

n 分量 φ^4 模型薄膜的尺寸效应

邹 南 之

(中山大学物理系, 材料科学研究所)

龚 昌 德

(南京大学物理系, 理论物理中心)

1988年5月30日收到

我们用场论重整化群方法讨论了周期边界的 n 分量 φ^4 模型薄膜的单纯尺寸效应, 发现仅当维数满足 $d_c + 1 < d < d_c$ 时尺寸效应具有 Fisher 的标度形式, 其他情况下它是不可标度的. 同时也讨论了维数渡越现象及状态方程.

一、引 言

可标度性是连续相变现象中一个重要概念. 它描述了连续相变的基本特征. 60年代提出的无限大系统的标度理论成功地解释了很多实验结果^[1-3]. 但实际系统与理想的无限大系统并不一致, 它有一定的尺寸, 存在表面、界面. 随着实验精度的提高及理论方法发展的需要, 这些因素对系统相变行为的影响成为很有意义的课题, 其中有限尺寸系统中的标度理论更引人注目.

可以把有限尺寸系统分成两类: 一类系统不存在奇异性, 如 L^d (系统边长都为 L) 及 $L^{d-1} \times \infty$ (系统有一个方向无限延伸, 其他方向边长为 L); 另一类系统有相变发生, 如 $L \times \infty^{d-1}$ 等. Fisher 等人首先提出了第一类有限系统的标度理论^[4-6]. 他们认为在有限尺寸系统中, 除了相干长度 ξ_∞ 外, 还有另一个对相变行为有影响的长度量 L . 温度 T 远离相变点 T_c , $\xi_\infty \ll L$, 体系的行为与无限延伸的系统一致. 只有当温度 T 足够靠近 T_c , ξ_∞ 可以与 L 比拟时, 尺寸效应才表现出来, 物理量的奇异性消失. 第一类系统的自由能密度可以写为

$$f^{(s)}(L, h, T) = A_1 |t|^{2-\alpha} W_\tau^\pm(A_2 h |t|^{-\Delta}, L/\xi_\infty), \quad (1)$$

式中 $t = (T - T_c)/T_c$ 为约化温度; h 为约化磁场; $W_\tau^\pm$ 为依赖普适类及边界条件的普适函数, τ 代表边界类型; A_1, A_2 为两个非普适因子; $\xi_\infty = c_0 |t|^{-\nu_d}$. 通过一些解析运算, (1)式化为^[6]

$$f^{(s)}(L, h, T) = L^{-d} Y_\tau^\pm(c_1 t L^{1/\nu_d}, c_2 h L^{\Delta/\nu_d}). \quad (2)$$

$h = 0$ 时, 物理量 $Y(L, T)$ 的标度形式为

$$Y(L, T) = L^\omega X_\tau(t L^{1/\nu_d}) \quad (3)$$

或记为

$$\frac{Y(L, T)}{Y_\infty(T)} = f_\tau(t L^{1/\nu_d}). \quad (4)$$

这就是一种有限标度理论, f_c 与边界条件有关. Nightingale 等人利用(4)式发展了一种计算无限大系统临界指数的方法^[8-12].

对于第二类系统, 有限尺寸系统的相变温度 $T_c(L)$ 相对于无限大系统相变温度 T_c 有一个偏移, 令

$$\varepsilon(L) = \frac{T_c(L) - T_c}{T_c} \propto b/L^\lambda. \quad (5)$$

理想玻色流体和铁磁球模型的计算结果表明^[9], 周期边界条件 $\lambda = d - 2$, 自由边界条件 $\lambda = 1$. 自由边界条件的二维正方 Ising 模型严格解得到 $\lambda = 1/\nu_d$ ^[13]. 用级数展开的方法计算 $d = 3$ 的 Ising 模型^[14], 结果是周期边界 $\lambda = 2 \neq d - 2$, 自由边界 $\lambda = 1/\nu_d = 1.56$. Domb^[15] 提出一个普遍公式: 周期边界 $\lambda = d - 2 + \eta$, 自由边界 $\lambda = 1/\nu_d$.

