

# 光学双稳态中从三频准周期运动 过渡到混沌

杨世平 戴建华 张洪钧

中国科学院物理研究所

杨 朝 潢

河北师范学院物理系

1989 年 2 月 17 日收到

研究了在绝热近似条件下具有两个时间延迟反馈回路的混合光学双稳态中动力学行为。在此模型中,该系统可由高维映像来描写增加输入光强保持两时延比  $\omega = 3/5$ , 观察到了从三频准周期运动到混沌的过渡。此结果对理解湍流有重要意义。

## 一、引 言

自从 Ikeda 从理论上指出<sup>[1]</sup>, 具有两个延时反馈的 Fabry-Perot 腔中存在 Frustration 不稳定以来, 双延时光学双稳态中的动力学研究引起人们的注意。文献[2]在液晶混合光学双稳装置上首先从实验上证实了这种不稳定的存在。最近文献[3]报道了该系统在小延时情况下的动力学行为, 从实验上观察到 Arnold 锁频舌头, 以及从准周期运动到混沌的发展过程中分叉和标度行为。

在反馈信号延时远大于系统的弛豫时间的条件下, 混合光学双稳装置可用离散模型近似描述<sup>[4]</sup>。本文主要讨论这种有两个延时反馈的混合光学双稳系统中离散模型, 它的阈值振荡模式, 准周期运动, 三频准周期运动和锁频, 以及从准周期到混沌的发展过程。其中三频准周期运动, 由于它涉及湍流形成的机制, 一直是人们感兴趣的重要问题。虽然已有一些理论研究<sup>[5]</sup>, 但对它的了解还很不够。在流体对流<sup>[6]</sup>和 Ge 中电子-空穴等离子体<sup>[7]</sup>的实验中已观察到稳定的三频准周期运动。本文证实在光学双稳系统中也存在稳定的三频准周期运动, 因此可能是一种普适的动力学行为。

## 二、阈值附近的振荡模式

在绝热近似下, 即反馈信号的总延时  $\tau (= \tau_1 + \tau_2)$  比系统的弛豫时间  $\tau^{-1}$  大得多的情况下,  $\tau \gg \tau^{-1}$ , 有两个延时反馈的混合光学双稳系统可用下式描述:

$$X(t) = A \sin^2(X(t - \tau_1) + X(t - \tau_2) - X_b), \quad (1)$$

式中  $A$ ,  $X(t)$  和  $X_b$  分别正比于系统的输入光强、输出光强和偏置电压;  $\tau_1$  和  $\tau_2$  是两个反馈信号的延迟时间. 经简单的变量替换后(1)式可写成

$$X_n = A \sin^2(X_{n-N_1} + X_{n-N_2} - X_b). \quad (2)$$

(2)式是  $k$  维 ( $= \max(N_1, N_2)$ ) 迭代方程.

对方程(1)的线性稳定性分析给出系统在失稳边界上的本征频率是

$$f = q/\tau \quad (\tau = \tau_1 + \tau_2, q = 1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

式中  $q$  是本征振荡模. 定义两个延迟时间比率

$$\omega = |\tau_1 - \tau_2| / (\tau_1 + \tau_2) = |N_1 - N_2| / (N_1 + N_2). \quad (4)$$

