

半导体中电子-空穴对的相干态、 复合辐射和噪声压缩

黄 洪 斌

东南大学物理化学系

1988年6月17日收到

本文讨论了在光的相干激发下,半导体中电子-空穴对的玻色近似和 $SU(2)$ 相干态的产生,讨论了两种情形下电子-空穴对噪声特性和复合辐射特性,给出了电子-空穴对的二阶相干函数和分布函数,说明了玻色近似相当于 $SU(2)$ 群到谐振子群的收缩。

一、引 言

由于压缩光在通讯和弱信号检测等方面有着潜在的应用价值而引起了人们的极大兴趣^[1,2]。但压缩光的产生、传播受与其相互作用的力学体系的影响^[3-5]。压缩的偶极子和压缩的原子态可产生压缩光^[6,7],因此研究力学体系的压缩特性也是压缩光研究的一个重要方面。本文以简单的抛物型两能带半导体为模型,以 Wannier 激子为对象(实际上应是激子极化子,在本文中称电子-空穴对),研究了光相干激发下,电子-空穴对玻色近似和 $SU(2)$ 相干态的产生及特性,分析了压缩光的产生与电子-空穴对压缩性的关系,指出了玻色近似相当于 $SU(2)$ 群到谐振子群的收缩,并给出了两种情形下各量的对应关系。

二、玻色近似下电子-空穴对的相干态

电子-空穴对的产生算符和消灭算符 D_k^+ , D_k^- (见附录一)满足对易关系

$$[D_k, D_{k'}^+] = \delta_{k,k'} - \delta_{k,k'}(a_{k'+q}^+ a_{k+q} + b_{-k}^+ b_{-k'}). \quad (1)$$

在低激发条件下,

$$\langle [D_k, D_{k'}^+] \rangle = \delta_{k,k'} - \delta_{k,k'} O(N^{-1}) \approx \delta_{k,k'}, \quad (2)$$

N 为晶格原胞数。因而 D_k^+ , D_k^- 满足玻色子的对易关系

$$[D_k, D_{k'}^+] = \delta_{k,k'}. \quad (3)$$

为简明起见,假定对跃迁几率的贡献主要是基波,则体系的哈氏量由附录(A.4)式给出

$$H_c = \sum_k \omega_k D_k^+ D_k + i \sum_k \lambda_k (\exp[i(\omega t + \theta)] D_k - \exp[i(\omega t + \theta)] D_k^+). \quad (4)$$

体系的薛定谔方程为

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle = H_c |\phi(t)\rangle. \quad (5)$$

设

$$|\phi(t)\rangle = e^{-iF(t)} e^{\alpha(t)E^+} |0\rangle, \quad (6)$$

式中 $|0\rangle$ 为体系的基态, 即价带全填满、导带全空的状态, $E^+ = \sum_k f_k D_k^+$ 满足对易关系

$$[E^-, E^+] = 1 - \sum_k |f_k|^2 (a_{k+q}^+ a_{k+q} + b_{-k}^+ b_{-k}). \quad (7)$$

在低激发下, (7) 式满足玻色子对易关系

$$[E^-, E^+] = 1. \quad (8)$$

将(6)式代入(5)式并利用(3)和(8)式可得

$$\begin{aligned} \omega_k f_k \alpha(t) - i \lambda_k e^{i(\omega t + \theta)} &= i \dot{\alpha}(t) f_k, \\ \dot{F}(t) - i \sum_k \lambda_k f_k \exp[i(\omega t + \theta)] \alpha(t) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

方程(9)的第一式正是文献[9]的(39)式。

若

$$|\phi(0)\rangle = |0\rangle, \quad (10)$$

则方程(9)的解为

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= - \int_0^t \sum_k \lambda_k f_k^* \exp[i(\omega_k - \omega)t'] dt' \exp[i(\omega_k t + \theta)], \\ F(t) &= i \int_0^t \sum_k \lambda_k f_k \exp[i(\omega t' + \theta)] \alpha(t') dt'. \end{aligned} \quad (11)$$

