

二维随机三角点阵上三态和四态 Potts 模型的蒙特-卡罗重整化群研究*

黄五群 陈天崧 辛运伟

(南开大学物理系)

1988年6月9日收到

本文用改进的蒙特-卡罗重整化群方法对二维随机三角点阵上的三态和四态 Potts 模型进行研究,分析它们的固定点及临界指数,所得的临界指数与理论的分析值符合很好。

一、引 言

研究 Potts 模型的相结构及临界行为是统计物理、凝聚态物理中十分重要的课题。近年来 Friedan 又根据共形场论得出它的临界指数值^[1],更引起数学物理学家的普遍关注。本文用蒙特-卡罗重整化群(简称 MCRG)方法研究三态和四态 Potts 模型的临界指数。

实空间重整化群方法是研究多自由度统计系统及格点规范模型的长程行为的重要工具。由于数学上的困难,严格可解的模型只有极少数几个,对多数模型只能作近似研究,结果也常常不理想。1976年马士庚^[2]首先提出用蒙特-卡罗方法模拟实空间的重整化群变换,从而发展成蒙特-卡罗重整化群方法。它是讨论格点场论体系及统计系统的固定点,是计算临界指数的重要手段。本文采用的是 Swendsen^[3]提出的改进的 MCRG 方法。用此方法可计算体系的重整化耦合常数及多耦合常数空间的重整化群轨迹,并求得固定点及临界指数。

由于随机点阵可以保持系统的平移不变性和洛伦兹不变性^[4],与正规点阵相比,在研究连续极限、临界行为时更为优越,有值得深入研究的价值。通过对随机点阵上 Ising 模型的研究^[5],我们已经看到,在随机点阵上做 MCRG 研究可以用较少的格点、较少的相互作用项,得到比一般正规点阵更好的结果,并节省大量的计算时间。

对三态 Potts 模型,用 MCRG 方法找到其固定点是: $\{K_1^*, K_2^*, K_3^*, K_4^*\} = \{0.125, 0.20, 0.10, 0.02\}$ 。相应的临界指标是: $\nu = 0.837, \alpha = 0.326, \delta = 13.598, \eta = 0.274, \beta = 0.115, \gamma = 1.445$ 。与理论的分析值^[6]符合很好。对四态 Potts 模型,找到的固定点是: $\{K_1^*, K_2^*, K_3^*, K_4^*\} = \{0.47, 0.21, -0.25, 0.38\}$ 。相应的临界指标是: $\nu = 0.676, \alpha = 0.649, \delta = 15.13, \eta = 0.248, \gamma = 1.184, \beta = 0.0838$ 。也与理论的分析值符合很好。

* 国家自然科学基金资助的课题。

二、改进的 MCRG 方法

Swendsen 提出的改进方法其基本思想是: 构造从一个蒙特-卡罗模拟中计算重整化关联函数的两个不同表达式, 其中一个明显地依赖于重整化耦合常数, 由它可构造一个含尝试耦合常数的关联函数表达式. 这两个表达式中关联函数计算值的差表示了尝试的和真正的重整化耦合常数之间的差别, 极小化这个差别就可以求出真正的重整化耦合常数.

Potts 模型的哈密顿量是^[7]

$$H = K \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}. \quad (1)$$

其中求和是对最近邻的格点对进行的. $\sigma_i = 1, 2, \dots, q$, 称为自旋, 显然 $q = 2$ 就是 Ising 模型. 本文中我们取 $q = 3$ 和 $q = 4$. K 是耦合常数, 它吸收了 $-1/k_B T$ 因子, k_B 是玻耳兹曼常数, T 是温度.

