

波长缩放高频调制全息成象公式的校正

王永昭 C. S. Ih

(天津大学精密仪器工程系)

1988年2月8日收到

本文给出了高频调制具有波长缩放全息成象公式的校正系数。由校正后的公式计算的结果,其衍射角及坐标值可获得精确的结果。验证表明,计算的坐标值与实际的坐标值之差保持在0.4%左右,并给出了当 $\mu \leq 1$ 时由校正系数直接计算 x_{30} 和 y_{30} 的简便公式。

一、引言

对全息成象关系的求解文献[1,5]作了很好的推导,并得出适于不同运算条件的结果,参考有关[6]的推导程序,这里对波长缩放高频调制的全息成象公式的运用条件存在着一定的极限性,提出了可使计算结果更为精确的校正系数。在大多数的全息系统中,当满足视场要求的同时,一般是选择尽可能小的参考入射角。因此文献[6]中所提出的高频调制全息成象公式,在 $\alpha_1 \geq \alpha_{R,C}$ 的条件下是可适用的。但当成象系统的几何参数为 $\alpha_{R,C} > \alpha_1$,且有波长缩放时,没有经校正的成象公式将得出不完全正确的结果。为了使这一些公式具有较为广泛的适用性,本文推得了可使高频调制成象公式适于各种不同运算条件的校正系数。

二、高频调制全息成象公式校正前的适用性

为了说明这一点,图1给出四组曲线。与几何参数 $G = z_1 x_R / (x_1 z_R)$ 成比例的若干横坐标值,在波长比例系数 $\mu < 1$ (取 $\mu = 0.77$)与 $\mu > 1$ (取 $\mu = 1.3$)都适用,这相当于物光束或参考光束的入射角依次逐渐减少的状态。(1)当 $\alpha_1 > \alpha_{R,C}$, $\mu = 0.77$ 时,计算结果表明在没有校正前这些公式具有较为正确的结果。从图1上可以看到,对(I₁)一组来说由参数 x_{30}^0 (未经校正的在 x 轴上成象点的坐标值)和 z_{30}^0 (未经校正的在 z 轴上成象点的坐标值)所构成的衍射角 α_{30}^0 与实际的衍射角 α_{di} 之间的差值较小,并可以看到在1.11这点位置上相符合。随着横坐标值 G 的增大或减小,计算的象点衍射角值将逐步偏离正确的衍射角值。由于存在着几何放大和波长放大这样两个因素,要使衍射象点计算坐标值的误差最小,一般是出现在参物光的几何参数为对称的条件下可获得。当系统的几何参数保持不变、仅将波长放大率由 $\mu < 1$ (取 $\mu = 0.77$)改为 $\mu > 1$ (取 $\mu = 1.3$)时,所获得的结果如图1(I₂)这一组曲线所示,这时由高频调制成象公式所计算的结果其误差值将随着 G 的增大而增大,在 α_{di} 曲线上的点划线表示出现消失波。在这种