利用了归一化条件

$$\sum_k |f_k|^2 = 1. \quad (12)$$

若 λ_k 与时间无关, 在共振激发条件下, 方程(11)的解为

$$-iF(t) = -\frac{1}{2} \left| \sum_k \lambda_k f_k t \right|^2, \quad |\alpha(t)|^2 = \left| \sum_k \lambda_k f_k t \right|^2. \quad (13)$$

这样方程(5)的瞬态解可表为

$$|\phi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha E^+} |0\rangle. \quad (14)$$

这正是 Glauber 相干态波函数。

不难证明

$$\begin{aligned} D_k |\phi(t)\rangle &= \alpha f_k |\phi\rangle = \alpha_k |\phi\rangle, \\ E^- |\phi\rangle &= \alpha |\phi\rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

定义电子-空穴对的 Fock 态

$$|n\rangle = \frac{(E^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (16)$$

显有

$$\begin{aligned} D_k|n\rangle &= \sqrt{n} f_k |n-1\rangle, \quad D_k^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1} f_k^* |n+1\rangle, \\ E^-|n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad E^+|n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

处在 $|\phi\rangle$ 态上的平均电子-空穴对数为

$$\langle n \rangle = \langle \phi | E^+ E^- | \phi \rangle = |\alpha|^2. \quad (18)$$

n 个电子-空穴对处在态 $|\phi\rangle$ 上的几率为

$$|\langle n | \phi \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^2}{n!} e^{-|\alpha|^2} = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}. \quad (19)$$

这是泊松分布。

下面讨论电子-空穴对的噪声压缩及其复合发射光的噪声压缩问题。假定辐射光为单模,则由附录(A.7)式的哈氏量写出相应的海森堡方程

$$\dot{a}(t) = -i[a, H] = \sum_k \lambda_k D_k. \quad (20)$$

用迭代法求解精确到 $\lambda_k t$ 的二阶有

$$a(t) = a + \sum_k \lambda_k D_k t - \frac{1}{2} \sum_k \lambda_k^2 t^2 a. \quad (21)$$

算符 $a(t)$ 的实正交分量为 $X(t) = \frac{1}{2}(a(t) + a^\dagger(t))$, 假定 $t=0$ 时电子-空穴对和模 a 是非关联的,则有

$$\begin{aligned} [\Delta X_{1a}(t)]^2 &= \langle X_{1a}^2(t) \rangle - \langle X_{1a}(t) \rangle^2 \\ &= \Delta X_{1a}^2 + \sum_k \lambda_k^2 t^2 (\Delta X_{1Dk}^2 - \Delta X_{1a}^2), \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $\Delta X_{1Dk}^2 = \left\langle \left[\frac{1}{2} (D_k + D_k^\dagger) \right]^2 \right\rangle - \left\langle \frac{1}{2} (D_k + D_k^\dagger) \right\rangle^2$, 假定 $t=0$ 时模 a 处于相干态,(22)式变为

$$[\Delta X_{1a}(t)]^2 = \frac{1}{4} + \sum_k \lambda_k^2 t^2 \left(\Delta X_{1Dk}^2 - \frac{1}{4} \right). \quad (23)$$

由(23)式可以看出,若 $\Delta X_{1Dk}^2 < 1/4$, 则 $[\Delta X_{1a}(t)]^2 < 1/4$, 即若电子-空穴对有压缩效应,则其复合发射光也具有压缩效应。因 $\lambda_k = g_k J_1(\eta_k)$, 所以,载流子和电场的带内作用使压效应降低。

在态 $|\phi\rangle$ 上, $\Delta X_{1Dk}^2 = 1/4$, 所以 $[\Delta X_{1a}(t)]^2 = 1/4$, 因此在玻色近似下,若激发光无压缩效应,则电子-空穴对的复合发射光也无压缩效应,当激发光有压缩效应时,可造成电子-空穴对的压缩。

电子-空穴对的二阶相关函数为

$$g^{(2)} = \frac{\langle E^+ E^+ E^- E^- \rangle}{|\langle E^+ E^- \rangle|^2}, \quad (24)$$

在态 $|\phi\rangle$ 上

$$g^{(2)} = 1. \quad (25)$$

在态 $|n\rangle$ 上

$$g_n^{(2)} = 1 - \frac{1}{n}. \quad (26)$$

显然 $g_n^{(2)} < 1$, 即电子-空穴对有反聚束效应^[10]. 怎样才能使电子-空穴对有压缩效应和反聚束效应呢? 这是下面要讨论的问题.