在稳定性分析中, 类似文献[1]我们定义一特征函数

$$\psi(q) = (-1)^q \cos \omega \pi q, \quad (5)$$

$\psi(q)$  在物理上应满足条件

$$-1 \leq \psi(q) < 0. \quad (6)$$

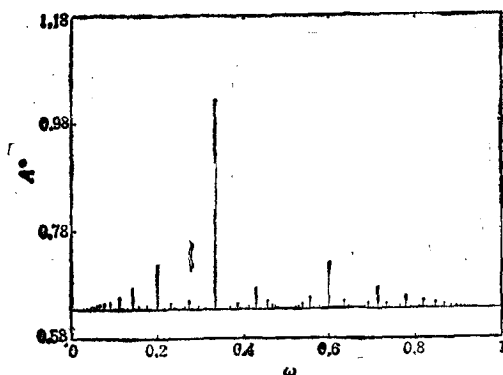


图1 失稳阈值  $A^*$  与  $\omega$  的关系

当输入光强  $A$  增大到  $A^*$  时, 系统失稳并开始振荡. 对于给定的  $\omega$  值, 系统在阈值  $A^*$  附近振荡频率是使  $\psi(q)$  取极小值的  $q$  所相应的本征振荡频率. 图1是失稳阈值  $A^*$  与  $\omega$  的关系.  $\omega$  不同, 阈值振荡具有不同的频率结构. 当  $\omega = P/Q = \text{奇数}/\text{偶数}$  (或  $= \text{偶数}/\text{奇数}$ ) 时, 阈值有相同值  $A^* = 0.63435$  (固定  $X_b = -1$ ). 阈值振荡频率是基频  $f^* = q^*/\tau$  ( $q^* = Q$ ) 和它的奇次谐波分量, 这是一种方波振荡. 图2(a)是  $\omega = 1/2$ ,  $A = 0.64$  时由迭代方程得到的波形, 功率谱和  $X_n - X_{n+1}$  平面图. 这种在  $X_n - X_{n+1}$  平面图中表现为两点周期运动的极限环, 与单延时光学双稳系统的迭代方程在阈值附近的行为相似. 唯一不同之处在于在双延时迭代系统中阈值振荡的基频不一定是一阶模.

对  $\omega = P/Q = \text{奇数}/\text{奇数}$  情况, 阈值振荡频谱结构中各频率分量不一定是基频的整数倍. 图2(b)是  $\omega = 5/7$ ,  $A = 0.7$  时迭代方程(2)在阈值附近的振荡波形、功率谱和  $X_n - X_{n+1}$  平面图. 功率谱中基频是  $f^* = 3/\tau$  ( $q = 3$ ), 其他分量  $f = 4f^*/3, 10f^*/3, 11f^*/3, 17f^*/3, 6f^*, \dots$  并随频率值增高幅度减小. 在  $X_n - X_{n+1}$  平面上出现  $Q = 7$  的周期运动. 有趣的是随着  $Q$  值增加, 在  $X_n - X_{n+1}$  平面上构成一个环, 如图2(c)所示 ( $\omega = 1/33$ ,  $A = 0.65$ ). 这种  $Q$  点周期运动是典型的锁频.

### 三、从准周期运动到混沌

在单延时光学双稳系统的迭代方程中<sup>[4]</sup>, 随着控制参量  $A$  的增加, 系统经倍周期分叉到混沌. 但对双延时光学双稳态的迭代方程, 随参量变化发展到混沌的过程远比单延迟