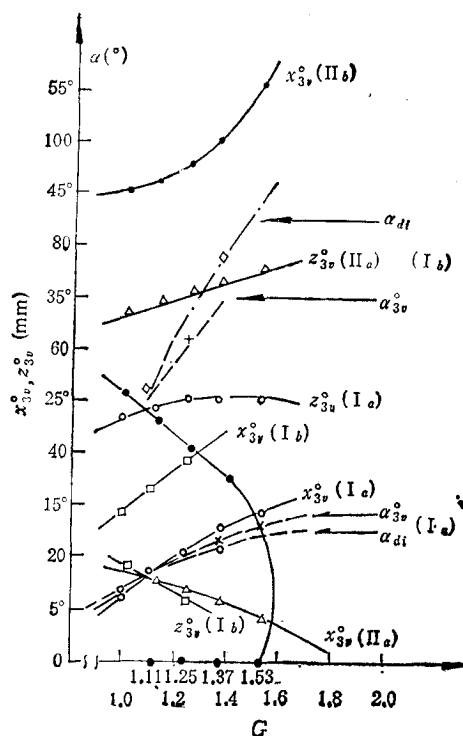


图1 当 $\alpha_i > \alpha_{R,C}$, $\mu = 0.77$ 及 $\mu = 1.3$ 和 $\alpha_{R,C} > \alpha_i$, $\mu = 0.77$ 及 $\mu = 1.3$ 时, 成象公式校正前的特性 (I_a) 为 $\alpha_i > \alpha_{R,C}$, $\mu = 0.77$; (I_b) 为 $\alpha_i > \alpha_{R,C}$, $\mu = 1.3$; (II_a) 为 $\alpha_i < \alpha_{R,C}$, $\mu = 0.77$; (II_b) 为 $\alpha_i < \alpha_{R,C}$, $\mu = 1.3$

条件下, 偏离实际衍射角稍大些。(2) 当系统的几何参数更改为 $\alpha_{R,C} > \alpha_i$ 时, 由这些公式所计算的成象点的坐标值, 则与正确的数值相差较远。图1的(II_b)一组表示了 x_{3v}^0 随着 G 值的增大急剧上升, 而(II_b) z_{3v}^0 则急剧下降。在后面可以看到其正确的校正值。

三、高频调制成象公式校正后的特性

这里考虑两个校正方案。当推导校正系数时, 这里由保证获得较为正确的横坐标值 x_{3v}^0 出发, 当受到衍射角及横向放大率的约束时, 所求得的坐标值 z_{3v}^0 就是一个正确的数值。

1. 校正系数 c_2 , 经推导可将其描写为

$$c_2^x = \frac{\tan \alpha_{di}^x (x_{3v}^0)^2 \cdot \mu - (M_{ist}^0)^2 \cdot \mu \cdot z_1 \cdot x_1 \cdot 2}{\tan \alpha_{di}^x \cdot L \cdot M_{ist}^0 \cdot z_1}, \quad (1)$$

$$c_2^y = \frac{\tan \alpha_{di}^y (y_{3v}^0)^2 \cdot \mu - (M_{ist}^0)^2 \cdot \mu \cdot z_1 \cdot y_1 \cdot 2}{\tan \alpha_{di}^y \cdot L \cdot M_{ist}^0 \cdot z_1}. \quad (2)$$

利用 c_2 校正系数及

$$x_{3v}^2 = \frac{x_{3v}^0}{c_1^x}, \quad y_{3v}^2 = \frac{y_{3v}^0}{c_1^y}, \quad (3)$$

$$z_{3v}^{c2} = \left[-\frac{(x_{3v}^{c2})^2 \cdot \mu}{M_{lat}^{c2} \cdot z_l} - \frac{(y_{3v}^{c2})^2 \cdot \mu}{M_{lat}^{c2} \cdot z_l} + L \right] \cdot \frac{1}{2}, \quad (4)$$

$$L = \left[\frac{\mu(x_1^2 + y_1^2 + 2z_1^2)}{z_1} - \frac{\mu(x_R^2 + y_R^2 + 2z_R^2)}{z_R} + \frac{(x_C^2 + y_C^2 + 2z_C^2)}{z_C} \right], \quad (5)$$

$$\sin \alpha_{di} = \mu(\sin \alpha_R + \sin \alpha_l) - \sin \alpha_C.$$

衍射角 α_{di}^{x2} 和 α_{di}^{y2} 表示在 xz 平面或 yz 平面求得, 可由 (5) 式计算. $M_{lat}^{c2} = M_{lat}^0/c_2^2$, M_{lat}^{c2} 类推.

利用 (1)–(5) 式, 以几何参数 $\alpha_{R,C} < \alpha_l$, $\mu < 1$ (取 $\mu = 0.77$), $\mu > 1$ (取 $\mu = 1.3$) 及 $\alpha_{R,C} > \alpha_l$, μ 值同前, 对十七组不同参数用 c_2 系数进行校正的结果示于图 2, 当与衍射角作比较时 (图 2(a) 所示), 四组的变化方向大部份与实际的衍射角的变化相近, 但 (II_a) 一组 ($\alpha_{R,C} > \alpha_l$, $\mu = 0.77$) 的变化与 α_{di} 曲线比较时, 可以看到随着 G 值的增大出现较大的偏差, 其他三组可以获得不同程度的近似.

