

爱因斯坦方程的一组严格的双孤立波解

陶 福 臻 李 波

(中山大学物理系)

1988年7月21日收到

由一个对角型的度规出发,给出了一组严格的引力双孤立波解. 这组解是处处正则和稳定的,它们描写两个分别沿正 z 方向和负 z 方向的光速传播的孤立波,而且在彼此碰撞后不会改变自己形状并继续传播. 文章最后还讨论了这组解相应的时空奇异性和能量正定性问题.

一、引 言

现今流行的引力波探测理论的出发点是 1906 年爱因斯坦给出的引力场方程的平面波解^[1],由于平面波能量之高度分散,所以探测是异常困难的,在实验室里人工产生引力波也几乎是不可能的. 平面波只是引力场方程在线性近似下的一个解. 如果存在一种能量集中在一个有限范围,传播中又不扩散的引力波,则引力波的探测和人工产生引力波的可能性将会大大提高. 所以,引力场方程是否存在孤立波解,自然是一个非常值得注意的问题. 1978 年 Belinskii 和 Zakharov 把逆散射方法成功地应用于爱因斯坦方程^[2],1980 年 Belinskii 和 Fargion 在上述工作的基础上找到了引力孤立波解^[3],但这组解描写的波的传播速度大于光速,所以是非物理的,而且这组解也不是明显的行波形式. 1983 年 Ibañez 和 Verolaguev 用同样的方法找到 4 孤立波解,解的局域性和碰撞行为类似于经典孤立波^[4]. 1985 年他们进一步找到了多孤立波解,并证明其速度小于光速^[5].

1978 年作者之一从 Bondi 度规出发,给出了爱因斯坦方程的一组严格的单孤立波解^[6],这组解是明显的行波形式,没有奇异性和能量是正定的.

本文推广了上述工作,从一对角型度规出发,给出了一组严格的引力双孤立波解,这组解是处处正则和稳定的. 它们描写两个分别沿正 z 方向和负 z 方向以光速传播的孤立波,在彼此碰撞以后不会改变自己形状并继续传播. 最后还讨论了它们的时空奇异性问题和能量的正定性问题.

二、引力方程的一组严格双孤立波解

由对角型的间隔表示出发,

$$ds^2 = 2A(u, v)dudv - B(u, v)dx^2 - C(u, v)dy^2, \quad (1)$$

式中 $u = ct - z$, $v = ct + z$, A, B, C 为 u, v 的函数,在 $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = u$, $x^4 = v$ 的坐标中相应的克里斯托夫记号的非零分量为

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{13}^1 &= \frac{1}{2} \frac{B'}{B}, & \Gamma_{14}^1 &= \frac{\dot{B}}{B}, \\
 \Gamma_{23}^2 &= \frac{1}{2} \frac{C'}{C}, & \Gamma_{24}^2 &= \frac{1}{2} \frac{\dot{C}}{C}, \\
 \Gamma_{12}^4 &= \frac{1}{2} \frac{C'}{A}, & \Gamma_{12}^3 &= \frac{1}{2} \frac{\dot{C}}{A}, \\
 \Gamma_{33}^3 &= \frac{A'}{A}, & \Gamma_{44}^4 &= \frac{\dot{A}}{A}, \\
 \Gamma_{11}^4 &= \frac{1}{2} \frac{B'}{A}, & \Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2} \frac{\dot{B}}{A},
 \end{aligned} \tag{2}$$

其中“'”表示 u 的偏导数, “ $\dot{}$ ”表示对 v 的偏导数. 即

$$B' = \frac{\partial B(u, v)}{\partial u}, \quad \dot{B} = \frac{\partial B(u, v)}{\partial v}.$$