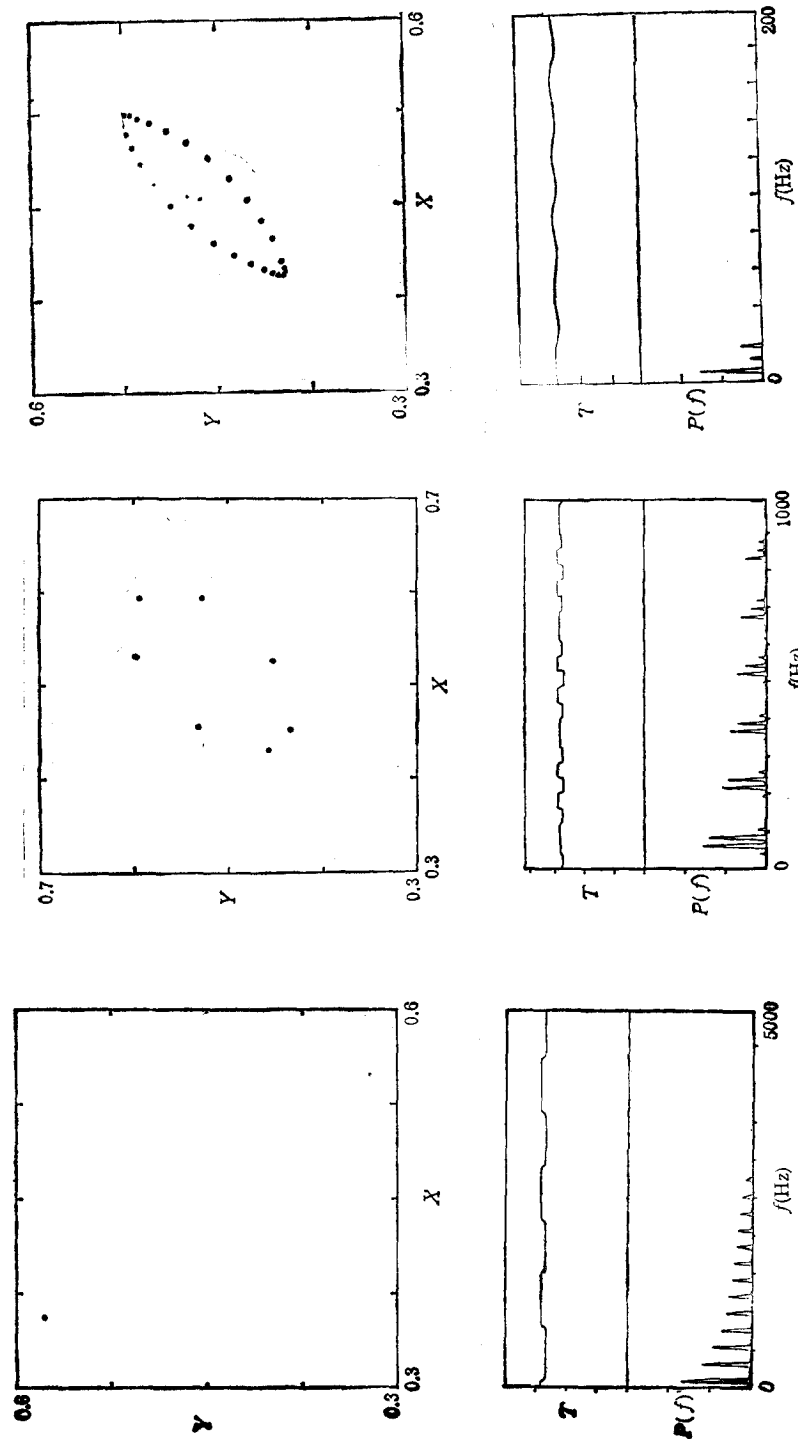
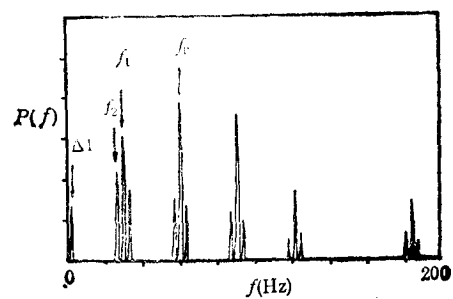
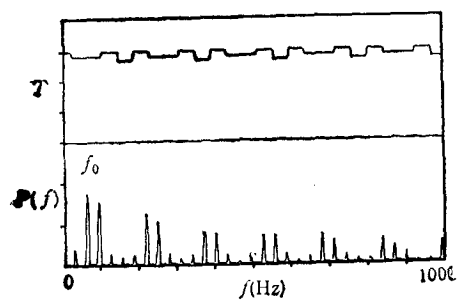
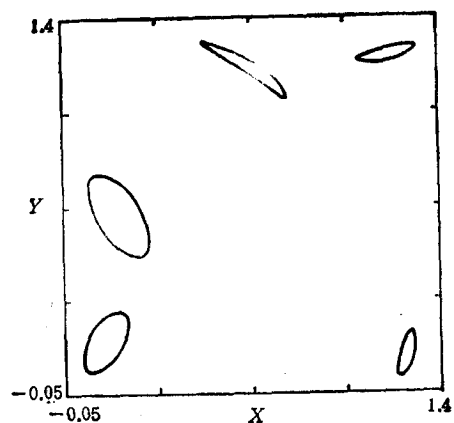
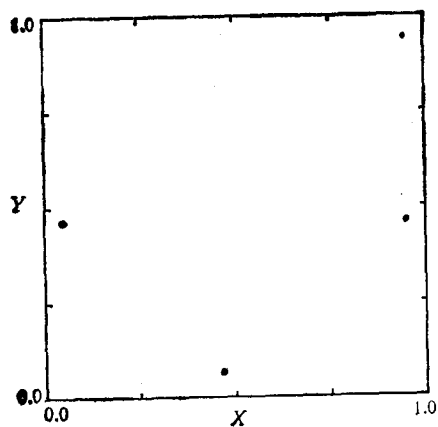
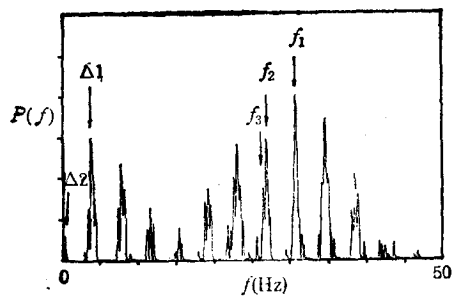
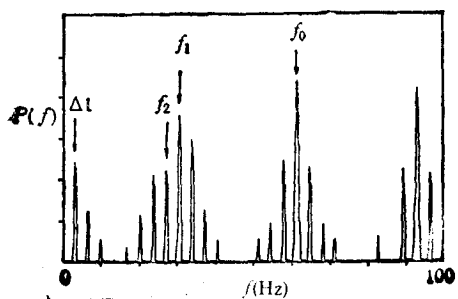
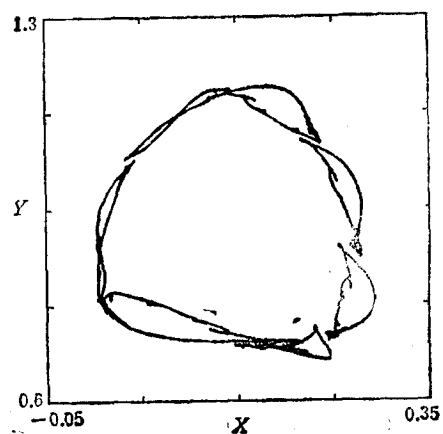
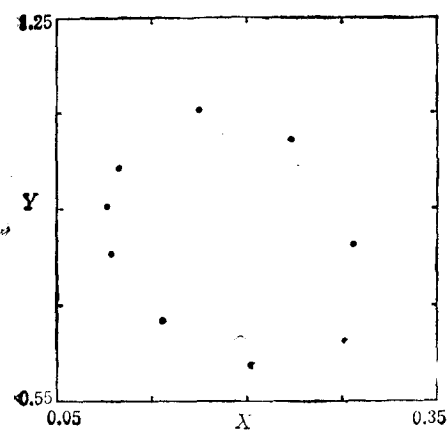
(c)  $\omega = 1/33, A = 0.65$ (b)  $\omega = 5/7, A = 0.70$ 