对于第二类系统, 如果用新的约化温度 $t = (T - T_c(L))/T = t - \varepsilon(L)$ 代替 t , 对应写出有限标度形式为

$$f^{(n)}(L, h, T) = L^{-d} Y_\pm^\dagger(c_1 t L^{1/\nu_d}, c_2 h L^{d/\nu_d}). \quad (6)$$

$h = 0$ 时, 有物理量 $Y(L, T)$ 的标度形式为^[9]

$$Y(L, T) = L^\sigma X^\dagger(t L^{1/\nu_d}). \quad (7)$$

利用(6), (7)两式还可以得到表面临界指数的标度律^[5,7]. Suzuki^[16] 和 Privman 等人^[6] 利用了重整化群 Wilson 表述证明在周期条件下第一类系统的标度形式(2)、(3)式成立. Brèzin^[17] 用场论方法简单讨论了在周期性边界下(4)式的正确式. 提出只有 d 小于上临界维数 d_+ , (4)式才可能成立. 在本文我们发现对第二类系统的 φ^4 模型, 只有维数满足 $d_- + 1 < d < d_+$, Fisher 有限标度理论才成立(d_- 为下临界维数), 并讨论了维数渡越现象, 同时还给出了各种顶角及状态方程的标度形式.

$L \times \infty^{d-1}$ φ^4 模型在 $d - 1$ 维方向无穷延伸, 在一个方向有限, 尺寸为 L . 我们在这个方向取了周期条件, 这样系统表现出单纯尺寸效应, 可以方便地讨论热力学量尺寸效应的标度形式. 设系统的哈密顿量为

$$\mathcal{H} = \beta H = \sum_{\mathbf{r}, \alpha} \frac{1}{2} \nabla_\alpha \varphi_{\mathbf{r}} \nabla_\alpha \varphi_{\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{r}} \left(\frac{\gamma_0}{2} \varphi_{\mathbf{r}}^2 + \frac{u_0}{4!} \varphi_{\mathbf{r}}^4 \right), \quad (8)$$

式中 $\nabla_\alpha \varphi_{\mathbf{r}} = \varphi_{\mathbf{r}+\mathbf{a}} - \varphi_{\mathbf{r}}$, $\mathbf{r}$ 为格点位置, α 取近邻格点, φ 为 n 分量场, 晶格间隔 $a_0 = 1$.

二、系统相变温度

在相变点, φ 场的质量被重整化为零. 选择哈密顿量的自由项及相互作用项分别为

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{r}, \alpha} \frac{1}{2} \nabla_\alpha \varphi_{\mathbf{r}} \nabla_\alpha \varphi_{\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{r}} \frac{\gamma_0}{2} \varphi_{\mathbf{r}}^2, \quad (9)$$

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{\mathbf{r}} \frac{u_0}{4!} \varphi_{\mathbf{r}}^4. \quad (10)$$

由传播子 Dyson 方程

$$G_0^{-1}(\mathbf{k}) = G_0^{-1}(\mathbf{k}) - \Sigma(\mathbf{k}), \quad (11)$$

在相变点的零质量条件 $G^{-1}(0) = 0$ 等价于

$$\gamma_{0c} = \Sigma(0), \quad (12)$$

准到单圈近似

$$\Sigma(0) = -\frac{n+2}{6} u_0 \frac{1}{L} \sum_{k_{\perp}} \int \frac{d^{d-1} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} G(k), \quad (13)$$

式中 $k_{\perp}$ 对应系统边长为 L 的维度, 求和反映了 $k_{\perp}$ 分立取值. 利用 Poisson 公式^[17]

$$\frac{1}{L} \sum_{p=0}^{L-1} f(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dq}{(2\pi)} f(q) e^{iqnL}, \quad (14)$$

式中 $q = \frac{2\pi}{L} p$, p 为整数. (13) 式可化为

$$\Sigma(0) = -\frac{n+2}{6} u_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} G(k) e^{ik_{\perp} nL}$$

即

$$\gamma_{0c}(L) = \gamma_{0c}(\infty) - \frac{n+2}{6} u_0 K_{d-1} \sum_{n=1}^{\infty} \int k_{\parallel}^{d-3} e^{-nLk_{\parallel}} dk_{\parallel}. \quad (15)$$

$d > 3$, 相变点相对无限大系统相变点 T_c 的偏移

$$\Delta T_c(L) = -\frac{n+2}{6} u_0 K_{d-1} \frac{1}{L^{d-2}} \int_0^{\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel}^{d-3} \frac{e^{-k_{\parallel}}}{1 - e^{-k_{\parallel}}} \propto \frac{1}{L^{d-2}}. \quad (16)$$

上式表明由于尺寸效应破坏了大范围关联, 总有 $T_c(L) < T_c$. 另外, 从上面结果亦得到: $\lambda = d - 2$, 由于单圈近似下 $\eta = 0$, 这个结果与 Domb 的公式并不矛盾. 当 $d = 3$, $\gamma_{0c}(L)$ 发散, 说明 $d = 3$ 时 $L \times \infty$ n 分量 φ^4 模型的 Goldstone 模涨落破坏长程序, 因为系统本质上是二维, 正好是 n 分量 φ^4 模型的下临界维数.