三、电子-空穴对的 $SU(2)$ 相干态和 Dicke 态

定义

$$S_+ = \sum_k D_k^\dagger, \quad S_- = \sum_k D_k, \quad S_z = \frac{1}{2} \sum_k (a_{k+q}^\dagger a_{k+q} + b_{-k}^\dagger b_{-k} - 1). \quad (27)$$

这些算符满足 $SU(2)$ 李代数的对易关系

$$[S_z, S_\pm] = \pm S_\pm, \quad [S_+, S_-] = 2S_z. \quad (28)$$

么正算符 $T = \exp \left[\frac{\theta}{2} (e^{-i\varphi} S_+ - e^{i\varphi} S_-) \right] = \exp(\tau S_+) \exp[\ln(1 + |\tau|^2) S_z] \exp[-\tau^* S_-]$ 作用在基态 $|S_z = S\rangle$ 上可产生电子-空穴对的 $SU(2)$ 相干态^[8,11]

$$\begin{aligned} T|S, -S\rangle &= |\theta, \varphi\rangle = |\tau\rangle \\ &= \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2S} \exp \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{-i\varphi} S_+ \right] |S, -S\rangle \\ &= (1 + |\tau|^2)^{-S} e^{\tau S_+} |S, -S\rangle, \end{aligned} \quad (29)$$

式中 $\tau = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{-i\varphi}$ $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $S_\pm = S_1 \pm iS_2$, $S_-|S, -S\rangle = 0$.

同样可以建立电子-空穴对的 Dicke 态^[11]

$$\begin{aligned} |S, m\rangle &= \left[\frac{(S-m)!}{(2S)!(S+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} S_+^{S+m} |S, -S\rangle \\ m &= -S, \dots, S, \quad |m| \leq S \leq \frac{N}{2}, \end{aligned} \quad (30)$$

且有

$$|\langle S, m | \tau \rangle|^2 = \frac{(2S)!}{(S+m)!(S-m)!} \frac{|\tau|^{2(S+m)}}{(1 + |\tau|^2)^{2S}}. \quad (31)$$

电子-空穴对的这种分布类似于二项式分布. 利用生成函数可以证明^[11]

$$\langle \tau | S_+ S_- | \tau \rangle = \frac{2S|\tau|^2}{(1 + |\tau|^2)^2} (2S + |\tau|^2), \quad (32)$$

$$\langle \tau | S_z | \tau \rangle = \frac{S|\tau|^2 - S}{1 + |\tau|^2} = -S \cos \theta, \quad (33)$$

$$\Delta S_1^2 = \frac{S}{2} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi), \quad (34)$$

$$\Delta S_2^2 = \frac{S}{2} (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi). \quad (35)$$

测不准关系为

$$\Delta S_1 \Delta S_2 \geq \frac{1}{2} |\langle S_3 \rangle|. \quad (36)$$

由(33), (34), (35)式, (36)式变为

$$\left(\cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \sin^2 2\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \geq |\cos \theta|. \quad (37)$$

当 $\theta = 0$, φ 为任意值或 $\varphi = \frac{1}{2} n\pi$ (n 为任意整数), θ 为任意值时, (37)式两边相等, 这些条件下的 $SU(2)$ 相干态称为理想态 (Intelligent states), 当

$$\theta = \pi/2, \varphi = \frac{1}{2} n\pi$$

时, 对应的 $SU(2)$ 相干态称为最小测不准态^[8].