为了较快地达到固定点, 用于重整化群变换的哈密顿量取如下形式:

$$\begin{aligned} H &= K_1 \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} + K_2 \sum_{\langle ijl \rangle} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} + K_3 \sum_{i, j, l, m} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \delta_{\sigma_l, \sigma_m} \\ &\quad \text{(最近邻)} \quad \text{(次近邻)} \quad \text{(四自旋)} \\ &\quad + K_4 \sum_i \delta_{\sigma_i, 1} \\ &= \sum_{\alpha=1}^4 K_\alpha S_\alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

关联函数的第一个表示式, 即标准表示式为

$$\langle S_\alpha \rangle = Z^{-1} \text{Tr}_\sigma [S_\alpha \exp(H)], \quad (3)$$

其中 Z 是配分函数.

$$Z = \text{Tr}_\sigma \exp(H). \quad (4)$$

关联函数的第二个表示式为

$$\langle S_\alpha \rangle = m_\alpha^{-1} \sum_l \langle S_{\alpha, l} \rangle, \quad (5)$$

其中

$$\langle S_{\alpha, l} \rangle = Z^{-1} \text{Tr}_{\{\sigma_i \neq \sigma_l\}} [\exp(H - H_l) Z_l \langle S_{\alpha, l} \rangle_l], \quad (6)$$

$$Z_l = \text{Tr}_{\sigma_l} \exp(H_l), \quad (7)$$

$$\langle S_{\alpha, l} \rangle_l = Z_l^{-1} \text{Tr}_{\sigma_l} [S_{\alpha, l} \exp(H_l)]. \quad (8)$$

对于 $\alpha = 1, 2$, $m_\alpha = 2$; 而 $m_3 = 4$, $m_4 = 1$. $S_{\alpha, l}$ 为 S_α 中含 σ_l 的所有项的和. (6) 式中的

$$H_l = \sum_{\alpha=1}^4 K_\alpha S_{\alpha, l}. \quad (9)$$

由(5)–(8)式得

$$\langle S_\alpha \rangle = m_\alpha^{-1} \sum_l Z_l^{-1} \text{Tr}_{\sigma_l} [S_{\alpha, l} \exp(H_l)]. \quad (10)$$

引入尝试耦合常数序列 $\{\tilde{K}_\alpha\}$, 由 (10) 式可得包含尝试耦合常数的关联函数的近似表示式为

$$\langle \tilde{S}_\alpha \rangle = m_\alpha^{-1} \sum_l \tilde{Z}_l^{-1} \text{Tr}_{\sigma_l} \left[S_{\alpha,l} \exp \left(\sum_{\tau=1}^4 \tilde{K}_\tau S_{\tau,l} \right) \right]. \quad (11)$$

其中

$$\tilde{Z}_l = \text{Tr}_{\sigma_l} \exp \left(\sum_{\alpha=1}^4 \tilde{K}_\alpha S_{\alpha,l} \right). \quad (12)$$

可以证明, 当且仅当对所有的 α , $\tilde{K}_\alpha = K_\alpha$ 时, $\langle \tilde{S}_\alpha \rangle = \langle S_\alpha \rangle$. 倘若 $\{\tilde{K}_\alpha\}$ 不等于 $\{K_\alpha\}$, 则 $\langle \tilde{S}_\alpha \rangle \neq \langle S_\alpha \rangle$. 展开至第一级

$$\langle \tilde{S}_\alpha \rangle - \langle S_\alpha \rangle = \sum_\beta \frac{\partial \langle \tilde{S}_\alpha \rangle}{\partial \tilde{K}_\beta} (\tilde{K}_\beta - K_\beta). \quad (13)$$

其中

$$\frac{\partial \langle \tilde{S}_\alpha \rangle}{\partial \tilde{K}_\beta} = m_\alpha^{-1} m_\beta^{-1} \sum_l \frac{\partial}{\partial \tilde{K}_\beta} \left(\text{Tr}_{\sigma_l} \left[S_{\alpha,l} \exp \left(\sum_{\tau=1}^4 \tilde{K}_\tau S_{\tau,l} \right) \right] / \tilde{Z}_l \right). \quad (14)$$

这样, 通过适当选取序列 $\{\tilde{K}_\alpha\}$, 使得 $\langle \tilde{S}_\alpha - S_\alpha \rangle$ 尽可能接近于零的方法可以得到重整化耦合常数 $\{K_\alpha\}$, 从而确定固定点 $\{K_\alpha^*\}$.