三、 $T > T_c(L)$ 的热力学顶角标度形式

为了用无质量场论处理问题, 把(8)式改写为

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_r \frac{1}{2} \nabla_a \varphi_r \nabla_a \varphi_r + \sum_r \frac{\gamma_{0c}}{2} \varphi_r^4 + \sum_r g_0 \Lambda^{4-d} \varphi_r^4 \\ & + \sum_r \frac{\gamma_0 - \gamma_{0c}}{2} \varphi_r^4, \end{aligned} \quad (17)$$

式中取了 $u_0 = g_0 \Lambda^{4-d}$, g_0 为无量纲. 定义无质量场顶角

$$\Gamma^{(N,L)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N; \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_L) = \langle \varphi(\mathbf{p}_1) \cdots \varphi(\mathbf{p}_N) \theta(\mathbf{q}_1) \cdots \theta(\mathbf{q}_L) \rangle_{r_0=r_{0c}}, \quad (18)$$

式中

$$\theta(r) = \varphi_r^2; \quad \theta(q) = \sum_k \varphi(k) \varphi(k - q). \quad (19)$$

这类顶角重整化过程需要把场量 φ , 及复合算子 θ_r , 同时重整化^[18]

$$\varphi_R = Z^{-1/2} \varphi; \quad \theta_R = Z_{\theta}(\varphi_R)^2 = \frac{Z_{\theta}}{Z} \varphi^2. \quad (20)$$

重整化顶角

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(N,L)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N; \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_L, g, \mu) \\ = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_{(2)}^L Z^{N/2} \Gamma^{(N,L)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N; \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_L), \end{aligned} \quad (21)$$

式中 g 为重整化耦合常数, μ 为重整化点, 重整化条件^[18]

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(2,0)}(\mathbf{p}, g, \mu) \Big|_{p^2=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial(p^2)} \Gamma_R^{(2,0)}(\mathbf{p}, g, \mu) \Big|_{p^2=\mu^2} = 1, \\ \Gamma_R^{(4,0)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, g, \mu) \Big|_{s.p.} = g\mu^e, \quad \Gamma_R^{(2,1)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}, g, \\ \mu) \Big|_{s.p.} = 1, \quad \Gamma_R^{(0,2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, g, \mu) \Big|_{q^2=\mu^2} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

把(17)式写成重整化场量的形式

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \sum_{\mathbf{r}} \frac{Z}{2} \nabla_{\alpha} \varphi_{R\mathbf{r}} \nabla_{\alpha} \varphi_{R\mathbf{r}} + g_0 \Lambda^{4-d} \sum_{\mathbf{r}} \frac{Z^2}{4!} \varphi_{R\mathbf{r}}^4 \\ + \frac{\gamma_{0c}}{2} \sum_{\mathbf{r}} Z \varphi_{R\mathbf{r}}^2 + \sum_{\mathbf{r}} i \frac{Z_{(2)}}{2} \varphi_{R\mathbf{r}}^2, \end{aligned} \quad (23)$$

式中 $i = (\gamma_0 - \gamma_{0c})Z/Z_{(2)}$ 为约化温度, 当它不为零, 所对应的场论是有质量的, 但重整化群方程把含温度项度 $\Gamma_R^{(N,0)}(\mathbf{p}_i, g, i, \mu)$ 与零质量场论联系起来^[19]

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + W \frac{\partial}{\partial g} - \frac{N}{2} \eta - \hat{\eta} i \frac{\partial}{\partial i} \right] \Gamma_R^{(N,0)}(\mathbf{p}_i, g, i, \mu) = 0, \quad (24)$$

式中

$$\begin{aligned} W = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g \Big|_{\Lambda, g_0}, \quad \eta = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z \Big|_{\Lambda, g_0}, \\ \hat{\eta} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \frac{Z_{(2)}}{Z} \Big|_{\Lambda, g_0}, \end{aligned}$$