使(36)式两边相等的态满足方程^[12]

$$(S_1 - i\alpha S_2)|\phi\rangle_{\text{Im}} = \beta|\phi\rangle_{\text{Im}}, \quad (38)$$

式中 α 为实数, β 为复数. 方程(38)的解为^[12]

$$|\phi\rangle_{\text{Im}} = N \frac{(S-m)!}{(2S)!(S+m)!} e^{e^0 S} \exp\left[\frac{\pi}{4}(S_- - S_+)\right] S_+^{S+m} |S, -S\rangle. \quad (39)$$

N 为归一化系数, $e^0 = \left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}$, 这是电子-空穴对 $SU(2)$ 李代数生成元的理想态和最小测不准态, 在此态上生成元有较小的量子噪声.

若 $\Delta S_1^2 < \frac{1}{2} |\langle S_3 \rangle|$, 则称 S_1 分量被压缩, 对应的态称为 $SU(2)$ 压缩态. 对 S_2 分量有类似的情况. 由(33)和(34)式得 S_1 分量被压缩的条件为

$$1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi < |\cos \theta|. \quad (40)$$

当 $\varphi = 0$ 时, 无论 θ 取何值, S_1 分量都被压缩, 当 $\theta = \pi/3$ 时, S_1 分量的压缩效应最大.

在 Dicke 态上有

$$\Delta S_1^2 = \frac{1}{2} [S(S+1) - m^2], \quad \Delta S_2^2 = \frac{1}{2} [S(S+1) - m^2], \quad \langle S_3 \rangle = m. \quad (41)$$

当 $m = \pm S$ 时, S_1 和 S_2 分量的量子噪声最小, 因 $|m| \leq S$, 不难证明在 Dicke 态上, S_1 和 S_2 分量无压缩效应.

利用生成函数^[14]可计算出态 $|\theta, \varphi\rangle$ 上的二阶相干函数

$$g_r^{(2)} = \frac{\langle S_+ S_+ S_- S_- \rangle}{|\langle S_+ S_- \rangle|^2} = \frac{2S-1}{S} \frac{\tan^2 \frac{\theta}{2} + (2S-1) \tan^2 \frac{\theta}{2} + S(S-1)}{\left(\tan^2 \frac{\theta}{2} + 2S\right)^2}. \quad (42)$$

对单个电子-空穴对(单个晶体原胞), $S = \frac{1}{2}$, $g_r^{(2)} = 0$, 电子-空穴对有反聚束效应; 当 $S \gg 1$ 时, $g_r^{(2)} \approx 1$, 电子-空穴对具有相干性.

在 Dicke 态上

$$g_D^{(2)} = 1 + \frac{2(m-1)}{(S+m)(S-m+1)}. \quad (43)$$

可以看出, $m < 0$ 时, $g_D^{(2)} < 1$, 电子-空穴对有反聚束效应. 对全激发态 $\left|\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right\rangle$, $g_D^{(2)} = 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)$, 当 $N \gg 1$ 时, $g_D^{(2)} \approx 2$, 电子-空穴对有聚束效应; 对 Dicke 超辐射态 $\left|\frac{N}{2}, 0\right\rangle$, $g_D^{(2)} = 1 - 8/N(N+2)$, 电子-空穴对有弱的反聚束效应. 从上面的讨论可以看出, 在一定的 $SU(2)$ 相干态和 Dicke 态上, 电子-空穴对具有压缩效应和反聚束效应. 下面讨论实现态 $|\tau\rangle$ 和 $|S, m\rangle$ 的可能性.

在强光相干激发下, 且激发场作经典场处理, 相互作用哈氏量为 (见附录 (A.11) 式)

$$H = \Delta S_z + i\lambda(S_- - S_+). \quad (44)$$

薛定谔方程为

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\phi\rangle = H |\phi\rangle. \quad (45)$$

设激发时刻 $t = 0$ 时, 电子-空穴对处在基态 $|S, -S\rangle$. 因是相干激发, 即激发脉宽小于电子-空穴对的横向和纵向弛豫时间, (45) 式有形式瞬态解

$$|\phi\rangle = \exp[-i\Delta S_z + \lambda t(S_- - S_+)] |S, -S\rangle. \quad (46)$$

由分解定理^[33], (46) 式可写为

$$|\phi\rangle = \exp\left[\frac{\theta}{2}(e^{-i\varphi}S_+ - e^{i\varphi}S_-)\right] e^{-i\Delta t S_z} |S, -S\rangle, \quad (47)$$