为计算临界指数, 在固定点 $\{K_\alpha^*\}$ 附近展开至线性项

$$K_\alpha^{(n)} - K_\alpha^* = \sum_\beta T_{\alpha\beta}^* (K_\beta^{(n-1)} - K_\beta^*). \quad (15)$$

其中

$$T_{\alpha\beta}^* = \left. \frac{\partial K_\alpha^{(n)}}{\partial K_\beta^{(n-1)}} \right|_{\text{P. P.}} \quad (16)$$

$\{K_\alpha^{(n)}\}$ 是第 n 次重整化变换后的耦合常数序列. 对任意关联函数 $\langle S_\gamma^{(n)} \rangle$ 的 Chain-rule 方程为

$$\frac{\partial \langle S_\gamma^{(n)} \rangle}{\partial K_\beta^{(n-1)}} = \sum_\alpha \frac{\partial K_\alpha^{(n)}}{\partial K_\beta^{(n-1)}} \frac{\partial \langle S_\gamma^{(n)} \rangle}{\partial K_\alpha^{(n)}}. \quad (17)$$

而且

$$\frac{\partial \langle S_\gamma^{(n)} \rangle}{\partial K_\beta^{(n-1)}} = \langle S_\gamma^{(n)} S_\beta^{(n-1)} \rangle - \langle S_\gamma^{(n)} \rangle \langle S_\beta^{(n-1)} \rangle, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \langle S_\gamma^{(n)} \rangle}{\partial K_\alpha^{(n)}} = \langle S_\gamma^{(n)} S_\alpha^{(n)} \rangle - \langle S_\gamma^{(n)} \rangle \langle S_\alpha^{(n)} \rangle. \quad (19)$$

在蒙特-卡罗模拟中可以计算 (18), (19) 式中的关联函数, 代入 (17) 式就可得一系列的矩阵元 $T_{\alpha\beta}^*$.

解本征方程

$$\sum_\beta T_{\alpha\beta}^* \phi_\beta^r = \lambda \phi_\alpha^r. \quad (20)$$

求出其最大本征值 λ , 则临界指数 $\gamma = \ln \lambda / \ln b$, b 为重整化群变换中的标度因子, 它的数值由块化方法来决定.

三、计算结果

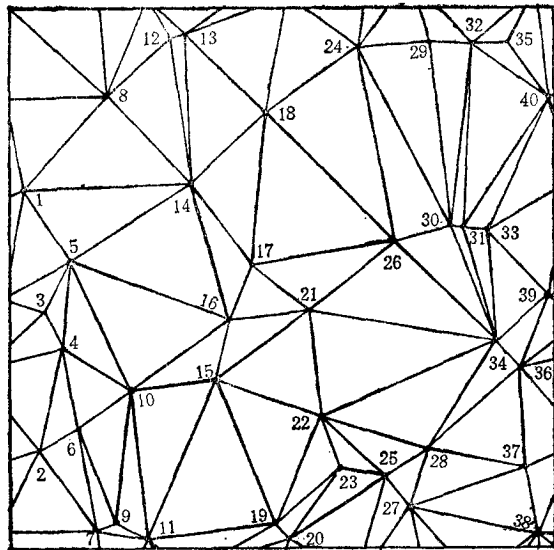
我们在二维平面上随机地置 160 个格点,然后用文献[4]中的方法构成二维随机三角点阵,确定格点之间的近邻、次近邻关系.我们用的块化方法是将两个近邻的格点对块化

成一个Block 格点,并以相等的几率取其中一个格点上的自旋为 Block 格点上的自旋,这样构成经过一次块化的随机三角点阵及相应的自旋体系.图 1 是此过程的示意图.由于经每次块化,Block 格点数减少一半,因而块化后点阵的单形-三角形的面积增加一倍,所以标度因子 $b = \sqrt{2}$.