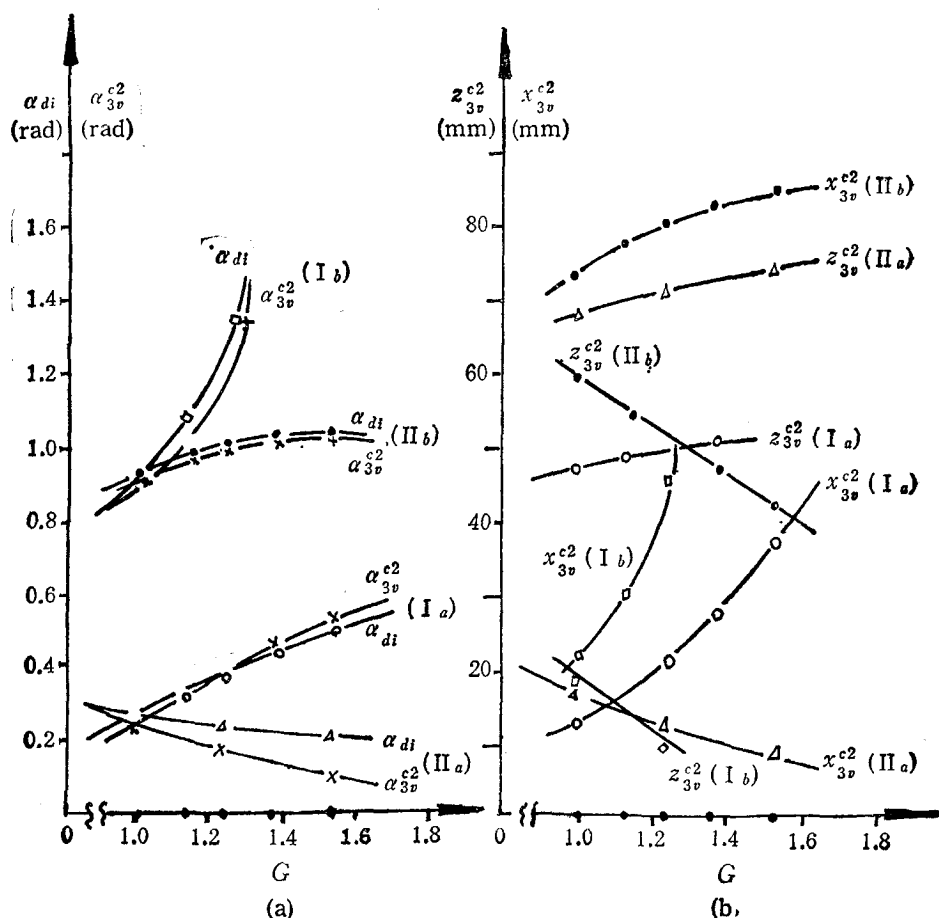


图 2 成象公式由 c_2 校正后, 其坐标值 x_{3v}^{c2} , z_{3v}^{c2} (b) 及计算的衍射角 α_{di}^{c2} 与实际的衍射角 α_{di} 的特性曲线 (a) 的比较 (I_a) 为 $\alpha_l > \alpha_{R,C}$, $\mu = 0.77$; (I_b) 为 $\alpha_l > \alpha_{R,C}$, $\mu = 1.3$; (II_a) 为 $\alpha_l < \alpha_{R,C}$, $\mu = 0.77$; (II_b) 为 $\alpha_l < \alpha_{R,C}$, $\mu = 1.3$