式中

$$\begin{aligned} \tan \frac{\theta}{2} &= -\frac{\Delta}{Q} \tan \frac{1}{2} Q t, \\ \cos \frac{\theta}{2} &= \frac{\sqrt{Q^2 + \Delta^2 \tan^2 \frac{1}{2} Q t}}{Q} \cos \frac{1}{2} Q t, \\ \tan \varphi &= \frac{\Delta}{Q} \tan \frac{1}{2} Q t, \quad Q = \sqrt{4\lambda^2 + \Delta^2}, \quad Q_0 = 2\lambda. \end{aligned} \quad (48)$$

若定义 $|S, -S'\rangle = e^{i\Delta S_z} |S, -S\rangle = e^{-i\Delta S_z} |S, -S\rangle$, 则 (47) 式即是 (29) 式. 可以看出, (44) 式形式的哈氏量可产生相干态 $|\tau\rangle$. 在共振激发时, 由 (48) 式可得 $\theta = Q_0 t$, $\varphi = 0$, 从前面的讨论知, 相干激发光脉冲面积 θ 为任意值都可产生 S_z 分量的压缩效应. 下面对共振激发的情形, 讨论处在 $SU(2)$ 压缩态的电子-空穴对复合辐射光的量子噪声.

类似玻色近似的情形, 由附录哈氏量 (A.10) 式, 利用海森堡方程可计算得

$$[\Delta X_{1a}(t)]^2 = \Delta X_{1a}^2 + \lambda^2 t^2 (\Delta S_z^2 + 2\langle S_z \rangle \Delta X_{1a}^2). \quad (49)$$

若 $t = 0$, 模 a 处在相干态, 则有

$$[\Delta X_{1a}(t)]^2 = \frac{1}{4} + \lambda^2 t^2 \left(\Delta S_1^2 + \frac{1}{2} \langle S_3 \rangle \right) \quad (50)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \lambda^2 t^2 S(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \cos \theta). \quad (51)$$

对共振激发, $\varphi = 0$, (51)式变为

$$[\Delta X_{1a}(t)]^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \lambda^2 t^2 S(\cos^2 \theta - \cos \theta). \quad (52)$$

由(52)式可以看出,在共振情况下,电子-空穴对的复合辐射光总有压缩效应,且耦合越强、激发的电子-空穴对数目越大,压缩效应越明显,当激发光脉冲面积为 $\pi/3$ 时,压缩效应最大。

超辐射 Dicke 态 $|N/2, 0\rangle$ 对应激发脉冲面积 $\theta = \pi/2$, 但此时也可能产生态 $|\theta, \varphi\rangle$ 。这在实验上不难确定究竟是哪种态,因为处在 $|N/2, 0\rangle$ 态上的电子-空穴对复合辐射时,发射光无压缩效应,而处在 $|\theta, \varphi\rangle$ 态上的电子-空穴对的复合辐射光有压缩效应。

从本节的讨论可以看出,在强激发条件下,即电子-空穴对的非玻色性必须加以考虑的情况下,电子-空穴对具有压缩效应和反聚束效应,且压缩的电子-空穴对可产生压缩的复合辐射光。

四、玻色近似和 $SU(2)$ 群的收缩

算符 E^+ , E^- , $E_3 = E^+E^-$, E_0 (单位元)满足对易关系

$$\begin{aligned} [E^+, E^-] &= -E_0, \quad [E_3, E^\pm] = \pm E^\pm, \\ [E, E_0] &= 0 \quad (\text{假定 } t_h = \text{常数}). \end{aligned} \quad (53)$$

这是谐振子李代数生成元满足的对易关系。 S 通过一个奇异变换可变成 E (见附录二),即 $SU(2)$ 群可收缩到谐振子群^[33]。显然这种收缩相当于电子-空穴对的玻色近似,这可由下列关系式看出:

$$\lim_{c \rightarrow 0} \langle \tau | c^2 S_3 | \tau \rangle = -\frac{1}{2}. \quad (54)$$