非零的 Ricci 张量为

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\dot{B}}{A} \right)' + \left(\frac{B'}{A} \right)^{\cdot} + \frac{1}{2} \frac{\dot{B}}{A} \left(-\frac{B'}{B} + \frac{C'}{C} + \frac{2A'}{A} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{B'}{A} \left(-\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{2\dot{A}}{A} \right) \right\}, \\
 R_{22} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\dot{C}}{A} \right)' + \left(\frac{C'}{A} \right)^{\cdot} + \frac{1}{2} \frac{\dot{C}}{A} \left(\frac{B'}{B} - \frac{C'}{C} + \frac{2A'}{A} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{C'}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} + \frac{2\dot{A}}{A} \right) \right\}, \\
 R_{33} &= \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{B'}{B} + \frac{C'}{C} \right)' + \frac{1}{2} \frac{B'}{B} \left(\frac{2A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{C'}{C} \left(\frac{2A'}{A} - \frac{C'}{C} \right) \right\} \\
 R_{34} &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{B'}{B} + \frac{C'}{C} + \frac{2A'}{A} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{B'\dot{B}}{B^2} + \frac{C'\dot{C}}{C^2} \right) \right\} \\
 R_{44} &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right)^{\cdot} - \frac{1}{2} \frac{\dot{B}}{B} \left(\frac{2\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{2\dot{A}}{A} - \frac{\dot{C}}{C} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

所以真空爱因斯坦方程 $R_{\mu\nu} = 0$ 写为

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\dot{B}}{A} \right)' + \left(\frac{B'}{A} \right)^{\cdot} + \frac{1}{2} \frac{\dot{B}}{A} \left(\frac{C'}{C} - \frac{B'}{B} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{B'}{A} \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{B}}{B} \right) + \frac{1}{A^2} (\dot{B}A' + B'\dot{A}) = 0, \\
 &\left(\frac{\dot{C}}{A} \right)' + \left(\frac{C'}{A} \right)^{\cdot} + \frac{1}{2} \frac{\dot{C}}{A} \left(\frac{B'}{B} - \frac{C'}{C} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{C'}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right) + \frac{1}{A^2} (\dot{C}A' + C'\dot{A}) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{B'}{B} + \frac{C'}{C}\right)' + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{B'}{B}\right)^2 + \left(\frac{C'}{C}\right)^2\right] - \frac{A'}{A} \left(\frac{B'}{B} + \frac{C'}{C}\right) = 0, \\
& \left(\frac{B}{B} + \frac{C'}{C}\right)' + \frac{1}{2} \left(\frac{B'\dot{B}}{B^2} + \frac{C'\dot{C}}{C^2}\right) - 2\left(\frac{A'}{A}\right)' = 0, \\
& \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)' + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 + \left(\frac{\dot{C}}{C}\right)^2\right] - \frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right) = 0.
\end{aligned} \quad (4)$$

方程组(4)方程数为5, 但只有3个未知数, 所以是超定方程, 一般地求解是极其困难的, 所幸的是我们找到了它们一组特解.

假定 $A(u, v)$ 是可分离变数的, 即

$$A(u, v) = A_1(u)A_2(v).$$

可作一变数变换

$$\begin{aligned}
u &\rightarrow u = \int A_1(u) du, \\
v &\rightarrow v = \int A_2(v) dv,
\end{aligned} \quad (5)$$

且令

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{\partial}{\partial v} \ln B, \quad V_1 = \frac{\partial}{\partial v} \ln C, \\
U_2 &= \frac{\partial}{\partial u} \ln B, \quad V_2 = \frac{\partial}{\partial u} \ln C,
\end{aligned} \quad (6)$$

以及用“ $\cdot$ ”和“ $\cdot$ ”分别代表对 u', v' 的偏导数. 例如

$$\dot{V}_2 = \frac{\partial}{\partial v} V_2, \quad V_1 = \frac{\partial}{\partial u} V_1$$

等等, 方程(4)可改写为

$$2(U_1 + V_1)' + U_1^2 + V_1^2 = 0, \quad (7)$$

$$2(U_2 + V_2)' + U_2^2 + V_2^2 = 0, \quad (8)$$

$$2(U_1 + V_1)' + U_1 U_2 + V_1 V_2 = 0, \quad (9)$$

$$\dot{U}_2 + \frac{1}{2} U_1 U_2 + \frac{1}{4} (U_1 U_2 + U_2 V_1) = 0, \quad (10)$$

$$\dot{V}_2 + \frac{1}{2} V_1 V_2 + \frac{1}{4} (U_1 V_2 + U_2 V_1) = 0. \quad (11)$$