$g, Z, Z_{(2)}$ 都是零质量场的重整化常数. 对于无限大系统 $Z = Z(g_0, \Lambda/\mu)$, $Z_{(2)} = Z_{(2)}(g_0, \Lambda/\mu)$, $g = g(g_0, \Lambda/\mu)$, 由于 $\Gamma_R^{(N,0)}$ 只是 g, μ 的函数, 与 Λ 无关, 所以 $w, \eta, \hat{\eta}$ 与 Λ 无关, 只能是 g 的函数. 但 $L \times \infty^{d-1}$ 系统尺寸 L 进入重整化常数, 应有

$$Z = Z\left(g, \frac{\Lambda}{\mu}, L\mu\right), \quad Z_{(2)} = Z_{(2)}\left(g, \frac{\Lambda}{\mu}, L\mu\right).$$

因而

$$\begin{aligned} W = W(g, L\mu), \quad \eta = \eta(g, L\mu), \quad \hat{\eta} = \hat{\eta}(g, L\mu), \\ \Gamma_R^{(N,0)} = \Gamma_R^{(N,0)}(\mathbf{p}_i, g, i, \mu, L). \end{aligned}$$

方程(24)记为

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + W(g, L\mu) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{N}{2} \eta(g, L\mu) - \hat{\eta}(g, L\mu) i \frac{\partial}{\partial i} \right] \Gamma_R^{(N,0)} = 0. \quad (25)$$

令 $\mu = \lambda\mu_0$, (25)式的特征线方程为

$$\lambda \frac{dg}{d\lambda} = W(g, L\lambda\mu_0), \quad (26)$$

$$\frac{\lambda}{i} \frac{di}{d\lambda} = -\hat{\eta}[g(\lambda, L\lambda\mu_0), L\lambda\mu_0]. \quad (27)$$

定解条件

$$g(\lambda, L\lambda\mu_0) \Big|_{\lambda=1} = g; \quad i(\lambda, L\lambda\mu_0) \Big|_{\lambda=1} = i. \quad (28)$$

可解得

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\mathbf{R}}^{(N,0)}[\mathbf{p}_i, g(\lambda, L\lambda\mu_0), i(\lambda, L\lambda\mu_0), \lambda\mu_0, L] \\ &= \exp\left\{\frac{N}{2} \int_1^\lambda \eta[g(\lambda_1, L\lambda_1\mu_0), L\lambda_1\mu_0] \frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\right\} \Gamma_{\mathbf{R}}^{(N,0)}(\mathbf{p}_i, g, i, \mu_0, L). \end{aligned} \quad (29)$$

由于利用了周期边界条件,系统仍具有平移对称性,顶角满足标度变换

$$\Gamma_{\mathbf{R}}^{(N,0)}(\lambda\mathbf{p}_i, g, i, \mu_0, L) = \lambda^{\frac{d-N(d-2)}{2}} \Gamma_{\mathbf{R}}^{(N,0)}\left(\mathbf{p}_i, g, \frac{i}{\lambda^2}, \frac{\mu_0}{\lambda}, \lambda L\right). \quad (30)$$

联合(29),(30)两式,得到

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{R}}^{(N,0)}(\lambda\mathbf{p}_i, g, i, \mu_0, L) &= \lambda^{\frac{d-N(d-2)}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{N}{2} \int_1^\lambda \eta[g(\lambda_1, L\lambda_1\mu_0), L\lambda_1\mu_0] \frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\right\} \\ &\cdot \Gamma_{\mathbf{R}}^{(N,0)}\left[\mathbf{p}_i, g(\lambda, L\lambda\mu_0), \frac{i(\lambda, L\lambda\mu_0)}{\lambda^2}, \mu_0, \lambda L\right]. \end{aligned} \quad (31)$$

而(27)式可解出

$$i(\lambda, L\lambda\mu_0) = i \cdot \exp\left\{-\int_1^\lambda \eta[g(\lambda_1, L\lambda_1\mu_0), L\lambda_1\mu_0] \frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\right\}. \quad (32)$$

取重整化点 $\mu_0 = 1$, 如果令 $\mathbf{p}_i = 0$, 得到有限尺寸系统顶角标度

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{R}}^{(N,0)}(g, i, L) &= \lambda^{\frac{d-N(d-2)}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{N}{2} \int_1^\lambda \eta[g(\lambda_1, L\lambda_1), L\lambda_1] \frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\right\} \\ &\cdot \Gamma_{\mathbf{R}}^{(N,0)}\left[g(\lambda, L\lambda), \frac{i(\lambda, L\lambda)}{\lambda^2}, \lambda L\right]. \end{aligned} \quad (33)$$

