

研究简报

一种具有次近邻相互作用的 Transverse XY 模型

许伯威 唐坤发

(上海交通大学物理系)

1988年7月11日收到

本文推广 Transverse XY 模型量子链至次近邻相互作用情况,考虑哈密顿量

$$H = g \sum_n \sigma_n^z - \sum_n \left(\frac{1+\gamma}{2} \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \frac{1-\gamma}{2} \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y \right) - \lambda \sum_n \left(\frac{1+\beta}{2} \sigma_n^x \sigma_{n+2}^x + \frac{1-\beta}{2} \sigma_n^y \sigma_{n+2}^y \right).$$

当 $\beta = 0$ 以及 $\gamma \neq 0$ 时,证明在临界点附近它对应于一自由费密场,从而属伊辛普适类.

近年来共形对称理论在研究二维连续相变现象中取得了显著进展^[1,2]. 二维共形对称场论对应无限维 Virasoro 代数^[3,4]. 代数的么正表示由中心荷 c 的值所标记,而不同的 c 值对应于统计模型不同的普适类. 例如,伊辛模型对应 $c = 1/2$, 三临界伊辛模型对应 $c = 7/10$, 三态 Potts 模型对应 $c = 4/5$ 等^[2].

伊辛模型对应自由费密场^[1,2]. 在临界点附近,系统明显呈现共形对称性. 可以设想,在临界点附近各种统计模型原则上均对应某种共形对称的动力学系统,而后者则按 Virasoro 的表示来分类. 这样我们就把临界点附近的各种统计模型和共形对称场论联系在一起. 这样设想的依据是,临界现象具有标度不变性,而标度变换则是共形对称群中的一种变换.

本文考虑一种具有次近邻相互作用的量子统计模型. 证明其对应的动力学系统在一特例下亦为自由费密场,因而属伊辛普适类. 该模型的哈密顿量为

$$H = g \sum_n \sigma_n^z - \sum_n \left(\frac{1+\gamma}{2} \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \frac{1-\gamma}{2} \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y \right) - \lambda \sum_n \left(\frac{1+\beta}{2} \sigma_n^x \sigma_{n+2}^x + \frac{1-\beta}{2} \sigma_n^y \sigma_{n+2}^y \right). \quad (1)$$

这里 $\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$ 为泡利矩阵. $g, \lambda, \beta, \gamma$ 为耦合常数. 当 $\lambda = 0$ 时, (1) 式即为熟知的 Transverse XY 模型,具有 Z_2 对称性. 通过正则变换,可将该模型对角化^[6-8], 因此它的各种性质能够完全解析地研究. $g = 1$ 是系统发生伊辛相变的临界点. 一般地当 $\lambda \neq 0$ 时,系统存在次近邻相互作用,无法将其对角化. 但是当 $\beta = 0$ 时,可以证明在临界点附近模型(1)式对应于一自由费密场. 为此,引入费密子算符^[9]

$$c_n = e^{i\pi \sum_1^{n-1} \sigma_i^+ \sigma_i^-} \sigma_n^-, \quad c_n^+ = \sigma_n^+ e^{-i\pi \sum_1^{n-1} \sigma_i^+ \sigma_i^-}, \quad (2)$$

式中 $\sigma_n^\pm$ 为升降矩阵, 其逆变换为

$$\sigma_n^- = e^{-i\pi \sum_1^{n-1} c_j^\dagger c_j} c_n, \quad \sigma_n^+ = c_n^\dagger e^{i\pi \sum_1^{n-1} c_j^\dagger c_j}. \quad (3)$$

由升降算符的性质及(2),(3)式, 易证

$$\begin{aligned} \{c_n, c_n^\dagger\} &= \{\sigma_n^-, \sigma_n^+\} = 1, \\ \{c_m, c_n^\dagger\} &= 0 \quad m \neq n, \end{aligned} \quad (4)$$

以及

$$\begin{aligned} \sigma_n^+ \sigma_n^- &= c_n^\dagger c_n; \quad \sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- = c_n^\dagger c_{n+1}^\dagger; \quad \sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- = c_n^\dagger c_{n+1}; \\ \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+ &= -c_n c_{n+1}^\dagger; \quad \sigma_n^- \sigma_{n+1}^- = -c_n c_{n+1}; \\ \sigma_n^+ \sigma_{n+2}^- &= c_n^\dagger c_{n+2} - 2c_{n+1}^\dagger c_{n+1} c_n^\dagger c_{n+2}; \\ \sigma_n^- \sigma_{n+2}^+ &= c_{n+2} c_n - 2c_{n+1}^\dagger c_{n+1} c_n^\dagger c_{n+2}. \end{aligned} \quad (5)$$

