

双光子 Jaynes-Cummings 模型中原子的压缩效应

周 鹏 彭 金 生

华中师范大学物理系

1989 年 1 月 27 日收到

本文采用时间演化算符研究了双光子 Jaynes-Cummings 模型态矢随时间变化的规律,讨论了原子的统计特性,揭示了原子的压缩效应。

光场的压缩效应,不仅反映了光场的一类非经典特征,而且在光通讯和引力波检测等方面具有潜在的应用,一直受到人们普遍关注^[1,2]。由于 Jaynes-Cummings 模型(以下简称 J-C 模型)^[3]是反映光与物质相互作用的理想模型,关于 J-C 模型中光场的压缩性已被广泛地研究^[4-6];特别是首次在实验上观测到单原子微波激射(Maser)中的量子衰变和恢复现象^[7]以后,使得这种研究不再仅仅具有学术上的意义,而且具有实际意义。近年来,人们已分别研究了单光子 J-C 模型^[4],双光子 J-C 模型^[5],和多光子 J-C 模型^[6]中辐射场的压缩特性,进一步揭示了原子与光场相互作用的量子特征。然而,关于 J-C 模型中原子是否也具有压缩效应呢?这便是本文要讨论的问题。

本文采用时间演化算符方法,研究了相干光场与二能级原子的双光子相互作用 J-C 模型态矢随时间变化的规律,讨论了原子的统计行为,结果发现原子确实存在有压缩效应。

描述光场与二能级原子的双光子相互作用 J-C 模型的 Hamiltonian,在旋波近似下可表为

$$H = \omega a^+ a + \omega_0 s_3 + \varepsilon(a^2 s_+ + a^+ s_-) \quad (\hbar = 1), \quad (1)$$

式中算符 a^+ 和 a 表示频率为 ω 的光子的产生和湮灭算符; ε 是光场与原子的耦合常数; s_3 , s_+ 和 s_- 是表征本征频率为 ω_0 的二能级原子的赝自旋算符,当取其基态和激发态的态矢为

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

时, s_3 , s_+ 和 s_- 可表成

$$s_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

利用(1)和(3)式,经过简单运算,不难看出时间演化算符 $u(t)$ 可以表示为

$$u(t) = e^{-iHt} = \begin{pmatrix} \exp[-i\omega(a^\dagger a + 1)t] \cdot \left(\cos\sqrt{A}t - i\frac{\delta\omega}{2} \frac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}} \right), \\ -i\varepsilon \exp[-i\omega(a^\dagger a - 1)t] \cdot a^{+2} \frac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}}, \\ -i\varepsilon \exp[-i\omega(a^\dagger a + 1)t] \cdot a^2 \frac{\sin\sqrt{B}t}{\sqrt{B}}, \\ \exp[-i\omega(a^\dagger a - 1)t] \cdot \left(\cos\sqrt{B}t + i\frac{\delta\omega}{2} \frac{\sin\sqrt{B}t}{\sqrt{B}} \right) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

这里 $A = \left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2 a^2 a^{+2}$; $B = \left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2 a^{+2} a^2$; $\delta\omega = \omega_0 - 2\omega$ (失谐量).

如果初始时刻原子处于基态 $|1\rangle$; 光场为相干光场 $|\alpha\rangle$,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (5)$$

式中 $\alpha = \bar{n}^{1/2} e^{i\varphi}$; $\bar{n}$ 是平均光子数, φ 是 α 的位相角, 可取任意值, 则系统初始时刻的态矢 $|\varphi(0)\rangle$ 为

$$|\varphi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ |\alpha\rangle \end{pmatrix}. \quad (6)$$

为了解系统随时间的演化情况, 可以利用(4)和(6)式, 找出任意时刻系统态矢 $|\varphi(t)\rangle$ 的变化规律,

$$|\varphi(t)\rangle = e^{-iHt} |\varphi(0)\rangle = \begin{pmatrix} -i\varepsilon e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp[-i\omega(n-1)t] \\ \cdot \sqrt{n(n-1)} \frac{\sin\sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2 n(n-1)}t}{\sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2 n(n-1)}} |n-2\rangle \\ e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp[-i\omega(n-1)t] \\ \cdot \left(\cos\sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2 n(n-1)}t + i\frac{\delta\omega}{2} \frac{\sin\sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2 n(n-1)}t}{\sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2 n(n-1)}} \right) |n\rangle \end{pmatrix}. \quad (7)$$