下面准到单圈近似求重整化常数. 在单圈近似下,场量 φ 不需要重整化, $Z = 1$. 四端顶角近似为

$$\Gamma^{(4,0)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4, g_0, \Lambda) = g_0 \Lambda^6 - \frac{n+8}{6} g_0^2 \Lambda^{2s} B(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} B(\mathbf{p}) &= \frac{1}{L^d} \sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}) G(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \\ &= \int^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(\mathbf{k} + \mathbf{p})^2} + \sum_{\substack{\mathbf{k}=-\infty \\ \neq 0}}^{\infty} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p} L}}{k^2(\mathbf{k} + \mathbf{p})^2}, \end{aligned}$$

并且 $\varepsilon = 4 - d$.

$B(\mathbf{p})$ 中第一个积分为^[19]

$$B_1(\mathbf{p}) = \int^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(\mathbf{k} + \mathbf{p})^2} = \frac{\Lambda^{-\varepsilon}}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{p}; \quad (35)$$

第二个积分近似为

$$B_2(\mathbf{p}) = \sum_{\substack{\mathbf{k}=-\infty \\ \neq 0}}^{\infty} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p} L}}{k^2(\mathbf{k} + \mathbf{p})^2} \approx P^{-\varepsilon} \bar{B}_2(LP), \quad (36)$$

其中

$$\bar{B}_2(x) = \frac{1}{4} \int \frac{d^{d-1}k_{||}}{(2\pi)^{d-1}} \int_{-1/2}^0 du \frac{1}{\left[k_{||}^2 + \left(\frac{1}{4} - u^2\right)\right]^{3/2}} \times \frac{\cos[x(u + 1/2)/\sqrt{d}] - \exp\left\{-x\left[k_{||}^2 + \left(\frac{1}{4} - u^2\right)\right]^{1/2}\right\}}{\text{ch}\left\{\left[k_{||}^2 + \left(\frac{1}{4} - u^2\right)\right]^{1/2}x\right\} - \cos\left[\frac{(u + 1/2)x}{\sqrt{d}}\right]}. \quad (37)$$

所以

$$\Gamma^{(4,0)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4, g_0, \Lambda) = g_0 \Lambda^8 - \frac{n+8}{6} g_0^2 \Lambda^{28} [B_1(|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|) + |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|^{-6} \bar{B}_2(L|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|)]. \quad (38)$$

另外,在单圈近似下,有

$$\Gamma^{(2,1)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{g}, g_0, \Lambda) = 1 - \frac{n+2}{6} g_0 \Lambda^6 B(\mathbf{q}).$$

最后,由重整化条件可以得到

$$W(g, L\lambda) = -\varepsilon g + \frac{n+8}{6} g^2 \left[\frac{1}{8\pi^2} + \varepsilon \bar{B}_2\left(\frac{2L\lambda}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2L\lambda}{\sqrt{3}} \frac{d\bar{B}_2(x)}{dx} \Big|_{\frac{2L\lambda}{\sqrt{3}}} \right] + o(\varepsilon g^2, g^3), \quad (39)$$

$$\eta(g, L\lambda) = -\frac{g}{2} \left[\frac{1}{8\pi^2} + \varepsilon \bar{B}_2\left(\frac{2L\lambda}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2L\lambda}{\sqrt{3}} \frac{d\bar{B}_2(x)}{dx} \Big|_{\frac{2L\lambda}{\sqrt{3}}} \right] + o(g^2), \quad (40)$$

$$\eta = o(\varepsilon^2). \quad (41)$$

在单圈近似下没有反常量纲贡献。联合(26),(27)及(32),(39),(40)式可得

$$i(\lambda, L\lambda) = i\lambda^{\frac{n+2}{n+8}\varepsilon} \left(\frac{g(\lambda, L\lambda)}{g} \right)^{n+2/(n+8)}.$$

所以重整化顶角的标度关系为

$$\Gamma_{\mathbf{R}}^{(N,0)}(g, i, L) = \lambda^{\frac{d-N(d-2)}{2}} \Gamma_{\mathbf{R}}^{(N,0)} \left[g(\lambda, L\lambda), i\lambda^{-1+\frac{n+2}{n+8}\varepsilon} \left(\frac{g(\lambda, L\lambda)}{g} \right)^{\frac{n+2}{n+8}}, L\lambda \right],$$