利用方程(9), (10), (11), 可得到

$$U_1 V_2 + U_2 V_1 = 0.$$

于是方程(9), (10), (11)可改写为

$$U_1 V_2 + U_2 V_1 = 0, \quad (12)$$

$$\dot{U}_2 + \frac{1}{2} U_1 U_2 = 0, \quad (13)$$

$$\dot{V}_2 + \frac{1}{2} V_1 V_2 = 0. \quad (14)$$

由于方程(12)可定义一个关于 u, v 的函数 f , 而且 f 满足下述关系:

$$V_1 = fU_1, \quad V_2 = -fU_2. \quad (15)$$

由方程(13),(14)可得

$$U_1 = \frac{2f}{f(1-f)}. \quad (16)$$

由方程(12),(13),(14)可以有

$$\left(\frac{1}{U_1} + \frac{1}{V_2}\right)' = 0, \quad (17)$$

$$\left(\frac{1}{U_2} + \frac{1}{V_1}\right)' = 0. \quad (18)$$

积分得

$$\frac{1}{U_1} + \frac{1}{V_2} = F(u'), \quad (19)$$

$$\frac{1}{U_2} + \frac{1}{V_1} = G(v'), \quad (20)$$

式中 $F(u')$ 仅为 u' 的函数,与 v' 无关, $G(v')$ 仅为 v' 的函数,与 u' 无关. 由(15), (20)和(16)式有

$$G(v') = \frac{1-f}{2f},$$

亦即

$$f\left(\frac{1}{f-1} - \frac{1}{f+1}\right) = \frac{1}{G(v)} \equiv G_1(v'). \quad (21)$$

可以验证: 方程(21)有一个特解,

$$f = \frac{m+n}{m-n}, \quad (22)$$

式中 $m = m(v')$, $n = n(u')$. 把(22),(16),(15)式代入(12),(13), (14)式还可以解出

$$v_2 = \frac{2f'}{f(1+f)}. \quad (23)$$

至此,找到了方程(9),(10),(11)的解

$$U_1 = \frac{2f}{f(1-f)} = \frac{2\dot{m}}{m+n}, \quad (24)$$

$$U_2 = \frac{2f'}{f(1+f)} = \frac{2n}{m+n}, \quad (25)$$

$$V_1 = fU_1 = \frac{2\dot{m}}{m-n}, \quad (26)$$

$$V_2 = -fU_2 = \frac{2n'}{m-n}. \quad (27)$$

继续通过方程(7),(8)寻找 m, n 的表示. 把(24),(25)式代入(7)式,得到

$$\ddot{m} = 0. \quad (28)$$

直接积分

$$m = C_2 v' + C_1 \quad (29)$$

是任意常数。又得到

$$n'' = 0. \quad (30)$$

直接积分

$$n = C_1 u' + C_3, \quad (31)$$

是任意常数。换回变数 u, v , 则 m, n 分别为

$$m = C_2 \int A_2(v) dv + C_4, \quad (32)$$

$$n = C_1 \int A_1(u) du + C_3. \quad (33)$$

根据(6)式,可直接写出满足爱因斯坦方程的 A, B, C

$$A = A_1(u)A_2(v), \quad (34)$$

$$B = (m + n)^2 = \left[C_1 \int A_1(u) du + C_2 \int A_2(v) dv + D_1 \right]^2, \quad (35)$$

$$C = (m - n)^2 = \left[C_1 \int A_1(u) du - C_2 \int A_2(v) dv + D_2 \right]^2. \quad (36)$$

解(34),(35),(36)式描写一组沿正反 z 方向传播的引力波。纵波部分由 $A_1(u)$ 和 $A_2(v)$ 决定,横波部分由 $B(u, v)$ 和 $C(u, v)$ 决定。特别当 $A_1(u)A_2(v)$ 取下列形式时,就描写一对沿 $\pm z$ 方向的孤立波。

