 和 $F_{l-1}^{-1}(\lambda_l)$ ($l = 1, 2, \dots, n$) 存在,必须有 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n$ 互不相同. 有了这个条件后 $P_l(\lambda_l)$ ($l = 1, 2, \dots, n$) 都是非奇异的. 这可从(21)式看出,因为 $P_l(\lambda_l)$ 的分母为一不为零(波函数)矢量的模,它不为零.

这个结论表明,逆散射法把 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 都限制在 λ 复平面的上半面是没有必要的^[14]. 这 n 个参数值可同时都在上或下半 λ 平面,也可部分在上半 λ 平面,部分在下半 λ 平面.

上面推导出投影矩阵法求 CMKdV 和 MKdV 方程孤子(呼吸子)解的基本公式:孤子变换、双孤子变换和呼吸子变换. 虽然孤子变换可由其它方法推得^[5,6,9],但投影矩阵法更加简捷、而且明确给出呼吸子变换. 进一步,从投影矩阵法,能很简单地导出 Bäcklund 变换, Z-S 逆散射法方程组以及 n 孤子解(呼吸子解)的显式 (Hirota 形式)等,这样各种求解方法都可通过投影矩阵法联系起来. 由于篇幅限制,这方面的结果将另文发表.

从前面推导过程可看出,并不涉及 $L(\lambda)$, $M(\lambda)$ 的具体形式,所以前面的结论可以用于其它的 AKNS 系统以及其它类型的非线性系统.

蔡建华教授、黄念宁教授以及陈宗湛副教授对该工作提出了一些很有价值的建议,在此对他们表示衷心的感谢.

- [1] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal and R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.*, **19**(1967), 1095.
- [2] V. B. Zakharov and A. B. Shabat, *Sov. Phys. JETP*, **34**(1972), 62.
- [3] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, *Phys. Rev. Lett.*, **30**(1973), 1262.
- [4] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, *Stud. Appl. Math.*, **53**(1974), 249.
- [5] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *Funct. Anal. Appl.*, **13**(1979), 166.
- [6] V. A. Belinsky and V. E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP*, **48**(1978), 985.
- [7] M. R. Miura (ed.), *Bäcklund Transformations*, Springer-Verlag, Berlin, (1978).
- [8] R. Hirota, *Phys. Rev. Lett.*, **27**(1971), 1192.
- [9] C. H. Gu and Z. X. Zhou, *Lett. Math. Phys.*, **13**(1987), 179.
- [10] Z. Y. Chen, N. N. Huang and Y. Xiao, *Phys. Rev.*, **A38**(1988), 4355.
- [11] D. J. Kaup, and A. C. Newell, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A361**(1978), 413.
- [12] V. I. Karpman and E. M. Maslov, *Sov. Phys. JETP*, **46**(1978), 281.
- [13] G. L. Lamb, *Elements of Soliton Theory*, Wiley, New York, (1980), p. 169.
- [14] V. E. Zakharov *et al.*, *Theory of Solitons: Inverse Scattering Method*, Consultants Bureau, New York, (1984), p. 11.

PROJECTION MATRIX METHOD FOR SOLVING SOLITON EQUATIONS

XIAO YI

Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan

(Received 20 February 1989)

ABSTRACT

In this paper, projection matrix method for solving soliton equations is described. Soliton transformation and breather transformation are derived. And the regularity of the solutions is proved in general.