其中

$$\lambda \frac{dg}{d\lambda} = -\varepsilon g + \frac{3}{2} g^2 \left[\frac{1}{8\pi^2} + \varepsilon \bar{B}_2\left(\frac{2L\lambda}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2L\lambda}{\sqrt{3}} \frac{d\bar{B}_2(x)}{dx} \Big|_{\frac{2L\lambda}{\sqrt{3}}} \right], \quad (42)$$

$$g(\lambda, L\lambda)|_{\lambda=1} = g.$$

若令 $\lambda = 1/L$, 则

$$\Gamma_{\mathbf{R}}^{(N,0)}(g, i, L) = L^{\frac{N(d-2)}{2}-d} \Gamma_{\mathbf{R}}^{(N,0)} \left[g\left(\frac{1}{L}, 1\right), iL^{-1+\frac{n+2}{n+8}\varepsilon} \left(\frac{g(1/L, 1)}{g} \right)^{\frac{n+2}{n+8}}, 1 \right]. \quad (43)$$

这意味着对系统作了一个长度为 L 的重整化变换,系统由原来 $L \times \infty$ 被重整为 ∞^{d-1} 的等价系统,这个等价系统相互作用常数为 $g\left(\frac{1}{L}, 1\right)$, 温度为 $iL^{-1+\frac{n+2}{n+8}\varepsilon} \left(\frac{g(1/L, 1)}{g} \right)^{\frac{n+2}{n+8}}$. (43)

式是这两个系统之间的联系,从这个公式可以讨论 Fisher 标度理论的适用性。

1. $3 < d < 4$

$\bar{B}_2(x)$ 的积分表达式(37)收敛, $g(\lambda, L\lambda)$ 的方程在 $\lambda \sim 1/L$ 的形式近似为

$$\lambda \frac{dg}{d\lambda} = -\varepsilon g + \frac{n+8}{6} g^2 \left[\frac{1}{8\pi} + \varepsilon \bar{B}_2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d\bar{B}_2(x)}{dx} \Big|_{x=\frac{2}{\sqrt{3}}} \right]. \quad (44)$$

因为 $\varepsilon > 0$, 可以近似解出当 $L \gg 1$, 有

$$g \left(\frac{1}{L}, 1 \right) \approx \left[\frac{n+8}{48\pi^2\varepsilon} + \frac{n+8}{6\pi} \bar{B}_2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) - \frac{n+8}{3\sqrt{3}\pi\varepsilon} \frac{d\bar{B}_2(x)}{dx} \Big|_{x=\frac{2}{\sqrt{3}}} \right]^{-1}, \quad (45)$$

它与 L 无关, 记为 $\bar{g}$, 顶角

$$\Gamma_R^{(N,0)}(g, t, L) = L^{\frac{N(d-2)}{2}-d} \Gamma_R^{(N,0)} \left(\bar{g}, tL^{2-\frac{n+2}{n+8}\varepsilon} \left(\frac{\bar{g}}{g} \right)^{\frac{n+2}{n+8}}, 1 \right).$$

d 维无限大系统关联长度的临界指数

$$\nu_d = \left(2 - \frac{n+2}{n+8} \varepsilon \right)^{-1}.$$

所以

$$\Gamma_R^{(N,0)}(g, t, L) = L^{\frac{N(d-2)}{2}-d} \Gamma_R^{(N,0)} \left(\bar{g}, tL^{1/\nu_d} \left(\frac{\bar{g}}{g} \right)^{\frac{n+2}{n+8}}, 1 \right).$$

场的重整化常数 $Z = 1$, 裸顶角

$$\Gamma^{(N,0)}(g_0, t, L) = L^{\frac{N(d-2)}{2}-d} \Gamma_R^{(N,0)} \left(\bar{g}, tL^{1/\nu_d} \left(\frac{\bar{g}}{g} \right)^{\frac{n+2}{n+8}}, 1 \right). \quad (46)$$

单纯尺寸效应具有 Fisher 的标度形式. 如 $N = 0$, 顶角为自由能

$$f^{(s)} = L^{-d} f(tL^{1/\nu_d}).$$

$N = 2$, 顶角为磁化率

$$\chi^{-1} = L^{-2} \chi(tL^{1/\nu_d}).$$

2. $d = 4$

$\varepsilon = 0$, 当 $\lambda \sim 1/L$ 时方程(42)的解为

$$g(\lambda, L\lambda) \approx - \left\{ \left[\frac{n+8}{48\pi} - \frac{n+8}{9\sqrt{3}} \frac{d\bar{B}_2(x)}{dx} \Big|_{x=\frac{2}{\sqrt{3}}} \right] \ln \lambda \right\}^{-1}. \quad (47)$$