这样反映原子动力学行为的能级算符 s_3 的期待值可求得

$$\begin{aligned} \langle s_3 \rangle &= \langle \varphi(t) | s_3 | \varphi(t) \rangle \\ &= -\frac{1}{2} e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\cos\sqrt{(\delta\omega)^2 + 4\varepsilon^2 n(n-1)}t \right. \\ &\quad \left. + (\delta\omega)^2 \frac{1 - \cos\sqrt{(\delta\omega)^2 + 4\varepsilon^2 n(n-1)}t}{(\delta\omega)^2 + 4\varepsilon^2 n(n-1)} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

这一结论与文献[8]是一致的。在一定条件下,原子的振荡呈现周期性的衰减和恢复。

为讨论原子的压缩特性,定义两个相位正交的原子算符 s_1 和 s_2 ,

$$s_1 \equiv \frac{1}{2} (s_+ + s_-) = \begin{pmatrix} 0, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$s_2 \equiv \frac{1}{2i} (s_+ - s_-) = \begin{pmatrix} 0, & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2}, & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

不难证明

$$s_1^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}, & 0 \\ 0, & \frac{1}{4} \end{pmatrix}; \quad s_2^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}, & 0 \\ 0, & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$[s_1, s_2] = i s_3. \quad (12)$$

若原子有压缩效应存在,则要求

$$\langle (\Delta s_1)^2 \rangle < \frac{1}{2} |\langle s_3 \rangle| \quad (13)$$

或者

$$\langle (\Delta s_2)^2 \rangle < \frac{1}{2} |\langle s_3 \rangle|. \quad (14)$$

这里

$$\langle (\Delta s_i)^2 \rangle = \langle s_i^2 \rangle - \langle s_i \rangle^2 \quad (i = 1, 2) \quad (15)$$

是原子算符 $s_i (i = 1, 2)$ 的均方涨落。根据态矢(7)式,不难求出

$$\langle s_1 \rangle = \langle \varphi(t) | s_1 | \varphi(t) \rangle$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\varepsilon}{2} e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(n+1)}}{n!} \frac{\sin \sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2(n+1)(n+2)} t}{\sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2(n+1)(n+2)}} \\ &\quad \cdot \left((\delta\omega) \frac{\sin \sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2 n(n-1)} t}{\sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2 n(n-1)}} \cos 2(\omega t - \varphi) \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2 n(n-1)} t \sin 2(\omega t - \varphi) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\langle s_1^2 \rangle = \frac{1}{4}, \quad (17)$$

$$\langle s_2 \rangle = -\frac{\varepsilon}{2} e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n+1}}{n!} \frac{\sin \sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2(n+1)(n+2)} t}{\sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2(n+1)(n+2)}} \cdot \left((\delta\omega) \frac{\sin \sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2 n(n-1)} t}{\sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2 n(n-1)}} \right. \\ \left. \cdot \sin 2(\omega t - \varphi) - 2 \cos \sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 + \varepsilon^2 n(n-1)} t \cos 2(\omega t - \varphi) \right), \quad (18)$$

$$\langle s_2^2 \rangle = \frac{1}{4}. \quad (19)$$

由 (15)–(19) 式不难看出, 原子的涨落与时间 t 和场参数有关. 为方便起见, 取 $\varphi = \omega t$, 并引入

$$F_i = \langle (\Delta s_i)^2 \rangle - \frac{1}{2} |\langle s_i \rangle| \quad (i = 1, 2). \quad (20)$$

借助于数值解, 可以形象地展示原子的压缩行为, 结果发现: 不论是在共振 ($\delta\omega = 0$) 情况下, 还是在非共振 ($\delta\omega = \varepsilon = 0.2$) 情况下, F_1 均大于零. 表明原子的 s_1 分量不出现压缩; 然而在这两种情况下, F_2 在开始较短的时间内都小于零, 表明原子的 s_2 分量初始出现压缩效应, 如图 1 和 2 所示.