图2 阈值附近相平面图、波形和功率谱



(a)  $A = 0.93$

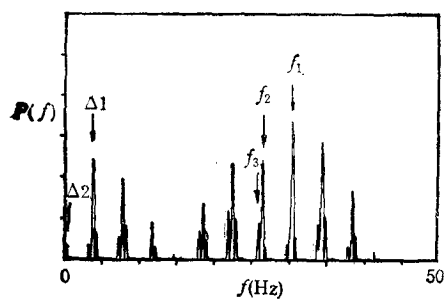
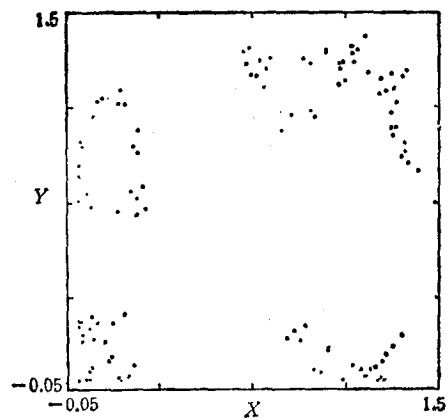
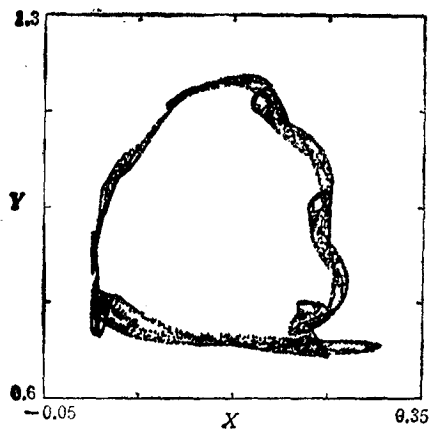
(b)  $A = 1.35$