2. 校正系数 c_1 经过推导, 可以将 c_1 校正系数描写为

$$c_1^x = \frac{2 \cdot x_{3v}^0 \cdot M_{lat}^0 \cdot z_1 - \tan \alpha_{di}^{xz} (x_{3v}^0)^2 \cdot \mu}{L \cdot M_{lat}^0 \cdot z_1 \cdot \tan \alpha_{di}^{xz}}, \quad (6)$$

$$c_1^y = \frac{2 \cdot y_{3v}^0 \cdot M_{lat}^0 \cdot z_1 - \tan \alpha_{di}^{yz} (y_{3v}^0)^2 \cdot \mu}{L \cdot M_{lat}^0 \cdot z_1 \cdot \tan \alpha_{di}^{yz}}. \quad (7)$$

利用(1)–(5)式, 将 c_2 校正系数更改为 c_1 校正系数, 即可求得各有关参数值, 由 c_1 系数的运算结果示于图 3.

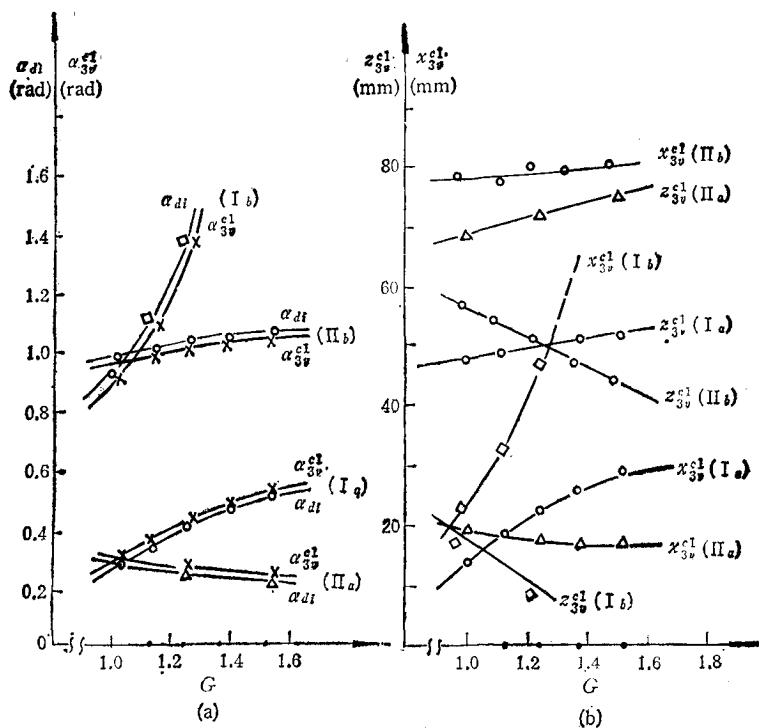


图3 成象公式由 c_1 校正后, 其坐标值 x_{3v}^1 , z_{3v}^1 (b) 及计算的衍射角 α_{3v}^1 与实际的衍射角 α_{di} 的特性曲线 (a) 的比较 (I_a) 为 $\alpha_1 > \alpha_{R,C}$, $\mu = 0.77$; (I_b) 为 $\alpha_1 > \alpha_{R,C}$, $\mu = 1.3$; (II_a) 为 $\alpha_1 < \alpha_{R,C}$, $\mu = 0.77$; (II_b) 为 $\alpha_1 < \alpha_{R,C}$, $\mu = 1.3$

从图 3 可以看到校正后的四组曲线, 对各种不同的 G 值及 μ 值, 所求得的 x_{3v}^1 和 z_{3v}^1 的数值, 与可依据的衍射角 α_{di} 作比较时, 获得了基本一致的结果. 在具有代表性的十七组不同参数的运算中, 衍射方向角的偏差平均保持在 0.4% 左右.