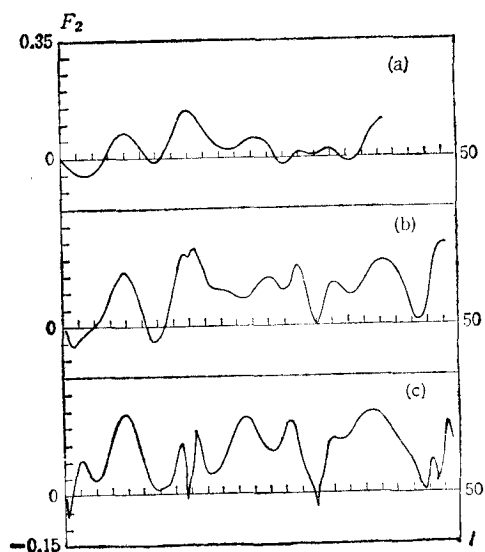


图 1 $\delta\omega = 0, \varepsilon = 0.2$. (a) $\bar{n} = 1.12$, (b) $\bar{n} = 2$, (c) $\bar{n} = 5$

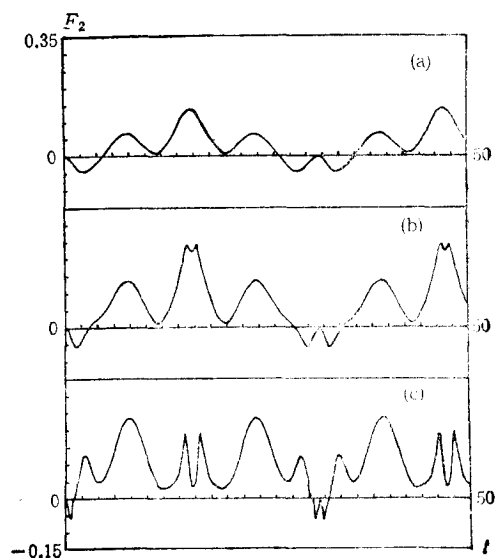


图 2 $\delta\omega = \varepsilon = 0.2$. (a) $\bar{n} = 1.12$, (b) $\bar{n} = 2$, (c) $\bar{n} = 5$

从图 1 和图 2, 可以进一步看出, 在共振和非共振情况下, s_2 分量都出现多次压缩, 且

随着入射光场平均光子数 $\bar{n}$ 的增加, 初始压缩时间变短。不同的是在共振情况下(如图 1), 原子 (s_2 分量) 的压缩具有比较复杂的形式, 而在非共振 ($\delta\omega = s = 0.2$) 情况下(如图 2), 原子 (s_2 分量) 的压缩具有明显的周期性, 且这种周期性与平均光子数 $\bar{n}$ 无关。平均光子数 $\bar{n}$ 只影响压缩时间; 对于一定的平均光子数 $\bar{n}$ 而言, 每次压缩的时间相同。

总之, 本文研究了共振和非共振情况下, 双光子 J-C 模型中原子的涨落行为, 得到了原子也具有压缩效应的新结论。

- [1] D. W. Walls, *Nature*, 306(1983), 141.
- [2] Ling-An Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall and Hui-Fa Wu, *Phys. Rev. Lett.*, 57(1986), 2520.
- [3] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, 51(1963), 89.
- [4] P. Meystre and M. S. Zubairy, *Phys. Lett.*, 89A(1982), 390.
- [5] G. Compagno, Jin-Sheng Peng and F. Persico, *Opt. Commun.*, 57(1986), 415.
- [6] A. S. Shumovsky, Fam-Le Kien and E. I. Aliskenderov, *Phys. Lett.*, 124A(1987), 351.
- [7] G. Rempe, H. Walther and N. Klein, *Phys. Rev. Lett.*, 58(1987), 353.
- [8] 彭金生、黄湘友, 光学学报, 8(1988), 756.

ATOMIC SQUEEZING EFFECTS IN THE TWO-PHOTON JAYNES-CUMMINGS MODEL

ZHOU PENG PENG JIN-SHENG

Department of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan

(Received 27 January 1989)

ABSTRACT

The laws with which the state vector of the two-photon Jaynes-Cummings model varies with the time are studied by means of the time-evolution operator. The statistical properties of atoms are discussed. The atomic squeezing effects are revealed.