这正是(27)式捨去 $\sum_k (a_{k+q}^\dagger a_{k+q} + b_{k-h}^\dagger b_{k-h})$ 项的结果,这恰是玻色近似。第二节所讨论的所有结果都可由第三节的相应结果取极限得到,附录二给出几个例子。这种收缩的结果使电子-空穴对的压缩效应消失(复合辐射光的压缩效应也随之消失),但仍可保留反聚束效应。

五、结 论

在玻色近似下,光相干激发可产生电子-空穴对的 Glauber 相干态。处在此态上的电子-空穴对无压缩效应,“对”的复合辐射光也无压缩效应(此结论只适于单光子过程,对双光子过程将另文讨论)。在此态上电子-空穴对呈现泊松分布,二阶相干函数 $g^{(2)} = 1$, 但在 Fock 态上, $g^{(2)} < 1$, 即电子-空穴对呈现反聚束效应粒子数无起伏。当考虑了电

子-空穴对的非玻色性后,光相干激发可产生电子-空穴对的 $SU(2)$ 相干态和 $SU(2)$ 压缩态。压缩的电子-空穴对将辐射压缩光。类似于二能原子体系,可望产生电子-空穴对的超辐射 Dicke 态,在此态上电子-空穴对可具有反聚束效应,且呈现二项式分布。由于玻色近似相当于 $SU(2)$ 群到谐振子群的收缩,因此玻色近似的所有结果都可由“非玻色近似”的相应结果取极限得到。

附 录 一

体系的哈氏量

设相干激发场为

$$A = A_0 \sin(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + \varphi), \quad (\text{A.1})$$

则在单电子自洽场近似和空间平移近似下,体系的相干激发哈氏量为^[9]

$$\begin{aligned} H_c = & \sum_k [E_c(\mathbf{k} + \mathbf{q}) a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} - E_v(\mathbf{k}) b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}] \\ & + \sum_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_k i^m J_m(\eta_k) [\exp[i m(\omega t + \theta)] D_k - \exp[-i m(\omega t + \theta)] D_k^\dagger] \\ & + \sum_k \sum_{\mathbf{q}_1} V(\mathbf{q}_1) D_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_1}^\dagger D_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

式中 $g_k = \frac{e}{mc} A \cdot P_c(\mathbf{k})$ 为耦合系数; $J_m(\eta_k)$ 为 m 阶贝塞耳函数;

$$\eta_k = \frac{e}{\omega c} A_0 \cdot \left(\frac{\mathbf{k} + \mathbf{q}}{m_s} + \frac{\mathbf{k}}{m_h} \right);$$

$D_k \equiv D\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{smallmatrix}\right)$, $D_k^\dagger \equiv D^\dagger\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{smallmatrix}\right)$ 分别为电子-空穴对的湮灭和产生算符; $i = \sqrt{-1}$; 其它各量的物理意义见文献[9]。

假定在碰撞过程中电子和空穴的动量不变,则经过简单地计算,可将 H_c 的第一项和第三项合写成

$$H_0 = \sum_k \omega_k D_k^\dagger D_k, \quad (\text{A.3})$$

$$\omega_k = E_c(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E_v(\mathbf{k}) + V(\mathbf{q}).$$

假定对量子跃迁贡献最大的是基波,其它各谐波的贡献可忽略,这样体系的哈氏量可写为

$$H_c = \sum_k \omega_k D_k^\dagger D_k + i \sum_k g_k J_1(\eta_k) [\exp[i(\omega t + \theta)] D_k - \exp[-i(\omega t + \theta)] D_k^\dagger]. \quad (\text{A.4})$$

因 $|J_1(\eta_k)| < 1$, 所以载流子的带内运动使拉比频率和压缩效应变小。

设电子-空穴对复合辐射场为单模, $a^\dagger, a$ 为其产生和湮灭算符,则体系的哈氏量为

$$H_c = \omega a^\dagger a + \sum_k \omega_k D_k^\dagger D_k + i \sum_k \lambda_k (a^\dagger D_k - a D_k^\dagger). \quad (\text{A.5})$$

上式已作了旋转波近似,并设 $\hbar = 1$.