1. $A_1(u) = \operatorname{sech} u, A_2(v) = \operatorname{sech} v$,

相应的度规张量为

$$g_{11} = (2 \tan^{-1} e^u + 2 \tan^{-1} e^v + D_1)^2,$$

$$g_{22} = (2 \tan^{-1} e^u - 2 \tan^{-1} e^v + D_2)^2,$$

$$g_{33} = \operatorname{sech} u \cdot \operatorname{sech} v = -g_{44}.$$

2. $A_1(u) = \operatorname{sech}^2 u, A_2(v) = \operatorname{sech}^2 v$,

$$g_{11} = (\operatorname{th} u + \operatorname{th} v + D_1)^2,$$

$$g_{22} = (\operatorname{th} u - \operatorname{th} v + D_2)^2,$$

$$g_{33} = \operatorname{sech}^2 u \cdot \operatorname{sech}^2 v = -g_{44}.$$

3. $A_1(u) = \operatorname{th} u \cdot \operatorname{sech}(\log \operatorname{ch} u)$,

$$A_2(v) = \operatorname{th} v \cdot \operatorname{sech}(\log \operatorname{ch} v),$$

$$g_{11} = [2 \tan^{-1}(\operatorname{ch} u) + 2 \tan^{-1}(\operatorname{ch} v) + D_1]^2,$$

$$g_{22} = [2 \tan^{-1}(\operatorname{ch} u) - 2 \tan^{-1}(\operatorname{ch} v) + D_2]^2,$$

$$g_{33} = \operatorname{th} u \cdot \operatorname{sech}(\log \operatorname{ch} u) \cdot \operatorname{th} v \cdot \operatorname{sech}(\log \operatorname{ch} v) = -g_{44}.$$

4. $A_1(u) = \frac{1}{u^2 + 1}, A_2(v) = \frac{1}{v^2 + 1}$,

$$g_{11} = (\tan^{-1} u + \tan^{-1} v + D_1)^2,$$

$$g_{22} = (\tan^{-1} u - \tan^{-1} v + D_2)^2,$$

$$g_{33} = \frac{1}{u^2 + 1} \frac{1}{v^2 + 1} = -g_{44}.$$

5. $A_1(u) = \frac{u}{(u^2 + 1)^2}, A_2(v) = \frac{v}{(v^2 + 1)^2}$,

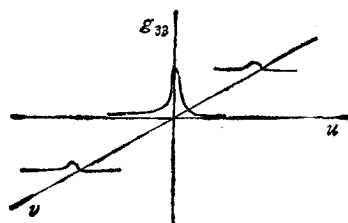
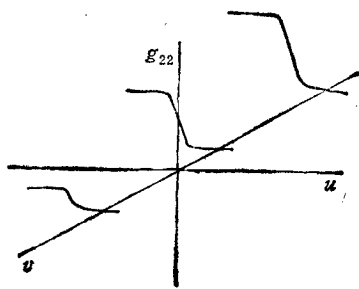
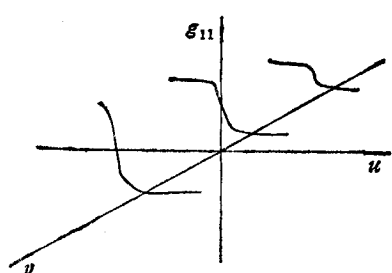


图 1 解 2

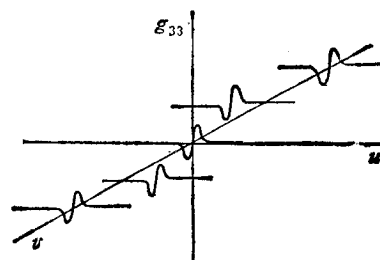
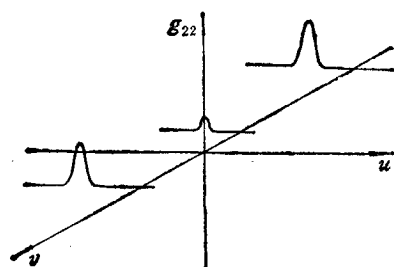
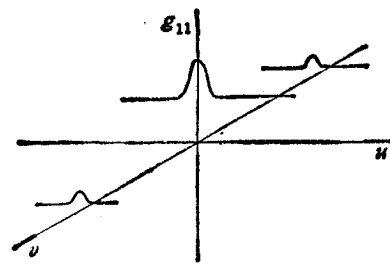