所以

$$g \left(\frac{1}{L}, 1 \right) \approx \left\{ \left[\frac{n+8}{48\pi} - \frac{n+8}{9\sqrt{3}} \frac{d\bar{B}_2(x)}{dx} \Big|_{x=\frac{2}{\sqrt{3}}} \right] \ln L \right\}^{-1},$$

记为 $g'/\ln L$, 则顶角

$$\Gamma_R^{(N,0)} = L^{\frac{N(d-2)}{2}-d} \Gamma_R^{(N,0)} \left[\frac{g'}{\ln L}, tL^{1/\nu_d} (\ln L)^{-\frac{n'}{n+8}} \left(\frac{g'}{g} \right)^{\frac{n+2}{n+8}}, 1 \right]. \quad (48)$$

$d = 4$ 为 n 分量 φ^4 模型的上临界维数 d_u , 这说明 magnetic 临界指数导致了 Fisher 的标度形式失效. 系统临界行为的尺寸效应是不可标度的.

3. $d = 3$

与相变温度的计算一样, $d = 3$ 时 Goldstone 模导致重整化常数发散, 这个模型是不可重整. 故 $d = 3$ 是周期边界 $L \times \infty^{d-1}$ n 分量 φ^4 模型的下临界维数. 与无限大系统相比, 下临界维数增加了 1: $d_c(L) = d_c + 1$. 在这个维数时必须考虑所有方向的尺寸效应. 当然对某些 $n \geq 2$ 模型(如 xy 模型)这个维数上存在另一种相变 K - T 相变, 具有复杂的标度形式.

综合起来, 对于周期边界 n 分量 φ^4 模型的 $L \times \infty^{d-1}$ 系统, 当维数 d 满足 $d_c + 1 < d < d_>$ 时, 尺寸效应才具有 Fisher 的标度形式. 不过 Ising 模型的 $L \times \infty^{d-1}$ 系统只是单分量模型, 不存在 Goldstone 模, 在下临界维数仍可存在相变, 所以当 $4 > d \geq 3$ 时, 周期边界 Ising 薄膜尺寸效应可以用 Fisher 的标度形式描述.

在 Fisher 的标度理论中, tL^{1/ν_d} 的改变会引起物理量奇异性的改变, 这个现象与有限系统临界线的改变连在一起. 以 $3 < d < 4$ 的 n 分量 φ^4 模型为例, 对于无限大系统 $\lambda \rightarrow 0$ 时重整化耦合常数 $g(\lambda) \rightarrow g^*$ (不动点), 所以系统临界行为可以分为普适类, 同一个普适类的系统, 耦合常数被重整到同一个不动点 g^* , 具有完全相同的临界行为. 有限系统 $L \times \infty^{d-1}$ 的临界线就不一样. 当 $\lambda \ll 1$ 及 $L\lambda \gg 1$, $\bar{B}_t(2L\lambda/\sqrt{3})$ 可以忽略(从 (37) 式可以看出 $x \rightarrow \infty$ 时 $\bar{B}_t(x) \rightarrow 0$), 所以 $g(\lambda, L\lambda) \approx g^*$, 系统展现出 d 维无限大系统的临界行为. 但当 λ 减小到 $\lambda \sim 1/L$, $g(\lambda, L\lambda) \approx \bar{g}$, 完全偏离了 g^* , 物理量的奇异性开始改变, 随着进一步的重整化, $g(\lambda, L\lambda)$ 将向 $d-1$ 维系统的不动点靠近, 系统临界行为表现出 d 维持性到 $d-1$ 维持性的渡越. 从这里亦可以看出 L 是一个新的相关量.

四、状态方程

前面没有考虑到外磁场存在, 本节目的是讨论外磁场存在对尺寸效应的标度形式影响. 状态方程确定磁矩 m 与外场 h 、温度 t 等物理量之间关系, 对相变点上下的温度区间都适用. 为此必须讨论磁场的影响和自发磁化, 定义磁矩 $m = \langle \varphi \rangle_h$, 则磁场 h 的重整化群方程为^[49]

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + W(g, L\mu) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} \eta(g, L\mu) \left(1 + m \frac{\partial}{\partial m} \right) - \eta(g, L\mu) t \frac{\partial}{\partial t} \right] h = 0. \quad (49)$$