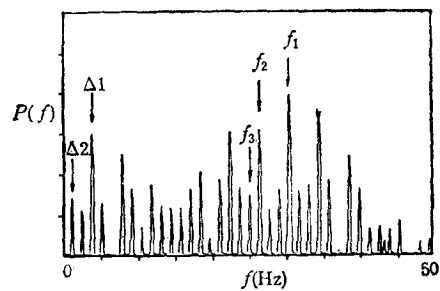
(c)  $A = 1.3689$

(d)  $A = 1.4475$

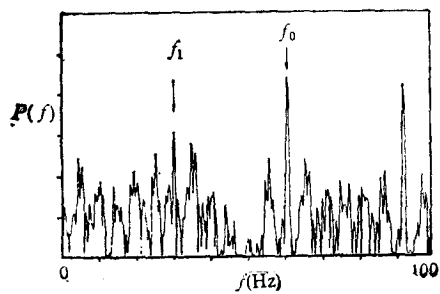
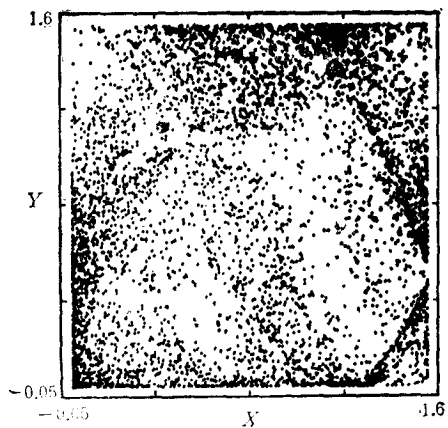
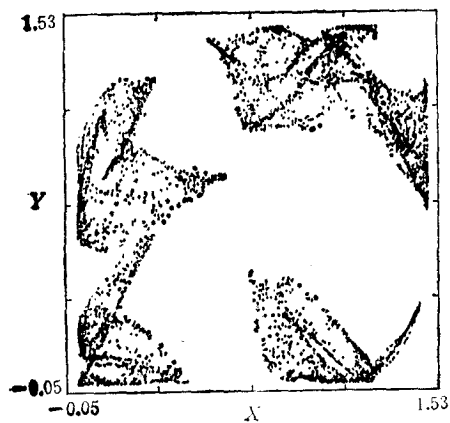
圖3 隨  $A$  增加系統的动力學



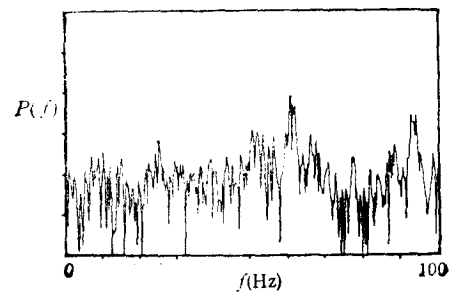
(e)  $A = 1.45$



(f)  $A = 1.451$



(g)  $A = 1.48$



(h)  $A = 1.55$

参数为 ( $\omega = 3/5$ ,  $X_0 = -1$ )

迭代方程复杂得多. 下面主要讨论  $\omega$  值固定在  $\omega = 3/5$  时, 当输入光强  $A$  增加时系统的动力学行为. 注意到此时失稳阈值  $A^* = 0.719$ ,  $k = \max(4, 1) = 4$ , 所以方程(2)是一个四维迭代方程.

1.  $A = 0.93$ , 阈值附近的 5 点周期极限环, 如图 3(a) 所示. 基频  $f^* = 2/\tau$ , ( $q = 2$ ). 在它的左侧的频率分量是  $f_1 = f^*/2$ , 对应的是  $q = 1$  的本征振荡频率. 由此可见, 当  $A > A^*$  时, 那些满足条件(6)式但  $\phi(q)$  并非最小的本征模被激发参与振荡, 但是这些频率分量的出现并不改变 5 点周期运动状态, 只是 5 个点在  $X_n - X_{n+1}$  平面上的位置有了一些变化.

2.  $A = 1.35$ , 从方程(2)得到图 3(b) 所示的  $X_n - X_{n+1}$  平面图和功率谱.  $X_n - X_{n+1}$  平面上原来的 5 点发展成 5 个封闭环, 与连续“流”系统中相空间的 Poincaré 截面上的环相应<sup>[8]</sup>. 这是准周期运动, 相应的功率谱中在与  $q = 1$  的本征频率  $f_1$  左侧出现了与  $f_1$  不可公度的频率  $f_2$ . 频谱中所有频率分量都可以表示成  $f_1$  和  $f_2$  的线性组合. 左端第一个峰值是  $f_1$  和  $f_2$  的差频, 记作  $\Delta_1 = f_1 - f_2$ . 这种两频率准周期运动的功率谱结构对于许多非线性系统具有普遍性.