图 2 解 5

$$g_{11} = \left(\frac{1}{u^2 + 1} + \frac{1}{v^2 + 1} + D_1 \right)^2,$$

$$g_{22} = \left(\frac{1}{u^2 + 1} - \frac{1}{v^2 + 1} + D_2 \right)^2,$$

$$g_{33} = \frac{u}{(u^2 + 1)^2} - \frac{v}{(v^2 + 1)^2} = -g_{44}.$$

解 1—5 分别描写一对沿 $\pm x$ 方向传播的引力孤立波,它们是处处正则的,以光速 c 不变形地传播,而且在互相碰撞后,仍然不改变形状继续传播。其中,解 2 和解 5 的波形图由图 1 和图 2 给出。

三、奇异性的讨论

注意到线元表示式(1),可以知道,当 $A = 0$ 时, $g_{33}, g_{44} = 0$, 必须研究这种线元中的病态行为是否会导致时空的奇异,或者是仅由坐标选择而引起的问题。例如在 Schwa-

rzshild 度规 $ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ 中, 当 $r = 0$, $r = 2M$ 和 $\theta = 0$ 时, 线元都是病态的. 但经过细致的研究证明^[1]: 只有 $r = 0$ 才是真正的物理奇异, 而在 $r = 2M$ 和 $\theta = 0$ 时的时空不是奇异的, 它的病态行为仅是由于坐标选择而引起.

一般认为, 如果时空中存在一条或一条以上不完备的类时或类光的测地线, 则称这时空具有奇异性. 测地方程为

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu dk^\alpha dk^\beta = 0, \quad (37)$$

式中 $k^\mu = dx^\mu/d\lambda$, λ 为仿射参数. 注意到(2)式可知道当 $A = 0$ 时, Γ 为奇异的. 故由(37)式决定的测地线在 $A = 0$ 时没有意义. 即测地线是不完整的. 根据这个理由, 解 3, 5 在 u 或 $v = 0$ 时, $A = 0$. 所以在该点上时空是奇异的. 两解 1, 2 则是非奇异的. 它们给出了一种处处正则的, 以光速沿 $\pm z$ 方向传播的引力双孤立波解.

四、关于能量分布的讨论

场论中对能量在空间中的分布问题, 一般不能给出唯一的答案. 原因是, 在场论中是由守恒律 $\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0$ 来定义能量、动量张量. 所以 $t^{\mu\nu}$ 的表示式总可以差一个散度为零的量. 1977 年胡宁给出了一个能量、动量张量的表示式^[7]

$$t^{(n)\mu\nu} = \frac{c^4}{4\pi \cdot 4k} [(-g)^{n-1}(-g g^{\mu\rho} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda})_{;\lambda}]_{;\sigma}, \quad (38)$$

式中 n 为任意的数. 当 $n = 1$ 时, (38) 式就化为 L-L 表示式. $n = 1/2$, 就是爱因斯坦表示式. 把线元(1)式代入(38)式得到能量密度

$$\begin{aligned} \frac{t^{(n)00}}{\frac{c^4}{4\pi k} (-g)^{n-1}} &= 2(n-1) \left[\left(\int A_1 du \right)^2 - \left(\int A_2 dv \right)^2 \right] \left[\left(\frac{A_2}{A_1} - \frac{A_1}{A_2} \right) \left(A_1 \int A_1 du + A_2 \int A_2 dv \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(A_1 \int A_1 du - A_2 \int A_2 dv \right) \right] + \left(A_1 \int A_2 dv + A_2 \int A_1 du \right)^2 \\ &\quad - (4n-1) \left(A_1 \int A_1 du + A_2 \int A_2 dv \right)^2. \end{aligned} \quad (39)$$

如果把解 1—5 代入上式, 得到相应的能量密度的表示. 可以看到我们的解所描述的引力波的能量分布在一有限的空间. 这正是孤立波的特点.