作么正变换

$$T = \exp\left[i\omega\left(a^\dagger a + \sum_k D_k^\dagger D_k\right)t\right], \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{H}_c = T H_c T^{-1} + i\dot{T} T^{-1}$$

$$= \sum_k \Delta_k D_k^\dagger D_k + i \sum_k \lambda_k (a^\dagger D_k - a D_k^\dagger), \quad (\text{A.7})$$

式中 $\Delta_k = \omega_k - \omega$ 为失谐量

假定 ω_k, λ_k 对 k 的依赖关系不大, (A.5) 式除了一个 c 数项外可写为

$$H_c = \omega a^\dagger a + \omega_0 s_3 + i\lambda(a^\dagger s_- - a s_+), \quad (\text{A.8})$$

s_3, s_+, s_- 为 $SU(2)$ 李代数的生成元(见(27), (28)式)

作么正变换

$$T = \exp[i\omega t(a^\dagger a + s_3)], \quad (\text{A.9})$$

(A.8) 式变为

$$\bar{H}_c = T H_c T^{-1} + i\dot{T} T^{-1} = \Delta S_3 + i\lambda(a^\dagger s_- - a s_+), \quad (\text{A.10})$$

对经典相干激发场 (A.10) 式为

$$\bar{H}_c = \Delta S_3 + i\lambda'(s_- - s_+). \quad (\text{A.11})$$

附 录 二

$SU(2)$ 群到谐振子群的收缩^[11,13]

让 Bloch 球的半径 r 趋于无穷大, Bloch 球上小的转动就会变成 Bloch 球南极切平面上的平移, 这导致 $SU(2)$ 群到谐振子群的收缩。本文中谐振子李代数的生成元为

$$E^+, E^-, E_3 = E^+ E^-, E_0 \quad (\text{设 } t_k = \text{常数}).$$

收缩过程可通过下列变换实现:

$$\begin{bmatrix} E^+ \\ E^- \\ E_3 \\ E_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2c^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_+ \\ S_- \\ S_3 \\ S_0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

当 $c \rightarrow 0$ 时, 变换矩阵是奇异的, 但下列对易关系是确定的:

$$[E_3, E^\pm] = \pm E^\pm, [E^+, E^-] = 2c^2 E_3 - E_0, [E, E_0] = 0. \quad (\text{A.13})$$

且有

$$\begin{aligned} E^+ &= \lim_{c \rightarrow 0} c S_+, \quad E^- = \lim_{c \rightarrow 0} c S_-, \quad E_3 = \lim_{c \rightarrow 0} \left(S_3 + \frac{1}{\partial c^2} S_0 \right), \\ \alpha &= \lim_{c \rightarrow 0} e^{-i\varphi} \theta / 2c, \quad \alpha^* = \lim_{c \rightarrow 0} e^{i\varphi} \theta / 2c, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

而

$$\lim_{c \rightarrow 0} \left(S_3 + \frac{1}{2c^2} S_0 \right) |S, -S\rangle = \lim_{c \rightarrow 0} \left(-S + \frac{1}{\partial c^2} \right) |S, -S\rangle. \quad (\text{A.15})$$

若选取基态能量为零, 有

$$\lim_{c \rightarrow 0} \left(-S + \frac{1}{\partial c^2} \right) = 0, \quad \text{即当 } c \rightarrow 0 \text{ 时有 } S = \frac{1}{2c^2}.$$

下面给出收缩的几个例子.

例 1 $S + m = n$ 一定时, 有

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} |Sm\rangle &= \lim_{c \rightarrow 0} \frac{S_+^m |S, -S\rangle}{[(2S!/(2S-n)!n!)]^{1/2}} \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \frac{(cS_+)^m |S, -S\rangle}{[(2c^2 S)^m n!]^{1/2}} = \frac{(E^+)^m}{\sqrt{n!}} |\infty, 0\rangle = |\infty, n\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

即在 $c \rightarrow 0$ 时 Dicke 态变成 Fock 态.