经过上述变换, (1)式可写为(忽略一个常数项, 并令 $\beta = 0$)

$$\begin{aligned} H &= 2g \sum_n c_n^\dagger c_n - \sum_n (\gamma c_n^\dagger c_{n+1}^\dagger + c_n^\dagger c_{n+1} + \text{H. c.}) \\ &\quad - \lambda \sum_n (c_n^\dagger c_{n+2} - 2c_{n+1}^\dagger c_{n+1} c_n^\dagger c_{n+2} + \text{H. c.}). \end{aligned} \quad (6)$$

将费密子算符傅里叶展开^[5]

$$c_n = L^{-1/2} \sum_q e^{inq} c_q, \quad (7)$$

(6)式为

$$\begin{aligned} H &= 2g \sum_q c_q^\dagger c_q - 2i \sum_{q>0} \gamma (c_q c_{-q} - c_{-q}^\dagger c_q^\dagger) \sin q \\ &\quad - 2 \sum_q c_q^\dagger c_q \cos q - 2\lambda \sum_q c_q^\dagger c_q \cos 2q \\ &\quad + \frac{4\lambda}{L} \sum_{q, q', q''} c_{q''}^\dagger c_{-q+q'} c_{q''} c_{q'} \cos(q+q'). \end{aligned} \quad (8)$$

在临界点附近, 只有长波部分对奇异性有贡献. 取长波近似至 q 的一级项, (8)式成为

$$H = 2(g-1-\lambda) \sum_q c_q^\dagger c_q - 2i \sum_{q>0} \gamma q (c_q c_{-q} - c_{-q}^\dagger c_q^\dagger). \quad (9)$$

现引入 Majorana 实表示费密场 $\phi(x)$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= L^{-1/2} \sum_q b_q e^{iqx}; \\ b_q^\dagger &= b_{-q}; \quad c_q = e^{i\frac{\pi}{4}} b_q. \end{aligned} \quad (10)$$

易见, c_q 与 b_q 满足同样的对易关系, b_q 仍为费密算符. 由(10)式, (9)式可表示为

$$H = 2\gamma \int_0^L dx \mathcal{H}(x). \quad (11)$$

式中哈密顿密度

$$\mathcal{H}(x) = \mathcal{K} \phi^2(x) + i\phi(x) \nabla \phi(x). \quad (12)$$

这里

$$\mathcal{K} = (g - 1 - \lambda)/\gamma \quad (13)$$

为“质量”. 临界点对应于“质量”项为零, 即

$$g = 1 + \lambda. \quad (14)$$

由此给出了自由费密场共形对称动力学系统

$$\mathcal{L}(x) = i\phi(x)\nabla\phi(x). \quad (15)$$

对应的中心荷 $c = 1/2^{[11,12]}$. 因此当 $\beta = 0$ 以及 $\gamma \neq 0$ 时, 模型 (1) 式属伊辛普适类.

$\lambda = 0$ 时, 临界点条件 (14) 式成为熟知的 Transverse XY 模型的临界点; 当 $g = 0$ 时, 则成为具有次近邻相互作用的 XY 量子链的临界条件.

感谢马中骥、阎沐霖和章豫梅等教授有益的讨论. 特别感谢杨振宁教授启发性的讨论和鼓励.

- [1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.*, **B241** (1984), 333.
- [2] D. Friedan, Z. Qiu, S. H. Shenker, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1575.
- [3] M. A. Virasoro, *Phys. Rev.*, **D1** (1970), 2933.
- [4] S. Fubini, A. J. Hanson, R. Jackiw, *Phys. Rev.*, **D7**(1973), 1732.
- [5] R. A. Ferrell, *J. Stat. Phys.*, **8**(1973), 265.
- [6] S. Katsura, *Phys. Rev.*, **127**(1968), 1508.
- [7] T. Niemeyer, *Physika*, **36**(1967), 377.
- [8] E. Barouck, B. M. McCoy, *Phys. Rev.*, **A3**(1971), 786.
- [9] T. D. Schultz, D. C. Mattis, E. H. Lieb, *Rev. Mod. Phys.*, **36**(1963), 856.
- [10] P. Goddard, P. Olive, *Nucl. Phys.*, **B257**(1985), 226.

A TRANSVERSE XY MODEL WITH NEXT NEAREST NEIGHBOUR INTERACTIONS

XU BO-WEI TANG KUN-FA

(Department of Physics, Shanghai Jiaotong University)

ABSTRACT

We generalize the transverse XY model to the case with NNN interactions. The Hamiltonian is $H = g \sum_n \sigma_n^z - \sum_n \left(\frac{1+\gamma}{2} \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \frac{1-\gamma}{2} \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y \right) - \lambda \sum_n \left(\frac{1+\beta}{2} \sigma_n^x \sigma_{n+2}^x + \frac{1-\beta}{2} \sigma_n^y \sigma_{n+2}^y \right)$. It is shown that the model with $\beta = 0$ and $\gamma \neq 0$ is equivalent to the free fermion field in the vicinity of critical point, so that it belongs to the Ising universality class.