四、论 证

1. 校正系数与校正方向

为了说明 x_{3v} 值正确的变化方向与 α_{di} 角二者之间具有相似的特性, 这里求出在近轴条件下, 参数 x_{3v}^0 和 α_{di}^0 之间的变化趋向, 文献 [1, 3] 给出了近轴条件的公式, 可以准确地用来获得相应条件下的坐标值. 这一结果示于图 4 的下方, 它是由 $\alpha_1 < \alpha_{R,C}$, $\mu = 1.3$ 时求得的 α_{di} 与 x_{3v} 之间的变化曲线, 与图 2, 图 3 具有同样横坐标比例给出的. 当

比较高频调制下 x_{3v} 和 α_{di} 的变化方向时,从图 3 的 $x_{3v}^1(\Pi_b)$ 和图 2 的 $x_{3v}^2(\Pi_b)$ 曲线以及图 1 的 $x_{3v}^0(\Pi_b)$ 可以看出,当分别与对应的衍射角 α_{di} 曲线作比较时,图 3 $x_{3v}^1(\Pi_b)$ 的

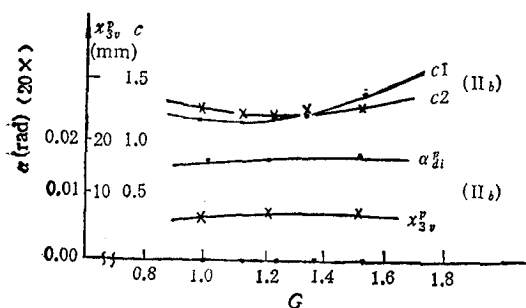


图 4 在 (Π_b) 条件下所求得近轴象点的坐标值 x_{3v}^h , 及相应衍射角 α_{di}^h 的曲线 上方为高频调制校正系数 c_1 及 c_2 曲线值

变化方向与其更为相似,其余三组曲线也是如此。根据这一结果可以认为 c_1 具有更为精确的校正值。计算表明,在高频调制下的纵向放大率与横向放大率之间的差异更大。但从图 3 上的四组曲线中可以得知, α_{di} 与 x_{3v}^1 之间的变化,仍与图 4 上的近轴条件彼此保持接近相互平行的状态相似。

2. 利用横向放大率与近轴条件下的结果作相对比较

在同样的波长放大率 μ 和成相似比例的几何参数 G 的条件下,利用近轴条件和高频调制的不同横向放大率作比较,求解高频调制下的横向坐标值 x_{3v}^h ,求得的结果也与利用公式和校正系数结合所获得的数值相近。即

$$x_{3v}^h = \left(\frac{M_{1,t}^h \cdot x_{3v}^p \cdot x_1^h}{M_{1,t}^p \cdot x_1^p} \right), \quad (8)$$

式中上标 h 表示高频值, p 表示傍轴值。用 (Π_a) 和 (Π_b) 的条件,在 μ 分别为 1.3 和 0.77, $G = 1.33$ 时,可以求得当 $\mu = 1.3$ 时, $x_{3v}^h = 77.5$ (由校正系数求得的 $x_{3v}^1 = 79.4$) 和当 $\mu = 0.77$, $x_{3v}^h = 19.0$ (由校正系数求得的 $x_{3v}^1 = 18.0$)。这些数值同样可以用来说明数值的可靠性。

3. 要是将校正系数用于校正在文献 [6] 所获得的结果,一般可使坐标值更为精确。在第 V 组的校正中,即用平面参考光和球面波记录,在没有校正之前, $x_{3v} = 76.3$, $z_{3v} = 195.25$, $\alpha_{3v} = 20.93^\circ$ (衍射角应为 21.73°)。当利用 c_1 系数校正后, $x_{3v}^1 = 77.8$ (与实验值相符), $z_{3v}^1 = 195.2$, 这时 $\alpha_{3v}^1 = 21.75^\circ$, 对于平面参考光系统及球面参考光系统,校正系数公式可以表示为

$$c_1^1 = \frac{2 \cdot M_{1,t}^0 \cdot z_1 \cdot x_{3v}^0 \pm (x_{3v}^0)^2 \cdot \mu \cdot \tan \alpha_{di}^{x,z}}{M_{1,t}^0 \cdot L \cdot z_1 \cdot \tan \alpha_{di}^{x,z}}, \quad (9)$$

$$x_{3v}^1 = \frac{x_{3v}^0}{c_1^1}, \quad y_{3v}^1 = \frac{y_{3v}^0}{c_1^1}, \quad (10)$$

$$z_{3v} = \left(\pm \frac{(x_{3v}^1)^2 \cdot \mu}{M_{1,t}^1 \cdot z_1} \pm \frac{(y_{3v}^1)^2 \cdot \mu}{M_{1,t}^1 \cdot z_1} + L \right) \cdot \frac{1}{2}, \quad (11)$$