例 2

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \lim_{c \rightarrow 0} |\tau\rangle = (1 + |\tau|^2)^{-S} e^{\tau S_+} |S, -S\rangle \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\theta e^{-i\varphi}}{2c} \cdot \frac{\theta e^{i\varphi}}{2c} 2c^2 \right)^{-1/2} e^{\frac{\theta}{2c} e^{-i\varphi} c S_+} |S, -S\rangle \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \alpha^* 2c^2 \right)^{-1/2} e^{\alpha E^+} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2} |\alpha|^2} e^{\alpha E^+} |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

例 3 在 $c \rightarrow 0$ 时, 电子-空穴对的二项式分布变成泊松分布

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} |\langle sm | \tau \rangle|^2 &= \lim_{c \rightarrow 0} \frac{(2cs)^n}{n!} \cdot |\alpha|^{2n} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \alpha^* 2c^2\right)^{-1/c^2} \\ &= \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle} = |\langle n | \psi \rangle|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

用同样的方法可证明下列关系:

$$\begin{aligned} E^+ E^- |n\rangle &= \lim_{c \rightarrow 0} \left(s_3 + \frac{1}{2c^2}\right) |s, m\rangle \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} |s, m\rangle \left[(s+m) + \left(-s + \frac{1}{2c^2}\right)\right] \\ &= n |n\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\langle \psi | F^+ E^- | \psi \rangle = \lim_{c \rightarrow 0} \langle \tau | c s_+ c s_- | \tau \rangle = |\alpha|^2, \quad (\text{A.20})$$

$$\langle \psi | E^+ E^- | \psi \rangle = \langle \psi | E_3 | \psi \rangle = \lim_{c \rightarrow 0} \left\langle \tau \left| 2 \left(s_3 + \frac{1}{2c^2}\right) | \tau \right\rangle = |\alpha|^2. \quad (\text{A.21})$$

- [1] Special Issue Squeezed Light, ed. by R. Loudon and P. L. Knight *J. Mod. Opt.*, **34**(1987), Nos. 6/7.
- [2] Feature Editors: H. J. Kimble and D. F. Walls, Squeezed States of Electromagnetic Field, *J. Opt. Soc. Am.*, **B4**(1987), No. 10.
- [3] S. F. Friberg and L. Mandel, *Opt. Commun.*, **46**(1983), 141.
- [4] M. A. Dupertuis, S. M. Barnett and S. Stenholm, *J. Opt. Soc. Am.*, **B4**(1987), 1102; 1124.
- [5] D. T. Pegg and J. A. Vaccaro, *Opt. Commun.*, **61**(1987), 317.
- [6] S. M. Barnett, *Opt. Commun.*, **61**(1987), 432; *Phys. Rev.*, **A35**(1987), 2567.
- [7] S. M. Barnett, M. A. Dupertuis, *J. Opt. Soc. Am.*, **B4**(1987), 505.
- [8] K. Wodkiewicz and J. H. Eberly, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**(1985), 458.
- [9] 甘子钊、杨国栋, 物理学报, **30**(1981), 878; 1041.
- [10] L. A. Lugiato, in *Progress in Optics*, XX1, Edited by E. Wolf, North-Holland Physics Publishing, (1984), p. 178.
- [11] F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore and H. Thomas, *Phys. Rev.*, **A6**(1972), 2211.
- [12] M. A. Rashid, *J. Math. Phys.*, **19**(1978), 1391.
- [13] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*, Chap. 10, John Wiley & Sons, Inc. (1974).

COHERENT STATES, SQUEEZED FLUCTUATION, AND RECOMBINATION RADIATION OF ELECTRON-HOLE PAIRS IN SEMICONDUCTOR

HUANG HONG-BIN

Department of Physics and Chemistry, Southeast University

(Received 17 June 1988)

ABSTRACT

The production of Bose approximation coherent states and $SU(2)$ coherent states of electron-hole pairs in semiconductor generated by coherent light excitation are discussed. Squeezed fluctuation and recombination radiation of electron-hole pairs are studied for these two cases. The second order coherence and distribution functions of electron-hole pairs are given. It is shown that the Bose approximation corresponds to the contraction of group $SU(2)$ to the harmonic-oscillator group.