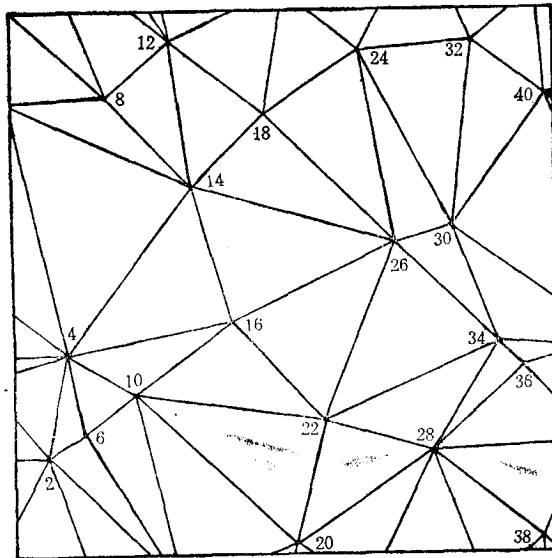
对三态 Potts 模型,从表示式 (2)出发做 MCRG 研究.选定尝试耦合常数序列 $\{\tilde{K}_a\}$,做 10000 次 MC 迭代,去掉前面 1000 次使系统达到热平衡的迭代,然后进行三次块化,测量关联函数.按第二节中所述的方法找到固定点 $\{K_1^*, K_2^*, K_3^*, K_4^*\} = \{0.125, 0.20, 0.10, 0.02\}$.由三个偶关联函数:最近邻关联、次近邻关联和四自旋关联,代入(18), (19)和 (17) 式,可得 $T_{a\beta}^*$,解本征方程 (20) 可得最大偶本征值 $\lambda_e = 1.513$.同理,由测量的奇关联函数 $\sum_i \delta_{\sigma_i,1}$,可得最大奇

本征值 $\lambda_o = 1.907$.相应的临界指数 $y_e = 1.195$, $y_o = 1.863$.由它们可计算全部的临界指标 $\nu, \alpha, \delta, \eta, \beta$ 及 γ .我们得到的临界指标及其与理论分析的分数值^[6]和正方点阵上 MCRG 结果^[8]的比较见表 1.

由表 1 可见,与文献[8]结果相比,我们得到的结果与理论的分析值符合得更好些,而文献[8]是在二维正方点阵 96×128 个格点上计算八种相互作用做四次块化得到的.相



(a)



(b)

图 1

表 1

	y_c	y_0	ν	α	δ	η	γ	β
随机点阵 MCRG	1.195	1.863	0.837	0.326	13.598	0.274	1.445	0.115
正方点阵 MCRG ^[6]	1.215	1.870	0.823	0.354	14.385	0.260	1.432	0.107
理论的分析值 ^[6]	1.2 (6/5)	1.867 (28/15)	0.833 (5/6)	0.333 (1/3)	14	0.267 (4/15)	1.444 (13/9)	0.111 (1/9)
MC 方法 ^[9]				0.4			1.45	0.1
级数展开等方法 ^[10]				0.26—0.42	14.7—15.0		1.42—1.50	0.10—0.105

比可见,随机点阵上用 MCRG 方法研究临界性质可用较少的格点数(160 个格点)仅计算四种相互作用项,三次块化就能得到满意的结果,也节省了大量的计算时间。这是由随机点阵的特点决定的。在随机点阵中,每个格点有更多的“最近邻”(二维正方点阵是 4,随机三角点阵平均是 6),最近邻相互作用包括了对于正方点阵而言的次近邻相互作用的修正。同样,它的“次近邻”相互作用中也包括了对正方点阵而言更远的相互作用的修正,所以在随机点阵上做 MCRG 研究较为优越。由表 1 还可看出,用 MCRG 方法计算的结果比用单纯的 MC 方法或解析的级数近似方法的结果要好得多。

对四态 Potts 模型,为使重整化轨迹较快地达到固定点,用于重整化群变换的哈密顿量取如下形式^[11]:

$$\begin{aligned}
 H = & K_1 \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i \sigma_j} + K_2 \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i \sigma_j} + K_3 \sum_{i,j,l,m} \delta_{\sigma_i \sigma_j} \delta_{\sigma_l \sigma_m} \\
 & \text{(最近邻)} \quad \text{(次近邻)} \quad \text{(四自旋)} \\
 & + K_4 \sum_{i,j,l} (1 - \delta_{\sigma_i \sigma_j})(1 - \delta_{\sigma_j \sigma_l})(1 - \delta_{\sigma_l \sigma_i}). \quad (21) \\
 & \text{(三角形的三个顶点)}
 \end{aligned}$$