3.  $A = 1.3689$ , 结果如图 3(c) 所示.  $X_n - X_{n+1}$  平面上每一个环发展成 9 个点 (整个平面上共有  $5 \times 9 = 45$  个点). 此时功率谱得到  $f_2/f_1 = 17/19$ , 这是锁频. 与图 3(b) 比较,  $f_2$  减小, 因此锁频的出现在于频率的移动, 从而使原来不公度的两频率变成公度. 在  $A$  的一个小范围内, 锁频和准周期运动将交替出现. 特别是在  $A = 1.435 - 1.445$  之间, 可以找到  $f_2/f_1 = 8/9, 15/17, 23/26, 22/25, 7/8, \dots$  等锁频现象. 这些值都落在  $7/8$  与  $8/9$  产生的 Farey 树上<sup>[9]</sup>.

4.  $A = 1.4475$ , 如图 3(d) 所示, 在  $X_n - X_{n+1}$  平面上原来的每一个环变为 9 个小环. 整个平面由 45 个小环构成. 如果仅取  $X_{45n} - X_{45(n+1)}$  可以得到一个小环. 这时相应的功率谱中  $f_2/f_1 = 7/8$ , 即  $f_1$  和  $f_2$  锁频, 那么造成准周期运动的原因必然是出现了新的频率  $f_3$ , 它与  $f_1$  和  $f_2$  不可公度. 在功率谱左端频率分量记作  $\Delta_2 = f_2 - f_3$ . 功率谱中其他分量都可用  $f_1, f_2$  和  $f_3$  的线性组合表示. 所以功率谱结构由三部分组成: 第一,  $f_1$  及其谐波分量; 第二,  $f_2$  与  $f_1$  的线性组合 (由于  $f_1$  与  $f_2$  可公度, 都可用  $f_2$  表示); 第三,  $f_3$  与  $f_1, f_2$  的线性组合. 称这种状态为锁频-准周期.

5.  $A = 1.45$ , 结果如图 3(e) 所示. 此时在  $X_n - X_{n+1}$  平面出现了 5 个二维环面, 与连续“流”系统中的三维环面对应. 在此二维环面上做 Poincaré 截面可以得到一个封闭环. 功率谱分析结果也表明  $f_1, f_2, f_3$  相互不公度. 由于  $f_2/f_1 < 7/8$ , 说明与图 3(d) 相比  $f_2$  又减小了 ( $f_1$  不变), 同时  $f_3$  也减小了. 图 4 为随  $A$  增加时相应各频率的位移.

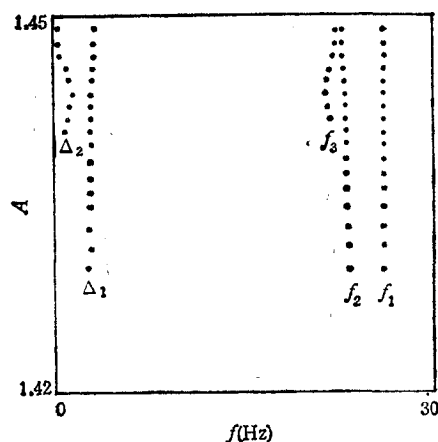


图 4 随  $A$  增加, 各频率分量位移情况

图 4 为随  $A$  增加时相应各频率的位移.

6.  $A = 1.451$ , 如图 3(f) 所示, 在图 3(e) 中的每个环面都化作 23 个点. 功率谱分析结果表明  $f_1, f_2, f_3$  相互公度.  $f_2/f_1 = 20/23$ ,  $f_3/f_2 = 19/20$ ,  $\Delta_2/\Delta_1 = 1/3$ . 功率谱中各个频率分量之间间隔相等, 这是三频锁频现象.

7.  $A = 1.48$ , 结果如图 3(g) 所示, 在  $X_n - X_{n+1}$  平面上出现了 5 个“蝴蝶”状的混沌区, 相应的功率谱中除了与系统本征模相应的频率分量是稳定的之外, 其他频率分量都变得不稳定. 这是“尖峰”混沌态. 从以上结果可以看出, 失稳后的极限环—5 点周期状态在从准周期到“尖峰”混沌的过程中始终保持不变.