式中“+”适于平面参考光,“−”适于球面参考光。

五、 x_{3v}^c 和 y_{3v}^c 的简便求解

当 $\mu < 1$ 时,系统的几何参数不受限制,在这条件下对 x_{3v} 及 y_{3v} 的数值可以采用如

下公式作简便计算:

$$x_{3v} = \frac{L \cdot M_{1,1}^0 \cdot z_1 \cdot \tan \alpha_{di}^{x,z}}{2 \cdot M_{1,1}^0 \cdot z_1 \pm \tan \alpha_{di}^{x,z} \cdot x_1 \cdot \mu}, \quad (12)$$

$$y_{3v} = \frac{L \cdot M_{1,1}^0 \cdot z_1 \cdot \tan \alpha_{di}^{y,z}}{2 \cdot M_{1,1}^0 \cdot z_1 \pm \tan \alpha_{di}^{y,z} \cdot y_1 \cdot \mu}. \quad (13)$$

系统中采用平面参考光时取“+”号, 采用球面参考光时取“-”号。因此, 不必再通过 x_{3v}^0, y_{3v}^0 的公式来求解 x_{3v} 及 y_{3v} 。其他参数的求解程序与前述相同。这样的计算结果比起前述的计算程序, 根据条件的不同会出现略有不同程度的偏差, 但可省去对 x_{3v}^0, y_{3v}^0 这一步的计算。

六、结 论

高频调制公式与校正系数 c_1 结合, 用这些公式求得的衍射角及其坐标值, 可获得较为精确的计算结果。用十七组相干系统进行验证表明, 计算的坐标值与实际的坐标值误差保持在 0.4% 左右。其他若干验证同样表明, 利用 c_1 校正系数与高频调制公式结合, 可获得精确的结果。没有运用校正系数之前, 高频调制公式对两光波相干系统可适用的最大干涉角约为 100° , 采用校正系数可使干涉角增大至 150° 以上。当采用简便公式来求解 x_{3v} 和 y_{3v} 的数值时, 可减少对 x_{3v}^0, y_{3v}^0 的计算步骤。

- [1] R. J. Collier, C. B. Burckhardt, L. H. Lin, Optical Holography, Academic press, (1971).
- [2] R. A. Bartolini, J. Bordogna and D. Karlsons, Radio Corporation of America Review Vol. 33, March, (1972), p. 154.
- [3] Yu. I. Ostrovsky, M. M. Butusov, G. V. Ostrovskaya, Interferometry by Holography, Nauka, publishing House, Moscow, (1980).
- [4] F. T. S. Yu, 光学信息处理, 毋国光等译, 南开大学出版社, (1986), 412 页.
- [5] C. S. Ih, Applied Optics, 14(1975), 438.
- [6] 王永昭, C. S. Ih, 天津大学学报, 待发表.

THE CORRECTION FOR HFM HOLOGRAPHIC IMAGE FORMULAS WITH WAVELENGTH MAGNIFYING RATIO

WANG YONG-ZHAO C. S. IH

(Department of Precision Instruments Engineering, Tian n University)

ABSTRACT

The corrected coefficients for high frequency modulating (HFM) imaging formulas in holographic system are given. The exact results of the diffractive angle and coordinate value for imaging point can be obtained if corrected coefficient is used in these formulas to correct. The checking of results proved that the error in diffractive angle can be kept within 0.4 percent. The formulas of x_{3v} and y_{3v} which can be also computed simply from corrected coefficient as $\mu \leq 1$ are given.