其中第四项描写三角形的三个顶点上自旋值都不相同时的能量,显然,此项控制了定域的无序。

选定尝试耦合常数序列,做 8000 次蒙特-卡罗迭代,去掉前面 1000 次使系统达到热平衡的迭代,再进行三次块化,测量关联函数,用同样的方法找到固定点 $\{K_1^*, K_2^*, K_3^*, K_4^*\} = \{0.47, 0.21, -0.25, 0.38\}$ 。得到的最大偶本征值 $\lambda_e = 1.653$, 最大奇本征值 $\lambda_o = 1.916$, 相应的临界指数为 $y_c = 1.480$, $y_0 = 1.876$ 。我们得到的临界指标及其与理论分析的分数值^[6]和正方点阵上 MCRG 结果^[11]的比较见表 2。

表 2

	y_c	y_0	ν	α	δ	η	γ	β
随机点阵 MCRG	1.480	1.876	0.676	0.649	15.13	0.248	1.184	0.0838
正方点阵 MCRG ^[11]	1.49	1.868—1.911						
理论的分析值 ^[6]	1.5	1.875	0.667 (2/3)	0.667 (2/3)	15 (15)	0.25 (1/4)	1.167 (7/6)	0.0833 (1/12)

由表 2 可见,我们得到的结果与理论分析值符合得很好,也与文献[11]中 48×48 的

正方点阵上通过 4×10^5 次蒙特-卡罗迭代的結果一致。

本文是在 M-340 计算机上完成的。

- [1] D. Friedan, Z. Qiu and S. Shenker, "Vertex Operators in Mathematics and Physics"—Proceedings of a conference November 10—17, (1983), p. 419. Edited by J. Lepowsky, S. Mandelstam, I. M. Singer.
- [2] S. -K. Ma, *Phys. Rev. Lett.*, **37**(1976), 461.
- [3] R. H. Swendsen, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1165.
- [4] N. H. Christ, R. Friedberg and T. D. Lee, *Nucl. Phys.*, **B202**(1982), 89; **B 210** (1982), 310; **B210** (1982), 337.
- [5] 黄五群、陈天卷、沈琴婉、钟朝武, 高能物理与核物理, **11**(1987), 563; 陈天卷、黄五群、沈琴婉, 高能物理与核物理, **12**(1988), 573.
- [6] E. K. Riedel, *Physica*, **106A**(1981), 110.
- [7] R. B. Potts, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **48**(1952), 106.
- [8] C. Rebbi and R. H. Swendsen, *Phys. Rev.*, **B21**(1980), 4094.
- [9] K. Binder, *J. Stat. Phys.*, **24**(1981), 69.
- [10] J. P. Straley and M. E. Fisher, *J. Phys. A*, **6**(1973), 1310;
I. G. Enting, *J. Phys. A*, **7**(1974), 1617; 2181;
D. Kim and R. I. Joseph, *J. Phys. A*, **8**(1975), 891;
R. Zwanzig and J. D. Ramshaw, *J. Phys. A*, **10**(1977), 65.
- [11] R. H. Swendsen, D. Andelman and A. N. Berker, *Phys. Rev.*, **B24**(1981), 6732.

MONTE CARLO RENORMALIZATION GROUP STUDY OF THREE-STATE AND FOUR-STATE POTTS MODEL ON TWO-DIMENSIONAL RANDOM TRIANGLE LATTICE

HUANG WU-QUN CHEN TIAN-LUN XIN YUN-WEI

(Department of Physics, Nankai University, Tianjin)

ABSTRACT

An improved Monte Carlo renormalization group method is applied to three-state and four-state Potts models on two-dimensional random triangle lattice. Their fixed points and critical exponents are analysed. The critical exponents obtained are consistent with the theoretical analytical values.