8.  $A = 1.55$ , 在  $X_n - X_{n+1}$  平面上的 5 个混沌区相联成一体, 功率谱中出现了类似于噪声的连续谱. 说明系统已完全进入混沌状态, 称之为超混沌运动 (hyperchaos), 如图 3(h) 所示.

由于 FFT 频谱仪的精度所限和四维迭代在二维平面 ( $X_n - X_{n+1}$  平面) 上投影的局限性, 还给出从三频锁频 ( $A = 1.451$ ) 到“尖峰”混沌 ( $A = 1.48$ ) 之间系统随  $A$  增加发展过程的详细结果. 但是可以从  $f_2, f_3$  在功率谱中的变化趋势以及人们对二频准周期到混沌的模型的讨论<sup>[10]</sup>结果预测出, 在  $A = 1.451-1.48$  之间必定还存在着三频准周期, 锁频-准周期 (包括  $f_1, f_2$  和  $f_3$  中任意两个可公度而与第三个不可公度的准周期运动), 三频锁频, 三频准周期中的倍周期分叉 (即  $X_n - X_{n+1}$  平面上二维环面的加倍), 以及三频锁频中的倍周期分叉等状态.

此外, 还对  $\omega = 1/5$  ( $k = 3$ ) 的情况做了详细地观察. 结果表明从 5 点周期的极限环开始, 系统经历了准周期 (伴随着各种锁频) → 准周期或锁频中的倍周期分叉 → 准周期 → 5 点周期运动 → 准周期中的  $1/2$  和  $1/4$  分频 → 尖峰混沌 → 超混沌.

#### 四、结 语

本文详细分析了具有两个延时反馈的混合光学双稳态系统在绝热近似下对应的迭代方程在参量  $\omega = 3/5$  时从准周期到混沌的演化过程, 给出一种以三频准周期为标志的走向混沌的道路: 不动点 → 极限环 (多点周期运动) → 二频准周期 (伴随着各种锁频) → 分频 → 准周期 → 三频准周期 → 三频锁频 → 三频准周期或三频锁频中的倍周期分叉 → 混沌.

- [1] K. Ikeda and M. Mizuno, *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1984), 1340.
- [2] Z. Hong-jun, D. Jian-hua, *Opt. Lett.*, **11**(1986), 245.
- [3] Guang Xu, Jian-hua Dai and Hong-jun Zhang, *Phys. Rev.*, **A39**(1989), 3508.
- [4] 戴建华, 张洪钧, 王鹏业, 金朝鼎, 物理学报, **34**(1985), 992.
- [5] J. -P. Eckmann, *Rev. Mod. Phys.*, **53**(1981), 643; S. Newhouse, D. Ruelle and F. Takens, *Commun. Math. Phys.*, **64**(1978), 35; C. Grebogi, E. Ott and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **51**(1983), 339; *Physica*, **15D**(1985), 354.
- [6] R. W. Walden, P. Kolodner, A. Passner and C. M. Surko, *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1984), 242.
- [7] G. A. Held and C. Jeffries, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 1183.
- [8] 郝柏林, 物理学进展, **3**(1983), 335.
- [9] P. Cvitanovic, M. J. Jensen, L. P. Kadanoff and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 343.
- [10] Kunihiko Kaneko, *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems*, World Scientific, Singapore, (1986).

## THREE-FREQUENCY QUASIPERIODIC TRANSITION TO CHAOS IN OPTICAL BISTABILITY

YANG SHI-PING    DAI JIAN-HUA    ZHANG HONG-JUN

*Institute of Physics, Academia Sinica*

YANG CHAO-HUANG

*Department of Physics, Hebei Normal College, Shijiazhuang*

(Received 17 February 1989)

### ABSTRACT

The dynamic behavior of a hybrid optical bistability with two delayed feedback loops under the adiabatic approximation condition is studied. In this models, the system can be described by high dimensional mappings. Increasing input intensity while keeping the ratio of two time delays fixed at  $\omega=3/5$ , we observe transitions between three-frequency quasiperiodicity and chaos. This result could be of importance in our understanding of turbulence.