但是由(39)式所决定的能量密度, 虽然处处有限但不是恒正的. 由于负的能量会相应负的质量, 而自然界迄今为止尚未发现负质量的物质. 所以, 人们希望引力场的能量是恒正的. 我们的解是描述两个按相反方向传播的引力波. 空间的能量分布与两个引力孤立波的相对位置有关, 为说明这点, 我们通过解 2 进行详细的讨论. $t^{\mu\nu}$ 选用爱因斯坦表示, 即 $n = 1/2$ 情形.

$$\frac{t^{00}}{\frac{c^4}{4\pi k} (-g)^{\frac{1}{2}}} = \left[\left(\int A_1 du \right)^2 - \left(\int A_2 dv \right)^2 \right] \left[\frac{A_1 A_2}{A_1} \int A_2 dv - \frac{A_1 A_2}{A_2} \int A_1 du + (A_2^2 - A_1^2) \right], \quad (40)$$

代入解 2, 于是

$$\frac{r^{00}}{\frac{c^4}{4\pi k}(-g)^{\frac{1}{2}}} = [\text{th}^2 u - \text{th}^2 v][(\text{sech}^2 u - \text{sech}^2 v) \cdot (2\text{th} u \text{th} v - \text{sech}^2 u - \text{sech}^2 v)]. \quad (41)$$

讨论上式的恒正性

设 $|u| > |v|$, 有 $(\text{th}^2 u - \text{th}^2 v) < 0$; $(\text{sech}^2 u - \text{sech}^2 v) > 0$. 如要 r^{00} 恒正, 要求 $(2\text{th} u \text{th} v - \text{sech}^2 u - \text{sech}^2 v) < 0$, 也即

$$(\text{th} u + \text{th} v) < \sqrt{2}. \quad (42)$$

当正反方向传播的两个孤立波相距很远时, 即 u, v 相差很大. 例如: $u \gg v > 0$, 条件(42)式一定可以满足. 所以 r^{00} 是恒正的.

当两个孤立波相距较近时, 即 u, v 相差较小, 条件(42)式可以被破坏, 而引起被破坏的范围可以估计. 例如当 $\text{th} u = \sqrt{2}/2$, 要求 $\text{th} v < \sqrt{2}/2$, 我们是在同一时间中观察的, 即 u, v 中的 t 是相同的. 所以条件(42)式规定了两个孤立波峰值的隔间不能小于一定范围. 当两个孤立波相隔大于这范围时能量是正定的, 在这范围内能量的正定性就很复杂. 也许是表示两个孤立波在碰撞的过程中, 包括一复杂的物理过程, 不是简单交换其位置.

另外, 由图 1 知道, 解 2 中当 u (或 v) 远离原点时, g_{33} 趋于 ∞ ; 由图 2 可以看到, 当 $u = v = 0$ 时, g_{33} 为 0, 这是非物理的, 这些困难将在另文中得到解决.

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, "Gravitation" Freeman and Cempapy, San Francisco.
- [2] V. A. Belinskii, V. E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP*, 48(1978), 984.
- [3] V. Belinskii, D. Fargion, *Nuovo Cimento*, B59(1980), 143.
- [4] J. Ibanez, E. Verolaguer, *Phys. Rev. Lett.*, 51(1983), 1313.
- [5] J. Ibanez, E. Verolaguer, *Phys. Rev.*, D31(1985), 251.
- [6] 陶福臻, 物理学报, 36(1987), 350.
- [7] 胡宁, 中国科学, (3)(1977), 210.

A SET OF EXACT GRAVITATIONAL 2-SOLITON SOLUTIONS OF EINSTEIN'S EQUATIONS

TAO FU-ZHEN LI BO

(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou)

ABSTRACT

According to a diagonal metric tensor, a set of exact gravitational soliton solutions of Einstein's equations in vacuum is obtained, which describe two solitons propagating with constant velocity in opposite directions. After collision, they will continue to propagate without changing their original shape. Finally, the singularity and energy density of these solutions are also discussed.