用特征线方程求解上面方程并作标度变换得到^[49]

$$h(m, g, t, L) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_1^L \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} \eta[g(\lambda_1, L\lambda_1), L\lambda_1] \right\} \cdot \lambda^{(d+2)/2} h \left(\frac{m(\lambda)}{\lambda^{(d-2)/2}}, g(\lambda, L\lambda), \frac{t(\lambda, L\lambda)}{\lambda^2}, L\lambda \right), \quad (50)$$

式中 $m(\lambda, L\lambda)$ 为

$$m(\lambda, L\lambda) = m \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_1^{\lambda} \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} \eta[g(\lambda_1, L\lambda_1), L\lambda_1] \right\}.$$

在单圈近似下,

$$\eta = 0, \quad m(\lambda, L\lambda) = m, \quad t(\lambda, L\lambda) = t\lambda^{\frac{n+2}{n+8}} \left(\frac{g(\lambda, L\lambda)}{g} \right)^{\frac{n+2}{n+8}}.$$

所以

$$h(m, g, t, L) = \lambda^{(d+2)/2} h \left[\frac{m}{\lambda^{(d-2)/2}}, g(\lambda, L\lambda), t\lambda^{-1+\frac{n+2}{n+8}} \left(\frac{g(\lambda, L\lambda)}{g} \right)^{\frac{n+2}{n+8}}, L\lambda \right]. \quad (51)$$

令 $\lambda = 1/L$, 在 $3 < d < 4$ 的条件下, 得到标度关系

$$h = L^{-(d+2)/2} F(mL^{(d-2)/2}, tL^{1/\nu_d}). \quad (52)$$

这就是状态方程的标度形式。它说明即使存在磁化或温度低于相变点, 尺寸效应仍是可标度的, 并且具有 Fisher 的形式。磁化 m 与 $L^{(d-2)/2}$ 标度。

- [1] L. Kadanoff, *Physics*, **2**(1966), 263.
- [2] M. E. Fisher, The Theory of Equilibrium Critical Phenomena, Reports on Progress in Physics, Vol. XXX (1967), 615.
- [3] K. G. Wilson, *Rev. Mod. Phys.*, **47**(1975), 773.
- [4] M. E. Fisher, in Critical Phenomena, Proc. 51st Enrico Fermi Summer School, Varena, edited by M. S. Green, (1972).
- [5] M. E. Fisher, M. N. Barber, *Phys. Rev. Lett.*, **28**(1972), 1516.
- [6] V. Privman, M. E. Fisher, *Phys. Rev.*, **B30**(1984), 322.
- [7] M. N. Barber, *Phys. Rev.*, **B8**(1973), 407.
- [8] M. P. Nightingale, *Physica*, **83A**(1976), 561.
- [9] P. A. Rikold, W. Kinzel, J. D. Gunton, K. Kaski, *Phys. Rev.*, **B28**(1983), 2686.
- [10] P. M. Duxbury, J. Yeomans, P. D. Beale, *J. Phys. A*, **17**(1984), L179.
- [11] H. Blote, M. P. Nightingale, B. Derrida, *J. Phys. A*, **14**(1981), L45.
- [12] M. P. Nightingale, H. Blote, *J. Phys. A*, **16**(1983), L657.
- [13] M. N. Barber, M. E. Fisher, *Ann. Phys.*, **77**(1973), 1.
- [14] G. A. T. Allan, *Phys. Rev.*, **B1**(1971), 352.
- [15] C. Domb, *J. Phys. A*, **6**(1973), 1296.
- [16] M. Suzuki, *Prog. Theo. Phys.*, **58**(1977), 1142.
- [17] E. Brezin, *J. Physique*, **43**(1983), 15.
- [18] D. J. Amit, Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena, by McGraw-Hill, Inc., (1978).
- [19] 于渌、郝柏林等著, 统计物理学进展, 科学出版社, (1981).

SIZE EFFECT IN THE FILM OF n -VECTOR MODEL

ZOU NAN-ZHI

(Department of Physics, Institute of Material Science, Zhongshan University, Guangzhou)

GONG CHANG-DE

(Department of Physics, Center for Theoretical Physics, Nanjing University)

ABSTRACT

We have studied the size effect in the film of n -vector model with periodic boundary by using field theoretical method. It is found that when the system dimension satisfies the condition $d < +1 < d < d_>$, the size effect takes the Fisher's scaling form, in other cases, no scaling can be defined. Further more we have also discussed the dimensional crossover phenomena and state equation.